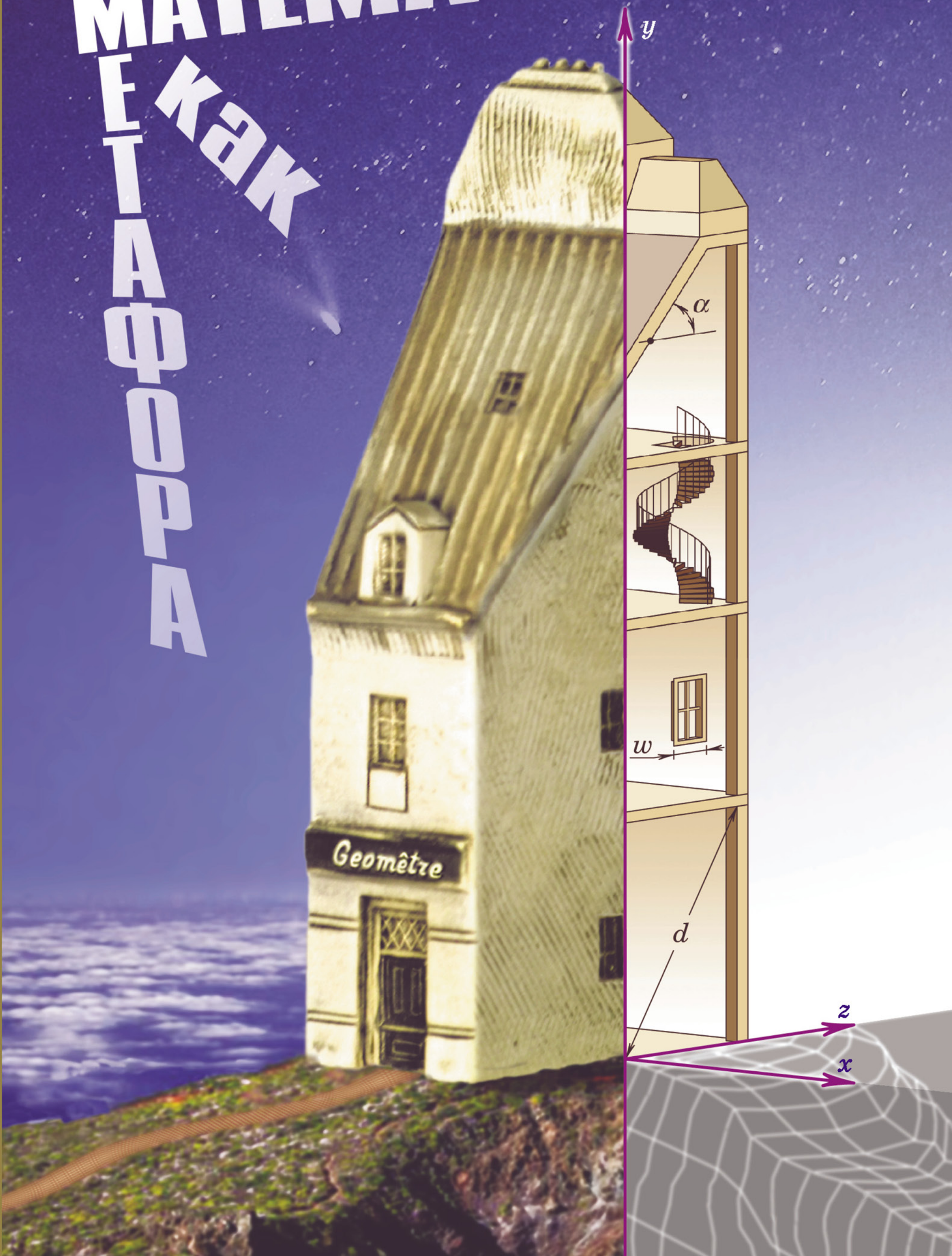
Ю. И. Манин

МАТЕМАТИКА как МЕТАФОРА



УДК 51(019)
ББК 22.1г
М23

Манин Ю. И.
Математика как метафора
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
424 с.
ISBN 978-5-4439-2074-0

В книге Ю. И. Манина собраны написанные и опубликованные в разные годы очерки по истории и философии математики и физики, теории культуры и языка, а также впервые публикуемые отрывки из воспоминаний, стихи и стихотворные переводы.

