М. С. Агранович

Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей

МЦНМО

УДК 517.95
ББК 22.161.6
А25

Агранович М. С.
Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
379 с.
ISBN 978-5-4439-2068-9

Эта книга адресуется математикам, которые занимаются уравнениями в частных производных и функциональным анализом.

Первые две главы содержат вводные курсы. В главе I это теория пространств H^s бесселевых потенциалов ($s \in \mathbb{R}$; при $s \geqslant 0$ это пространства W_2^s С. Л. Соболева—Л. Н. Слободецкого). В главе II — теория общих эллиптических уравнений и задач в этих пространствах с гладкими коэффициентами на гладких поверхностях и в областях с гладкой границей. Значительную часть книги составляет теория классических граничных задач для сильно эллиптических систем 2-го порядка с коэффициентами малой гладкости в ограниченных липшицевых областях. Вместе с вспомогательным материалом она изложена в главе III и продолжается в главе IV. В главе IV, имеющей характер обзора, результаты обобщаются на пространства H_p^s бесселевых потенциалов и B_p^s О. В. Бесова (в частности, на пространства W_p^s). Она начинается с очерка теории интерполяции.

Изложение рассчитано в первую очередь на начинающих математиков, которые специализируются по уравнениям в частных производных и функциональному анализу. Особое внимание уделено доступности изложения. Книга может быть интересна также специалистам в этих областях, так как содержит ряд результатов, полученных относительно недавно. Но она может быть полезна математикам и других направлений, включая специалистов по прикладной математике и геометров, а также физикам. Предполагается знакомство с основными математическими курсами, включая элементы функционального анализа.

Подготовлено на основе книги: *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013. — 379 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-2068-9

Содержание

Предисловие

Эта книга состоит из четырех глав.

Первые две главы содержат вводные курсы: в главе I излагается теория пространств H^s типа Соболева ($s \in \mathbb{R}$) в $\mathbb{R}^n$, на гладком замкнутом многообразии и в ограниченной области с гладкой границей, а в главе II — основы теории общих линейных эллиптических уравнений на таком многообразии и теории общих эллиптических граничных задач в такой области в этих пространствах.

В главе III излагается теория основных задач для сильно эллиптических систем 2-го порядка в тех же пространствах в ограниченной липшицевой области, т. е. в области с липшицевой (вообще говоря, негладкой) границей.

В главе IV, имеющей характер обзора, кратко рассматриваются более общие пространства H^s_p бесселевых потенциалов и $B^s_p = B^s_{p,p}$ О. В. Бесова, $1 < p < \infty$, и описываются их приложения к тем же задачам.

Пространства С. Л. Соболева W^s_p — это пространства H^s_p при целом $s \geqslant 0$. Пространства B^s_p совпадают с пространствами Л. Н. Слободецкого W^s_p при нецелом $s > 0$. При $p = 2$ пространства H^s_2 и B^s_2 совпадают с H^s.

В основе книги — лекции автора, прочитанные в Независимом московском университете в 2005/06 годах, но они существенно расширены и доработаны. Наш план по сравнению с намеченным в [2] изменился.

Как и [2], эта книга рассчитана прежде всего на начинающих математиков и доступна студентам-математикам, начиная с 4 курса (знакомым, в частности, с основными понятиями функционального анализа: мера Лебега, гильбертовы и банаховы пространства, компактный оператор и его спектр и т. п.).

Ссылки на материал обязательных университетских математических курсов как правило не приводятся.

В первую очередь эта книга может быть полезна студентам и аспирантам, которые специализируются по уравнениям в частных производных и функциональному анализу. Но она может заинтересовать и тех, кто специализируется в других областях математики, а также математиков-прикладников и физиков.

Опишем теперь материал книги немного подробнее.

В первой главе мы сразу рассматриваем пространства H^s (простейшие пространства бесселевых потенциалов) и отрицательного порядка, которые не являются пространствами Соболева—Слободецкого, но необходимы в главе III. Уже в случае полупространства $\mathbb{R}^n_+$, в §§ 3 и 4, некоторые утверждения требуют довольно деликатных доказательств. Построение универсального ограниченного оператора продолжения функций из области во все пространство, предложенное В. С. Рычковым [294], отложено до § 10, так как этот оператор строится для липшицевых областей.

Во второй главе мы переходим к общей теории эллиптических уравнений и эллиптических граничных задач. Ее построение проводится подробно в §§ 6 и 7 в минимизированной общности, но основные обобщения формулируются или, по крайней мере, называются и поясняются. Это «окно» в общую теорию линейных уравнений в частных производных. Не открыв такое окно, трудно оценить в должной мере красоту и возможности применения теории пространств типа Соболева и научиться пользоваться ее результатами. Добавим, что теория эллиптических уравнений и задач, построенная на основе теории пространств типа Соболева, в свою очередь, существенно влияла на последнюю, предоставляя ей, во-первых, актуальные вопросы, во-вторых, некоторые удобные результаты.

Вопрос о том, что относится к основам теории эллиптических уравнений, решается у нас, может быть, не вполне канонически. Существенными разделами этой теории мы считаем теорию уравнений, эллиптических с параметром, и «более классическую» теорию сильно эллиптических уравнений, в которых на первом плане — однозначно разрешимые (а не фредгольмовы) уравнения и задачи. Классические вариационные задачи Дирихле и Неймана для сильно эллиптических уравнений рассматриваются сначала в области с гладкой границей в § 8. На наш взгляд, сейчас сильно эллиптические уравнения — скорее содержательный раздел теории эллиптических уравнений, чем давно пройденный этап ее развития.

Третья глава начинается с § 9, в котором сначала обсуждается специфика липшицевых областей и поверхностей. В частности, мы показываем, что липшицева функция почти всюду дифференцирума, следуя статье В. В. Степанова [315], и что выпуклая функция липшицева. Затем объясняются основные факты теории пространств H^s в липшицевых областях и на липшицевых поверхностях. В § 10 мы, следуя работе [294], обсуждаем популярные в современной литературе дискретные нормы и дискретное представление функций (начальная информация о них изложена в п. 1.14) и строим универсальный оператор продолжения (только для пространств H^s, с некоторыми упрощениями по сравнению с [294]).

В § 11 и § 12 на фоне уже описанной теории общих эллиптических задач излагается теория основных граничных задач в липшицевых областях в тех же простейших пространствах для сильно эллиптических систем 2-го порядка. Она занимает существенное место в предлагаемой книге. Здесь мы развиваем и дополняем материал прекрасно написанной книги [87], к сожалению, не переведенной на русский язык. Существенных продвижений в этой теории за последние 12 лет было много. Что удалось сделать лично автору, отмечено в § 18 (в замечаниях к § 16). При изложении этой теории ее технические детали были подвергнуты некоторой методической чистке. Вряд ли эту теорию можно считать полностью завершенной. Эти параграфы и их продолжение в § 16 могут быть интересны для специалистов по теории уравнений в частных производных и функциональному анализу.

Автору в свое время довелось принять участие в разработке общей теории (псевдодифференциальных) эллиптических задач и соответствующих спектральных задач, а в недавние годы — теории задач в липшицевых областях. Последняя заставила несколько по-новому оценить классические вещи, что послужило одним из стимулов к написанию настоящей книги. Можно надеяться, что и читателю будет интересно сравнить эти теории.

Главным приоритетом для автора была доступность изложения. Поэтому формулировки или доказательства не везде приводятся в максимальной общности.

Начинающий математик заслуживает не только замкнутого изложения простейшего варианта теории, но также и объяснений того, что есть дальше, по возможности без излишних подробностей. Поэтому в книгу включена обзорная четвертая глава, посвященная обобщениям материала первых трех глав на пространства H^s_p бесселевых потенциалов и пространства B^s_p О. В. Бесова. Это важный, но довольно громоздкий материал, и на его полное изложение со всеми доказательствами ушло бы слишком много места. Разумеется, изложение сопровождается ссылками на литературу, главным образом на монографии. Эта глава начинается с очерка теории интерполяции в § 13, написанного с позиций «потребителя» этой замечательной теории. Хотя это обзорный параграф, в нем доказывается несколько очень полезных теорем. В § 16 также доказываются важные теоремы в дополнение к материалу главы III.

Мы отклоняемся от традиции доказывать все, которой обычно придерживаются авторы книг по математике, но стараемся комментировать все излагаемые определения и факты. Характер изложения у нас ближе к лекционному, чем к книжному. Для лектора важнее неформальная четкость, чем формальная полнота изложения.

В качестве справочника по соболевским пространствам и эллиптическим задачам эта книга не годится.

Мы пользуемся понятиями теории обобщенных функций, она кратко изложена в предыдущей книжке автора [2], на которую мы будем ссылаться. (Можно, конечно, пользоваться и другими книгами по обобщенным функциям, например книгой И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [13].) С другой стороны, продолжением настоящей книги должна стать третья книга [3]. Там, в частности, будет объяснена идея построения исчисления псевдодифференциальных эллиптических операторов, а здесь мы ограничиваемся классическим методом «замораживания коэффициентов», который не потерял своего значения, прозрачен и заслуживает освоения. По мнению автора, для начинающего аналитика это полезнее делать до изучения исчисления псевдодифференциальных операторов, не говоря уже о громоздком исчислении псевдодифференциальных эллиптических задач. Метод замораживания коэффициентов используется не только при исследовании «гладких» эллиптических задач, но и при выводе неравенства Гординга в липшицевых областях.

Однако псевдодифференциальные операторы будут неоднократно упоминаться, поэтому мы формулируем определения и несколько основных фактов их теории.

Для ориентировки читателя мы в ряде мест затрагиваем спектральные задачи, но без подробных доказательств теорем, лежащих в основе исследования этих задач. Изложение этих теорем тоже планируется в [3]. Также без доказательства приводятся формулы для асимптотик собственных значений.

В § 17 излагаются справочные сведения из общей теории линейных операторов. С доказательствами здесь изложен материал, относящийся к фредгольмовым операторам и к теореме Лакса—Мильграма. Затем формулируются некоторые основные факты спектральной теории операторов (п. 17.3) и утверждения, относящиеся к псевдодифференциальным операторам (п. 17.4).

§ 18 содержит комментарии к предыдущим параграфам. Кроме детализации ссылок на литературу, здесь упоминаются разделы теории эллиптических уравнений и задач для них, иногда обширные, примыкающие к изложенному материалу, но не затронутые в нем.

Автор снова благодарит своих слушателей, особенно Полину Вытнову, Николая Горева, Василия Новикова и Михаила Сурначёва, обсуждения с ними очень помогли при отборе материала и поиске наиболее доступной формы изложения.

Особую благодарность автор хотел бы выразить В. И. Овчинникову за чтение и критику первоначального текста § 13.

Величайшей удачей для автора оказалось то обстоятельство, что Татьяна Александровна Суслина согласилась взять на себя обязанности научного редактора. Она была первым читателем текста книги, как выяснилось, еще сырого. Благодаря ее высочайшей математической квалификации, исключительной добросовестности и интересу к тематике, она нашла не только очень много опечаток и мелких неточностей, но и ряд существенных математических дефектов, нуждавшихся в исправлении, а также возможных улучшений. В результате текст книги очень сильно улучшился.

Работа автора по сильно эллиптическим системам в липшицевых областях поддерживалась грантами РФФИ. Последний из них — 11-01-00277-а.