Первое издание книги вышло в 2008 году.

Подготовлено на основе книги: *Манин Ю. И.* Математика как метафора. 2-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2010. — 379 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2074-0

Оглавление

Доказательство существования (*вместо предисловия*)

Памяти моих родителей

В этой книге собраны примерно два десятка моих «нетехнических» текстов, по большей части написанных и опубликованных за последние тридцать лет. Жанр ее, по старинному выражению, — *маргиналии*, заметки на полях, наброски мыслей, подготовительные черновики, не превратившиеся в теоремы, определения, романы или философские трактаты.

Математика, прекрасное ремесло, которым я занимался всю жизнь, служит здесь не только поводом для нематематических размышлений, но и метафорой человеческого существования. Не следует понимать эту фразу эзотерически. Математиков мало в каждом поколении, и они общаются часто над головами современников и через прошедшие десятилетия и столетия, как это делают поэты, музыканты, философы.

Сопровождающее такую жизнь чувство, «одиночество бегуна на длинную дистанцию», разные люди компенсируют по-разному. Я с детства любил чтение обильное и беспорядочное.

* * *

Большая часть того, что меня занимало в математике, связана с алгебраической геометрией. Ее основная тема — изучение решений систем полиномиальных уравнений со многими неизвестными. Если уравнения выбраны и зафиксированы, мы представляем себе множество всех их решений, состоящее из n-ок комплексных чисел, в виде геометрического образа, формы, размещенной в n-мерном (или $2n$-мерном) пространстве. В одних направлениях эта форма уходит в бесконечность, а в других прихотливо замыкается на себе. Разнообразие и сложность таких форм бесконечно богаче, чем все, что можно увидеть на современных выставках абстрактного искусства. Математики научились находить регулярности, взаимосвязи и закономерности в этом огромном мире.

Меня больше всего привлекали приложения алгебраической геометрии к теории чисел и к физике. Одна из старейших задач теории чисел, восходящая к Древней Греции и до сих пор носящая имя Диофанта Александрийского (около 300 года нашей эры), также касается решений полиномиальных уравнений, но на этот раз мы постулируем, что коэффициенты полиномов суть целые числа, и спрашиваем:

Существуют ли решения, у которых все координаты тоже целые (или рациональные)? Насколько их много?

На заре нашей науки, когда математики античности только учились ставить такие вопросы и находить на них ответы, даже простейшие уравнения приносили глубокие озарения. Тот факт, что уравнение $x^2-2y^2=0$ не имеет других целочисленных решений, кроме $x=y=0$, открыл глаза на то, что мир геометрических величин много больше мира «рационально измеримых» величин (диагональ квадрата несоизмерима с его стороной). По существу, евклидова геометрия была также началом теоретической физики — кинематики идеально твердых тел в двумерном или трехмерном гравитационном вакууме, — а попытки связать формы с числами привели много позже к кристаллизации алгебраического, аналитического и вычислительного аппарата физики. Диагональ единичного квадрата $\sqrt{2}$, сторона куба с объемом 2 ($\sqrt[3]{2}$) и длина окружности единичного диаметра π были изначально физическими константами, а привычные нам вещественные числа в истории математики медленно осознавались как огромное потенциальное вместилище для значений всех физических величин. Целых и рациональных чисел для познания мира не хватало.

С другой стороны, для описания и физического мира, и мира идей, для передачи от учителя к ученику того, что уже понято, для сохранения от забвения в следующих поколениях, люди нуждались в словах, символах, знаках, в жестких правилах для обращения с ними. Силлогизмы Аристотеля оказались таким же зачатком теории языка науки, как пифагорейские открытия — зачатком теоретической физики. Медленно, через схоластов, Лейбница, Буля, Гёделя, фон Неймана и многих других, развивалось осознание того, что с текстами на языке науки можно обращаться так же, как с целыми числами.

Теория познания, принадлежа философии, находится за пределами нашего обсуждения, но можно вообразить и ее технические задачи, скажем, *можно ли из данного компендиума знаний логически извлечь ответ на новый вопрос, или это требует расширения базы знаний?*

Через две с лишним тысячи лет после Диофанта и Пифагора выяснилось, что в принципе любая такая задача сводится к одной, которую мы уже сформулировали: *есть ли решение у данной системы диофантовых уравнений?*

* * *

Взаимодействие алгебраической геометрии с теорией чисел привело к пониманию удивительного и фундаментального принципа: ответы на диофантовы вопросы о системе уравнений критически зависят от геометрической формы пространства всех комплексных решений этой системы.