Автор будет благодарен читателям за любые замечания и просит присылать их по адресу `magran@orc.ru`

Предварительные замечания

Для положительного числа s через $[s]$ обозначается его целая часть.

Натуральными называются целые положительные числа.

Функционал $\varphi(x)$ над линейным пространством X называется *антилинейным*, или *сопряженно-линейным*, если

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}\varphi(x)+\bar{\beta}\varphi(y)$$

для любых элементов x, y из X и любых комплексных чисел α, β. Функционал $\Phi(x, y)$ называется *полуторалинейным*, если он линеен по первому аргументу и антилинеен по второму.

В понятие подпространства (в банаховом или гильбертовом пространстве) включается условие его замкнутости.

Функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_m)$ от нескольких вещественных или комплексных переменных называется положительно однородной степени h ($\in\mathbb{R}$), если $f(tx)=t^h f(x)$ при $t>0$.

Две нормы в банаховом пространстве называются *эквивалентными*, если их отношение заключено между положительными постоянными.

Постоянные C_k мы обычно нумеруем в пределах связных рассуждений; когда тема меняется, мы нумеруем их заново.

В случае, когда рассматривается пространство вектор-функций размерности m с элементами из пространства X, иногда пишут X^m. Мы не будем указывать размерность, она всегда будет ясна из контекста. Норму вектор-функции $f=(f_1, \ldots, f_m)$ можно определять равенствами

$$\|f\|=[\|f_1\|^p+\ldots+\|f_m\|^p]^{1/p}$$

с любым $p\geqslant 1$, эти нормы эквивалентны.

Интеграл без указания множества, по которому производится интегрирование, берется по $\mathbb{R}^n$.

Наши обозначения для производных: $D_j=-i\partial/\partial x_j=-i\partial_j$.

Глава I

Пространства H^s

§1. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$

1.1. Определение и простейшие свойства. Исходным будем считать следующее определение *пространства* $H^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n_x)$ *бесселевых потенциалов*. Пусть s — вещественное число. Введем сначала пространство $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)$ измеримых по Лебегу комплекснозначных функций $\widehat{u}(\xi)$, для которых конечна величина

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{1.1.1}$$

Это линеал в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$ обобщенных функций умеренного роста (см., например, [2, п. 3.1]). Пространство $H^s(\mathbb{R}^n_x)$ состоит из таких обобщенных функций $u \in \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, что преобразование Фурье

$$\widehat{u}(\xi) = Fu(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot x} u(x) \, dx \tag{1.1.2}$$

в смысле обобщенных функций (см. [2, п. 5.2]) принадлежит $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)$. Величина (1.1.1) принимается за квадрат нормы в $H^s(\mathbb{R}^n_x)$ и одновременно в $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)$:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n_x)} = \|\widehat{u}\|^2_{\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)} = \int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{1.1.3}$$

Очевидно, что $H^s(\mathbb{R}^n)$ — линейное нормированное пространство. Его образ Фурье $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ — это весовое пространство типа L_2. Такое пространство, как известно, полно и, значит, банахово. (См., например, [17, т. I, гл. III, п. 6].) Поэтому и $H^s(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство. Более того, как и $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$, это *гильбертово пространство* со скалярным произведением

$$(u, v)_{s,\mathbb{R}^n_x} = (\widehat{u}, \widehat{v})_{s,\mathbb{R}^n_\xi} = \int (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} \, d\xi. \tag{1.1.4}$$

Индекс $s = 0$ будем опускать.

Очевидно, что $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)}$ при $s < \sigma$, так что пространство с бо́льшим индексом непрерывно вложено в пространство с меньшим индексом. Пространство $H^0(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^n)$ в силу равенства Парсеваля[1]

$$\int |Fu|^2\,d\xi = (2\pi)^n \int |u|^2\,dx \tag{1.1.5}$$

(нормы при этом совпадают с точностью до несущественного числового множителя). Поэтому *все пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ с неотрицательным s состоят из обычных квадратично интегрируемых*, т. е. интегрируемых с квадратом модуля, *комплекснозначных функций*. Дельта-функция $\delta(x)$, поскольку ее преобразование Фурье — единица ([2, п. 5.2]), принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $s < -n/2$.

Далее, у функций из $H^1(\mathbb{R}^n)$ производные первого порядка в смысле обобщенных функций принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Действительно, $D_j u(x) = -i\partial u(x)/\partial x_j$ — обратное преобразование Фурье от квадратично интегрируемой функции $\xi_j \widehat{u}(\xi)$ (см. [2, § 5]). Мы можем поэтому дать второе определение пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$: оно состоит из таких функций $u(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$, что все их первые производные $D_j u(x)$ в смысле обобщенных функций тоже являются функциями из $L_2(\mathbb{R}^n)$; при этом норма определяется формулой

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int \left[|u(x)|^2 + \sum_1^n |D_j u(x)|^2 \right] dx. \tag{1.1.6}$$

Совпадение этой формулы с (1.1.3) при $s = 1$ с точностью до числового множителя следует из равенства Парсеваля.

Более общий и легко проверяемый факт состоит в следующем.

Теорема 1.1.1. *При натуральном m пространство $H^m(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких квадратично интегрируемых функций, что их производные в смысле обобщенных функций до порядка m включительно — квадратично интегрируемые функции. При этом норму в $H^m(\mathbb{R}^n)$ можно определить равенством*

$$\|u\|'^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \int \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u(x)|^2\,dx. \tag{1.1.7}$$

Соответствующее скалярное произведение имеет вид

$$(u, v)'_{m,\mathbb{R}^n} = \int \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha u(x) \cdot \overline{D^\alpha v(x)}\,dx. \tag{1.1.8}$$

[1] Множитель $(2\pi)^n$ станет ненужным (и преобразование Фурье станет унитарным), если в формуле (1.1.2) написать $(2\pi)^{-n/2}$ перед знаком интеграла. Но мы придерживаемся обозначений в [13] и [2].

Как в [2] и во многих других книгах,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}.$$

Нормы $\|u\|'_m$ *и* $\|u\|_m$ *эквивалентны*, это следует из очевидного неравенства

$$0 < C_1 \leqslant \frac{\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2}{(1+|\xi|^2)^m} \leqslant C_2, \tag{1.1.9}$$

где $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ и постоянные C_1 и C_2 не зависят от ξ.

Именно так соболевские пространства $H^m = W_2^m$ натурального порядка m были введены в [2, п. 3.6]. По существу это и есть определение С. Л. Соболева (у него m целое неотрицательное, но он рассматривал также пространства W_p^m с целым неотрицательным m и $p > 1$, о которых мы будем говорить в § 14).

Отметим еще одну возможность, состоящую в том, что в суммах справа в (1.1.7) и (1.1.8) оставляются только слагаемые с $\alpha = (0, \ldots, 0)$, $(m, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, m)$. Такое определение тоже эквивалентно исходному.

Замечания. 1. Из (1.1.9) следует также, что *любой оператор в частных производных с постоянными коэффициентами порядка m действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при любом* $s \in \mathbb{R}$. Немного дальше, в п. 1.9, мы обобщим это утверждение на операторы с «достаточно хорошими» переменными коэффициентами.

2. Как видно из определения, при нецелом положительном s, $s = m + \theta$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \theta < 1$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех функций, принадлежащих $H^m(\mathbb{R}^n)$, у которых производные порядка m принадлежат $H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Проверьте, что нормы в $H^s(\mathbb{R}^n)$ инвариантны относительно сдвигов: для $u_h(x) = u(x+h)$

$$\|u_h\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{и} \quad \|u_h\|'_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \|u\|'_{H^m(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1.10}$$

Положим

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap H^s(\mathbb{R}^n), \quad H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcup H^s(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.11}$$

1.2. Теоремы вложения. Из сказанного выше видно, что элементы пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ тем «лучше», чем больше s. Еще более отчетливо это видно из *теорем вложения*, доказанных С. Л. Соболевым для натуральных s. Простейшая теорема вложения состоит в следующем.

Теорема 1.2.1. *Пусть s вещественно и $s > n/2$. Тогда любая функция $u(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и ограничена после, возможно, исправления на множестве нулевой лебеговой меры. При этом справедливо неравенство*

$$\sup |u(x)| \leqslant C_1 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.1}$$

с не зависящей от $u(x)$ постоянной C_1. Более того, при

$$0 < \vartheta < s - n/2, \quad \vartheta < 1 \tag{1.2.2}$$

функция $u(x)$ удовлетворяет равномерному условию Гёльдера порядка ϑ. При этом

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\vartheta} \leqslant C_2 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.3}$$

с не зависящей от u постоянной C_2.

Доказательство. При сделанных предположениях преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi)$ функции $u(x)$ — суммируемая функция: в силу неравенства Шварца

$$\int |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi \leqslant \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2} \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}\, d\xi\right)^{1/2} = \\ = C_3 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.2.4}$$

так как последний интеграл сходится. Поэтому почти всюду

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{1.2.5}$$

Действительно, $u(x)$ как обобщенная функция восстанавливается по своему преобразованию Фурье формулой (см. п. 5.2 в [2])

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle \widehat{u}, F^{-1}[\varphi]\rangle = \int \widehat{u}(\xi) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \varphi(x)\, dx\, d\xi.$$

Здесь φ — любая функция из пространства Шварца $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих со всеми производными бесконечно гладких функций [2]. В правой части можно поменять местами интегралы по теореме Фубини:

$$\langle u, \varphi\rangle = \int \varphi(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi)\, d\xi\, dx,$$

и видно, что функция $u(x)$ должна совпадать с правой частью в (1.2.5) почти всюду. Теперь можно воспользоваться известным фактом из анализа: (обратное) преобразование Фурье от суммируемой функции — непрерывная ограниченная функция. Это, впрочем, легко проверяется. Более того, из (1.2.5) и (1.2.4) следует (1.2.1).

Для проверки равномерной непрерывности функции $u(x)$ можно использовать оценку

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int |e^{i(x-y)\cdot\xi}-1||\widehat{u}(\xi)|\,d\xi.$$

Разобьем интеграл справа на интеграл по шару

$$O_R(0)=\{\xi : |\xi| \leqslant R\}$$

и по его дополнению. При заданном $\varepsilon>0$ интеграл по дополнению меньше $\varepsilon/2$, если R достаточно велико (см. (1.2.4)). При фиксированном R интеграл по шару меньше $\varepsilon/2$, если модуль $|x-y|$ достаточно мал.

Равномерная непрерывность следует, конечно, и из неравенства (1.2.3). Для его проверки заметим, что

$$\begin{aligned} |e^{iz\cdot\xi}-1|^2 &= [\cos(z\cdot\xi)-1]^2+\sin^2(z\cdot\xi) = \\ &= 2-2\cos(z\cdot\xi) = 4\sin^2[(z\cdot\xi)/2]. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Поэтому

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\vartheta} \leqslant (2\pi)^{-n}\int \frac{2|\sin[(x-y)\cdot\xi/2]|}{|x-y|^\vartheta|\xi|^\vartheta}|\xi|^\vartheta|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi. \tag{1.2.7}$$

Легко проверяется, что дробь под знаком интеграла ограничена постоянной:

$$\frac{2|\sin[(x-y)\cdot\xi/2]|}{|x-y|^\vartheta|\xi|^\vartheta} \leqslant C_4. \tag{1.2.8}$$