Например, пространство всех комплексных решений может выглядеть (топологически) как сфера, или тор, или сфера с несколькими ручками. Количество ручек называется *родом*, это очень устойчивый инвариант системы уравнений, и кажется, что он имеет мало общего с арифметическими тонкостями и дискретными точками решетки целочисленных векторов (в проективном пространстве различие между целыми и рациональными точками стирается).

Тем не менее, род определяет, когда множество всех рациональных решений может быть бесконечным: *только если ручек не больше одной*.

Это — содержание знаменитой гипотезы Морделла, которой я занимался в шестидесятые годы. Позже я попытался наметить контуры программы, которая прояснила бы взаимоотношения между геометрическими и диофантовыми свойствами в любой размерности.

В рабочий инструментарий теоретической физики до недавнего времени входили только рудименты алгебраической геометрии. Положение стало меняться в шестидесятые годы прошлого века, когда аппарат квантовой теории поля и особенно теории струн вывел алгебраическую геометрию на первый план.

Привычный образ мировой линии точечной элементарной частицы был замещен образом мирового листа маленькой струны. Такой лист выглядит как (риманова) поверхность, и ее род — число ручек — соответствует числу петель в выражениях для фейнмановских амплитуд, которые с сороковых годов стали центральным теоретическим и вычислительным средством квантовой физики.

Мне удалось вычислить так называемую меру Полякова на пространстве модулей (параметров) римановых поверхностей, знание которой необходимо для вычисления фейнмановских интегралов. Оказалось, что она строится из тех же арифметических компонент, которые играли центральную роль в полном доказательстве гипотезы Морделла, незадолго до того полученном Гердом Фальтингсом.

Контрапункт этих двух тем — языка и геометрии, теории чисел и физики, логики и интуиции — постоянно возникает в физико-математических частях книги.

* * *

Во второй половине прошлого века взаимный интерес гуманитариев и математиков друг к другу создавал атмосферу, в которой могло начаться сотрудничество. Разрыв «двух культур» (Ч. П. Сноу) стал казаться преодолимым, по крайней мере в Москве и в Париже. Лингвисты, побуждаемые как внутренней логикой своих задач, так и растущими возможностями компьютеров, начали разрабатывать принципы точного описания естественных языков; меня особенно увлекла замечательная общелингвистическая программа «Смысл—Текст» Игоря Мельчука. Колмогоров с учениками занялся поэтической речью и ее статистикой. Во встречном направлении шли семиотики и стиховеды. Не обходилось без разочарований и раздражения[1].

Меня, однако, не соблазняла перспектива применить свои рабочие навыки математика к гуманитарному материалу. Мне хотелось вжиться в него, как вживаются в чужую страну, и описать увиденное словами не столь точными, сколь выразительными. (В контексте литературоведения Сьюзен Зонтаг назвала такую установку «эротическим отношением к литературе».)

Плодами этих мечтаний оказались три статьи: «Архетип Пустого Города», «„Мифологический плут“ по данным психологии и теории культуры», «К проблеме ранних стадий речи и сознания (филогенез)».

В конечном счете, все три работы возникли из желания понять черты коллективной психологии человеческого поведения. Материалистические объяснения истории, сформулированные на деревянном официальном арго, не объясняли ни ее неправдоподобной жестокости, ни ее творческой страсти. Иногда казалось, что историю делают не вожди, классы и массы, а кучка садистов руками толп мазохистов.

Я услышал «архетип Пустого Города» в разных мотивах искусства и облек его в словесную оболочку аналитической психологии Юнга, рационализировав его как подсознательную тень «проектного сознания», создающего светские и религиозные утопии, иногда невероятной красоты и мощи. В недавних комментариях Г. И. Ревзина

[1] «В таблицах сумма по столбцам и сумма по строкам никак не хотели сходиться ⟨…⟩ Впрочем, таблицы с цифрами мало кто читает: в моей книге „Современный русский стих“ (1974. С. 337) неправильно суммированы подсчеты по тактовику Блока и поэтому неправильны все выводы из них, но за 25 лет никто этого не заметил». (*Гаспаров М.* Записи и выписки. М.: НЛО, 2001. С. 316).