Действительно, для этого достаточно воспользоваться неравенством $|\sin t|\leqslant|t|$ при $|t|\leqslant\pi/2$ и неравенством $|\sin t|\leqslant 1$ при остальных $|t|$. Остается учесть, что в силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned} &\int(1+|\xi|^2)^{\vartheta/2}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \leqslant \\ &\qquad \leqslant \Big(\int(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int(1+|\xi|^2)^{-s+\vartheta}\,d\xi\Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

где по предположению $-s+\vartheta<-n/2$. □

Задача 1. Дополнительно покажите, используя аппроксимацию функции $\widehat{u}(\xi)$ в $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ финитными гладкими функциями, что при предположениях теоремы $u(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Пример. Убедимся в точности условия $s > n/2$ следующим образом. Пусть $n = 1$, $s = 1/2$. Рассмотрим семейство функций $u_t(x)$ с преобразованиями Фурье $\widehat{u}_t(\xi) = (1 + |\xi|)^{-t}$, $t > 1$. Все эти функции принадлежат $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Для этого семейства функций неравенство (1.2.1) с $s = 1/2$ неверно. Действительно, так как функции $\widehat{u}_t(\xi)$ абсолютно интегрируемы, то

$$u_t(0) = (2\pi)^{-1} \int (1 + |\xi|)^{-t}\, d\xi.$$

С точностью до постоянного множителя эта величина равна $(t-1)^{-1}$. С другой стороны, квадрат нормы функции $u_t(x)$ в $H^{1/2}(\mathbb{R})$ имеет тот же порядок при $t \to 1$. Действительно, соответствующий интеграл

$$\int (1 + |\xi|^2)^{1/2} (1 + |\xi|)^{-2t}\, d\xi$$

легко вычисляется, если в нем заменить $1 + |\xi|^2$ на $(1 + |\xi|)^2$, и он имеет порядок $(t-1)^{-1}$. Остается заметить, что неравенство

$$(t-1)^{-1} \leqslant C(t-1)^{-1/2}$$

с любой постоянной C неверно, конечно, при малых $t - 1$.

Введем *пространства* $C_b^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geqslant 0$. Пространство $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ с целым неотрицательным $s = m$ состоит из функций с непрерывными и ограниченными производными до порядка m включительно и нормой

$$\|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} = \sup |D^\alpha u(x)|, \tag{1.2.9}$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \mathbb{R}^n$ и всем α с $|\alpha| \leqslant m$. Пространство $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \vartheta < 1$, называемое *пространством Гёльдера,* состоит из всех функций пространства $C_b^m(\mathbb{R}^n)$, у которых старшие производные удовлетворяют равномерному условию Гёльдера порядка ϑ; норма в $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|u\|_{C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} + \sup \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\vartheta}, \tag{1.2.10}$$

где верхняя грань берется по всем x и y, $x \neq y$, и всем α с $|\alpha| = m$. При $s = 0$ будем писать $C_b(\mathbb{R}^n)$. Наш значок $_b$ указывает на равномерную ограниченность. Если он опущен, то имеются в виду все функции указанной гладкости в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Пространства $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$ обозначают также через $C_b^{m,\vartheta}(\mathbb{R}^n)$. Последнее пространство определяется и при $\vartheta = 1$: оно состоит из функций $u(x)$, принадлежащих $C_b^m(\mathbb{R}^n)$, производные порядка m которых удовлетворяют равномерному *условию Липшица* — условию Гёльдера порядка 1. Норма в нем определяется формулой (1.2.10) с $\vartheta = 1$. Согласно известной теореме функция, удовлетворяющая условию Липшица, почти всюду дифференцируема и имеет ограниченные первые производные. (Мы докажем эту теорему в § 9.) Поэтому функции из $C_b^{m,1}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду имеют производные порядка $m+1$ и эти производные ограничены.

Утверждению теоремы 1.2.1 можно придать следующую форму: *при $s \geqslant n/2 + \theta$, где $0 < \theta < 1$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^{\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, если $0 < \vartheta < \theta$.* Легко получается следующее обобщение.

Теорема 1.2.2. *Пусть $s \geqslant n/2 + m + \theta$, где m — целое неотрицательное число и $0 < \theta < 1$. Тогда пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$ при $0 < \vartheta < \theta$.*

Здесь, как и раньше и позже в подобных утверждениях, подразумевается возможное исправление функций на множестве нулевой меры.

Задача 2. Проверьте утверждение теоремы 1.2.2.

Замечание. Этим результатам можно придать и такую форму. *При $s > n/2 + t$, где $t > 0$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^t(\mathbb{R}^n)$.*

Но это утверждение можно усилить: *если t нецелое, то непрерывное вложение имеет место и при $s = n/2 + t$.* См. [52, п. 2.8.1]. Доказательство требует привлечения дополнительных технических средств, и мы не будем его воспроизводить.

Следствие 1.2.3. *Если u принадлежит $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, то это бесконечно гладкая функция с ограниченными квадратично интегрируемыми производными всех порядков после, возможно, исправления этой функции на множестве нулевой меры.*

Следующую теорему для натуральных s тоже доказал С. Л. Соболев.

Теорема 1.2.4. *Пусть $0 < s < n/2$ и*

$$s \geqslant \frac{n}{2} - \frac{n}{p}, \quad 2 < p < \infty. \tag{1.2.11}$$

Тогда пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Это означает, что

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2.12}$$

Доказательство этой теоремы в несколько ослабленной формулировке (со строгим неравенством для s в (1.2.11)) мы наметим в п. 1.15 со ссылкой на неравенство Юнга, которое получим в п. 13.2 из интерполяционных соображений. Элементарные свéдения о пространствах L_p помещены в п. 13.1. Сейчас и в п. 1.15 достаточно знать, что $L_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leqslant p < \infty$ — банахово пространство с нормой слева в (1.2.12) и что в нем плотно множество финитных гладких функций.

1.3. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ отрицательного порядка.

Теорема 1.3.1. *При натуральном m пространство $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ состоит из конечных сумм производных до порядка m включительно в смысле обобщенных функций от функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Как мы уже отметили в конце п. 1.1, дифференцирование порядка m переводит функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в функции из $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{u}(\xi) = Fu$. Тогда

$$w(\xi) = (1 + |\xi_1|^m + \ldots + |\xi_n|^m)^{-1}\widehat{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

так как

$$0 < C_1 \leqslant \frac{1 + |\xi_1|^m + \ldots + |\xi_n|^m}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \leqslant C_2$$

с не зависящими от ξ постоянными. Значит,

$$\widehat{u}(\xi) = w(\xi) + \xi_1^m w_1(\xi) + \ldots + \xi_n^m w_n(\xi)$$

почти всюду, где $w_j(\xi) = (|\xi_j|/\xi_j)^m w(\xi)$ при $\xi_j \neq 0$ и $w_j(\xi) = 0$ в противном случае. Функции w_j принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$u = u_0 + D_1^m u_1 + \ldots + D_n^m u_n$$

в смысле обобщенных функций, где все функции $u_j(x)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. □

Следствие 1.3.2. *Пространство $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ содержит все обобщенные функции с компактными носителями.*

Действительно, непрерывная функция с компактным носителем принадлежит, конечно, $L_2(\mathbb{R}^n)$, так что достаточно воспользоваться теоремой о структуре финитной обобщенной функции: это конечная сумма производных некоторых порядков (в смысле обобщенных функций) от финитных непрерывных функций ([2, теорема 1.9.3]).□

1.4. Изометрические изоморфизмы Λ^t. Следующее предложение — модель для некоторых теорем теории эллиптических операторов в § 6 и [3]. Через I обозначаем единичный оператор, через Δ — оператор Лапласа.

Теорема 1.4.1. *Оператор $I-\Delta$ изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ при любом s.*

Точнее, изометрия имеет место при нашем первоначальном определении пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$. Действительно, в образах Фурье оператор $I-\Delta$ действует как умножение на $1+|\xi|^2$. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ очень удобны для рассмотрения этого оператора. В [3] мы увидим, что они удобны и при построении общей теории эллиптических псевдодифференциальных операторов.

Вот ближайшее и очевидное обобщение.

Теорема 1.4.2. *Пусть s и t — любые вещественные числа. Тогда оператор*

$$\Lambda^t = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{t/2}F \tag{1.4.1}$$

изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$. Обратным к нему является оператор Λ^{-t}.

Как видно из нашего обзора в п. 17.4, оператор (1.4.1) — это пример эллиптического псевдодифференциального оператора порядка t. Он на самом деле является степенью порядка $t/2$ оператора $1-\Delta$. В частности, $\Lambda^2=-\Delta+1$.

Функцию $\Lambda^t g$, где $g\in L_2(\mathbb{R}^n)$, по крайней мере при отрицательных t, иногда называют *бесселевым потенциалом порядка t*. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как $\Lambda^{-s}L_2(\mathbb{R}^n)$ — образ пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ при действии на него оператора Λ^{-s}. Видимо, в связи с этим пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и называют пространствами бесселевых потенциалов. Более общие пространства H^s_p бесселевых потенциалов будут рассмотрены в § 14. У этих пространств есть, впрочем, и другие названия, мы их там укажем.

1.5. Плотные подмножества. Пространство $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ содержится, конечно, во всех пространствах $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.5.1. *При любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пополнением пространства $\mathcal{S}$ по норме $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.*

Доказательство. Пусть $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n_\xi)$ и может быть там приближена финитными бесконечно гладкими функциями $v_k(\xi)$. Запишем v_k в виде

$$v_k(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2} w_k(\xi), \quad \text{где } w_k(\xi) = \frac{v_k(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}.$$

Конечно, $w_k(\xi)$ — тоже финитные бесконечно гладкие функции, и они сходятся к $\widehat{u}(\xi)$ в пространстве $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Их прообразы Фурье заведомо принадлежат $\mathcal{S}$ и сходятся к u в $H^s(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Следствие 1.5.2. *Если $\sigma > s$, то пространство $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Усилим утверждение теоремы 1.5.1.

Теорема 1.5.3. *При любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ является пополнением линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по норме в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что любую функцию $u(x)$ из $\mathcal{S}$ можно аппроксимировать финитными бесконечно гладкими функциями по норме в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Более того, достаточно показать это при натуральном s, что мы сейчас и сделаем. Пусть $\varphi(x)$ — функция из $\mathcal{D}$, равная 1 при $|x| \leqslant 1$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = u(x)\varphi(\varepsilon x).$$

Тогда $u_\varepsilon \to u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$, и при любом α, $0 < |\alpha| \leqslant s$,

$$D^\alpha[u_\varepsilon(x) - u(x)] = \\ = D^\alpha u(x) \cdot [\varphi(\varepsilon x) - 1] + \sum c_{\beta\gamma} D^\beta u(x) \cdot D^\gamma \varphi(\varepsilon x), \quad (1.5.1)$$

где $\alpha = \beta + \gamma$ и $\gamma \neq 0$. Так как

$$D^\gamma \varphi(\varepsilon x) = \varepsilon^{|\gamma|} (D^\gamma \varphi)(\varepsilon x),$$

то ясно, что правая часть в (1.5.1) стремится к 0 в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, $u_\varepsilon \to u$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Мы видим, что *при любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как пополнение линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме в этом пространстве.*

Эти утверждения будут дополнены в п. 1.11.