и А. А. Грякалова[2] этот архетип привлекается в дискурсах, посвященных искусствоведению и философии детства.

Мифологический плут требует более пространных комментариев.

Много лет я вел домашний семинар, посвященный психолингвистике и эволюции сознания и интеллекта (это был один из вариантов традиционных московских посиделок «на кухне»).

Среди его участников и докладчиков были лингвисты, нейробиологи, психиатры, филологи. Мы пытались найти общие интересы и вопросы, где соединение разных профессиональных знаний, привычек и опыта могли бы привести к чему-нибудь новому.

Я постепенно сосредоточился на раздумьях, которые мог себе позволить только дилетант. Я попытался вообразить себе зарождение языка как системы социального поведения.

Методы сравнительного языкознания позволяют реконструировать словарь и грамматику праязыковых состояний в дописьменную эпоху. Они основаны на сравнении фонетически и семантически близких слов родственных языков, затем (скажем, в ностратических реконструкциях) на сравнении фонетически и семантически близких реконструированных корней. С каждым шагом реконструкции количество сохранившегося материала убывает экспоненциально, поэтому дальше примерно $(10—13) \cdot 10^3$ лет до н. э., то есть раннего неолита, компаративистика дойти не может (конечно, эти глоттохронологические датировки могут уточняться и оспариваться). Привлечение генетических данных (Луиджи Кавалли-Сфорца) подкрепляет и углубляет полученную картину, но о собственно языках уже не сообщает ничего.

Между тем, говорить человек начал предположительно где-то между $3 \cdot 10^4$ и 10^5 лет до н. э., и я хотел вообразить, как это могло происходить.

Для краткости я представлю свои размышления в виде серии сухих и упрощенных тезисов.

(а) В исторически описанных обществах изредка появлялись люди, чей уровень речевой компетенции на порядки превосходил уровень обычных, даже образованных и активных деятелей. Можно вспомнить таких кристаллизаторов национальных языков, как Данте, Шекспир и Пушкин. В дописьменных обществах, вероятно, такими были творцы «Одиссеи» и «Гильгамеша».

[2] http://www.projectclassica.ru /v_o/11_2004/11_2004_o_01b.htm,
http://www.archi.ru/press/revzin/kom071201.htm,
http://social.philosophy.pu.ru/?cat=publications&key=105 .

Я предположил, что то же происходило на гораздо более архаичных стадиях развития речи. Появлялись люди, через которых артикулировал еще не рожденный язык, производимый мутировавшим мозгом. Эта прото-речь врывалась в безъязыковое окружение через прото-шаманов и прото-поэтов.

(б) Прото-речь развивалась параллельно с прото-сознанием.

Изначальные функции и речи, и сознания не были когнитивными. Они состояли во введении психического механизма, который мог бы *останавливать врожденные, инстинктивные, животные реакции и поведенческие стереотипы*.

Прото-речь доставляла сигнальную систему, включавшую остановку таких реакций; она могла быть интериоризована и начинала составлять основу индивидуальной психики.

Все более выраженная речь также позволяла отдельным, особо одаренным индивидуумам контролировать поведение других людей и в конечном счете создавать «альтернативные реальности» религии, литературы, философии и науки.

(в) Наконец, развивающаяся асимметрия левого и правого полушарий головного мозга, которая сопровождала развитие лингвистической компетенции раннего человека, легко приводила к тому, что в современных терминах можно было бы описать как острое невротическое расстройство. (В литературе имеются сходные спекуляции, основанные на другом материале, например, на эволюции сексуального поведения от животного до человеческого.)

На некоторой стадии реконструкции я понял, что фигура, представшая моему воображению, разительно похожа на «мифологического плута» (в англоязычном варианте трикстера). Я начал читать обширную литературу о трикстерах. Свидетельства подтверждали, что трикстеры по всему свету обладали недюжинными языковыми способностями и в то же время были глубокими невротиками.

Дарвиновская эволюция была благосклонна к трикстерским генам, потому что его бурная сексуальная активность сопровождалась талантом манипулятора. Более того, традиционная роль трикстера как мудрого советника при центре власти давала ему дополнительные репродуктивные преимущества.

Моя статья о трикстере была опубликована в «Природе» в 1987 году.

Только недавно я узнал, что примерно тогда же, в 1988 году, группа исследователей опубликовала книгу «Макиавеллиевский интеллект»[3].