Задача. Проверьте, что если $s > 0$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u_k \to u$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, то $D^\alpha u_k \to D^\alpha u$ в $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant s$. (См. замечание 1 в п. 1.1.)

1.6. Линейные непрерывные функционалы над $H^s(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим вопрос об описании, или реализации, пространства, сопряженного к пространству $H^s(\mathbb{R}^n)$, т. е. пространства линейных непрерывных функционалов над $H^s(\mathbb{R}^n)$. Таких реализаций имеется две.

Первая состоит в том, что, поскольку $H^s(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением (1.1.4), *общий вид линейного непрерывного функционала $f(u)$ над $H^s(\mathbb{R}^n)$ есть*

$$f(u) = (u, v)_{s,\mathbb{R}^n}, \tag{1.6.1}$$

где v — любой фиксированный элемент из $H^s(\mathbb{R}^n)$, он однозначно определяется по f.

Вторая состоит в использовании *двойственности между $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$*. Дело в том, что *форма $(u, v)_{\mathbb{R}^n} = (u, v)_{0,\mathbb{R}^n}$* на $H^0(\mathbb{R}^n)$ (индекс 0 у формы будем опускать) *продолжается на прямое произведение $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ по формуле*

$$(u, v)_{\mathbb{R}^n} = \int \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi \tag{1.6.2}$$

и при этом так продолженная форма удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца

$$|(u, v)_{\mathbb{R}^n}| \leqslant \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.6.3}$$

Последнее получается применением к

$$\int \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \cdot (1+|\xi|^2)^{-s/2} \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi$$

обычного неравенства Шварца.

Теорема 1.6.1. *При любом s каждый линейный непрерывный функционал $f(u)$ над $H^s(\mathbb{R}^n)$ может быть представлен в виде*

$$f(u) = (u, w)_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.6.4}$$

где w — элемент из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, однозначно определяемый по f. И обратно, при любом $w \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ выражение (1.6.4) *есть линейный непрерывный функционал над $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Чтобы проверить первое, положим $u_1 = \Lambda^s u$ (см. (1.4.1)). Тогда $u_1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$ и $g(u_1) = f(u)$ — линейный непрерывный функционал над $H^0(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$f(u) = \int \widehat{u}_1(\xi) \overline{\widehat{v}_1(\xi)}\, d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}_1(\xi)}\, d\xi,$$

где $v_1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$. Отсюда видно, что

$$f(u) = (u, w)_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{где } w = \Lambda^s v_1 \in H^{-s}(\mathbb{R}^n). \qquad \square$$

Замечание. Очевидно, что эти две реализации одного и того же линейного непрерывного функционала над $H^s(\mathbb{R}^n)$ связаны следующим образом:

$$(u, v)_{s,\mathbb{R}^n} = (u, w)_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{где } w = \Lambda^{2s} v. \tag{1.6.5}$$

Отметим еще, что в отличие от [2] мы теперь как правило будем пользоваться скалярными произведениями, т. е. полуторалинейными формами, а не билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Можно было бы и не устраивать таких различий при изложении теории обобщенных функций и теории пространств типа Соболева, но так будет ближе к традиции.

1.7. Нормы дробного положительного порядка. Как мы видели, при натуральных s в $H^s(\mathbb{R}^n)$ есть норма, которая записывается без преобразования Фурье. Сейчас мы укажем такую норму для нецелых положительных s.

Теорема 1.7.1. *Пусть $s = m + \theta$, где m — целое неотрицательное число и $0 < \theta < 1$. Тогда норма в $H^s(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна норме, определяемой равенством*

$$\|u\|'^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|'^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy. \tag{1.7.1}$$

Пространства $H^s(\mathbb{R}^n) = W_2^s(\mathbb{R}^n)$ с нецелыми $s > 0$ как пространства с нормами (1.7.1) ввел Л. Н. Слободецкий [160]. Эти нормы тоже инвариантны относительно сдвигов.

Доказательство теоремы. Рассмотрим случай $m = 0$ и вычислим интеграл

$$\iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy \tag{1.7.2}$$

через преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi)$ функции $u(x)$, считая ее финитной и бесконечно гладкой. Результат, который нужно получить, приведен ниже в формуле (1.7.5). Интеграл (1.7.2) абсолютно сходится, так как на компакте $\operatorname{supp} u(x) \times \operatorname{supp} u(y)$ особенность при $x = y$ интегрируема (имеет с учетом гладкости $u(x)$ порядок $n - 2 + 2\theta$), а вне этого множества интегрируемы $|u(x)|^2 |x-y|^{-n-2\theta}$

и $|u(y)|^2|x-y|^{-n-2\theta}$. Полагая $y=x+z$, перепишем этот интеграл в виде «повторного» интеграла

$$\int \frac{1}{|z|^{n+2\theta}}\,dz \int |u(x)-u(x+z)|^2\,dx. \tag{1.7.3}$$

Внутренний интеграл в силу равенства Парсеваля (1.1.5) равен с точностью до постоянного множителя

$$\int |1-e^{iz\cdot\xi}|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Здесь согласно формуле (1.2.6)

$$|1-e^{iz\cdot\xi}|^2 = 4\sin^2[(z\cdot\xi)/2].$$

Подставив все это в (1.7.3) и изменив порядок интегрирования по теореме Фубини, рассмотрим получающийся интеграл

$$4\int |\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \int \frac{\sin^2[(z\cdot\xi)/2]}{|z|^{n+2\theta}}\,dz. \tag{1.7.4}$$

Здесь внутренний интеграл запишем в виде

$$\int \sin^2\left(\frac{1}{2}|z||\xi|\cos\varphi\right)\frac{dz}{|z|^{n+2\theta}},$$

где φ — угол между векторами z и ξ. Перейдем к сферическим координатам: $z=r\omega$, $|\omega|=1$, $dz=r^{n-1}dr\,dS$. Получим «повторный» интеграл

$$\int\limits_S dS \int\limits_0^\infty \sin^2\left(\frac{1}{2}r|\xi|\cos\varphi\right)\frac{dr}{r^{1+2\theta}},$$

где S — единичная сфера. Здесь во внутреннем интеграле сделаем замену $\frac{1}{2}r|\xi|\cos\varphi=\tau$ (перейдем от переменного r к переменному τ). Получим

$$2^{-2\theta}|\xi|^{2\theta} \int\limits_S \cos^{2\theta}\varphi\,dS \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2\tau}{\tau^{1+2\theta}}d\tau = C'_\theta|\xi|^{2\theta},$$

где постоянная C'_θ не зависит от ξ. Мы показали, что

$$\iint \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy = 4C_\theta\int |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi, \tag{1.7.5}$$

где постоянная C_θ тоже не зависит от ξ. Этот результат предельным переходом распространяется на $u\in H^\theta(\mathbb{R}^n)$. Этим теорема фактически доказана для $m=0$. На ненулевые m она распространяется очевидным образом. □

Задача. Напишите скалярное произведение, отвечающее норме (1.7.1).

1.8. Оценки промежуточных норм.

Предложение 1.8.1. *Пусть $\tau < s < \sigma$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 0$, что для функций $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \|u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \|u\|_{H^\tau(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.8.1}$$

Доказательство. Эквивалентное утверждение состоит в справедливости оценки вида

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon^2 \|u\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)} + C'_\varepsilon \|u\|^2_{H^\tau(\mathbb{R}^n)} \tag{1.8.2}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Последняя получается из очевидного факта: при заданном $\varepsilon > 0$ найдется такое C'_ε, что

$$(1 + |\xi|^2)^s \leqslant \varepsilon^2 (1 + |\xi|^2)^\sigma + C'_\varepsilon (1 + |\xi|^2)^\tau. \qquad \square$$

1.9. Мультипликаторы. Теперь мы обсудим условия, достаточные для того, чтобы оператор умножения на функцию $a(x)$ был ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$, т. е. чтобы она была мультипликатором в этом пространстве, и выясним, как оценивается его норма.

Общеизвестно, что *в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ограничен оператор умножения на ограниченную измеримую функцию, а его норма не превосходит верхней грани модуля этой функции*. Ее, конечно, достаточно считать ограниченной в существенном, т. е. ограниченной вне множества нулевой меры. Из сказанного сразу получается (с использованием формулы Лейбница для производной произведения)

Теорема 1.9.1. *Пусть m — натуральное число и функция $a(x)$ принадлежит $C_b^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^m(\mathbb{R}^n)$. При этом*

$$\|au\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \sup |a(x)| \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|a\|_{C_b^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.9.1}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят ни от u, ни от a.

В частности, для ограниченности этого оператора достаточно, чтобы функция $a(x)$ принадлежала пространству $C_b^m(\mathbb{R}^n)$. Теперь рассмотрим нецелые s.

Теорема 1.9.2. *Пусть m — целое неотрицательное число и $s = m + \theta$, $0 < \theta < 1$. Пусть функция $a(x)$ принадлежит пространству $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n) = C_b^{m,\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, где $\vartheta \in (\theta, 1)$. Тогда оператор умножения на*

$a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$. При этом

$$\|au\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant C_1 \sup|a(x)| \|u\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} + C_2\|a\|_{C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.9.2)$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят ни от u, ни от a.

Доказательство проведем для $m=0$. Предполагая, что $u \in \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$, надо оценить величину

$$\iint \frac{|a(x)u(x)-a(y)u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy \quad (1.9.3)$$

через $\|u\|^2_{H^\theta(\mathbb{R}^n)}$. Ясно, что

$$|a(x)u(x)-a(y)u(y)|^2 \leqslant \\ \leqslant 2|a(x)[u(x)-u(y)]|^2 + 2|[a(x)-a(y)]u(y)|^2.$$

Поэтому величина (1.9.3) не превосходит

$$2\sup|a(x)|^2\|u\|^2_{H^\theta(\mathbb{R}^n)} + 2\int|u(y)|^2 I(y)\,dy,$$

где

$$I(y) = \int \frac{|a(x)-a(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx, \quad (1.9.4)$$

и дело сводится к оценке этого интеграла через $\|a\|^2_{C_b^\vartheta(\mathbb{R}^n)}$. Пусть $C_1>0$. Подынтегральное выражение не превосходит $C_2'|x-y|^{-n+2(\vartheta-\theta)}$ при $|x-y|\leqslant C_1$ и $C_3'|x-y|^{-n-2\theta}$ при $|x-y|\geqslant C_1$, где C_2' и C_3' пропорциональны $\|a\|^2_{C_b^\vartheta(\mathbb{R}^n)}$, что и дает нужную оценку. □

С учетом предложения 1.8.1 из (1.9.2) следует, что при любом $\varepsilon>0$ найдется постоянная $C_3(\varepsilon)$, с которой

$$\|au\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} \leqslant (C_1\sup|a(x)|+\varepsilon)\|u\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} + C_3(\varepsilon)\|u\|_{H^0(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.9.5)$$

В приведенных теоремах интересны, во-первых, достаточная гладкость мультипликатора, во вторых, коэффициент «главной части» в оценке его нормы.

Условие ограниченности и непрерывности функции $a(x)$ с производными до порядка m включительно достаточно, конечно, для ограниченности оператора умножения на $a(x)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при нецелых $s\in(0,m)$.

Для целей теории эллиптических уравнений в главе II нужно несколько развить полученный результат.