Ее содержание было вкратце резюмировано во второй части этой книги[4] так: «⟨…⟩ изначальной движущей силой эволюции интеллекта был отбор по эффективности манипулятивного социального поведения внутри групп, где самые трудные задачи, стоящие перед индивидуумом, были связаны с необходимостью взаимодействия с другими членами группы».

Авторы (или редакторы) предложили термин «макиавеллиевский интеллект» именно для того, чтобы метафорически выразить этот опыт социального манипулирования. Полевые исследования выявили его зачатки уже в сообществах приматов.

Воображенный мной Трикстер замечательно соответствовал этому описанию.

* * *

В 1942 году мой отец ушел на фронт, где через год погиб. В последние дни дома он хотел, я думаю, побыть со мной и научить меня чему-нибудь, чтó я бы запомнил надолго. «Завтра мы пойдем ловить рыбу», — сказал он.

Назавтра мы отправились с утра и остановились у ближайшего большого арыка (дело было в Чарджоу, куда после эвакуации из Симферополя попала часть Крымского пединститута). В арыке текла коричневая глинистая вода. Я был почти уверен, что никакая рыба там жить не может, да и вообще, как ее ловить? (мне было пять лет).

Отец сломал два прута, очистил их от листьев и привязал к ним по нитке, на концах ниток были две гнутые булавки, заменявшие крючки. На булавки он насадил шарики хлебного мякиша. В меня начало заползать страшное подозрение: рыба проглотит эти булавки, ей будет очень больно, а мы ее вытащим, ей будет нечем дышать, и она умрет. Я боялся сказать хоть слово.

Отец забросил удочки. Ничего не происходило, нитки шевелились в мутной воде.

Наконец отец со вздохом сказал, что пора домой, вытащил «лески» и посмотрел на хлебные шарики.

[3] Machiavellian Intelligence: Social expertise and the evolution of intellect in monkeys, apes and humans / Ed. by R. W. Byrne, A. Whiten. Oxford: Clarendon Press, 1988.

[4] Machiavellian Intelligence II: Extensions and evaluations / Ed. by A. Whiten and R. W. Byrne. Cambridge University Press, 1997.

Они были слегка обкусаны! Значит, рыба в арыке жила, а мы никого не убили!

Счастье, которое я испытал, сделав два этих открытия, и осталось главным уроком моего отца, и я не забыл его до нынешнего дня.

Сочиняя свой личностный миф, я решил, что это был мой первый онтологический опыт, «доказательство существования» по косвенным признакам.

* * *

Вся моя интеллектуальная жизнь была сформирована тем, что я условно стал называть Просвещенческим проектом. Его основная посылка состояла в вере, что человеческий разум имеет высшую ценность, а распространение науки и просвещения само по себе неизбежно приведет к тому, что лучшие, чем мы, люди, будут жить в лучшем, чем мы, обществе.

Ничто из того, что я наблюдал вокруг себя в течение двух третей прошлого века и подходящего к концу десятилетия нового века, не оправдывало этой веры.

И все же я верю в Просвещенческий проект.

* * *

В заключение я хочу выразить сердечную благодарность всем моим учителям, друзьям и собеседникам долгих лет. Перечислить их нет никакой возможности, но от них, а также из их книг я узнал все, что знаю (или думаю, что знаю).

Особая признательность Ксане и Мите.

Мите пришло в голову собрать эту книгу, и когда она начала завязываться, он перевел несколько важных для меня работ, которые войдут в издание ее английской версии.

Советы, критика, поощрение и любовь Ксаны сопровождали всю работу, как и всю жизнь.

Часть I

Математика как метафора

Математика и культура

0. Предисловие

> Как так может быть, что мы с одной стороны гордимся тем, что построили прекрасный мир, полностью отгороженный от запросов реальности, а с другой — утверждаем, что наши идеи лежат в основе чуть ли не всех значительных технических достижений?
>
> *Д. Мамфорд, из предисловия к книге* [11]

Чистая математика — это огромный организм, построенный полностью и исключительно из идей, возникающих в умах математиков и в этих умах живущих.

У того, кто захочет избавиться от чувства дискомфорта, вызываемого таким заявлением, есть по крайней мере три пути отхода.

Во-первых, можно попросту отождествить математику с содержанием математических рукописей, книг, статей и докладов, со все время растущей сетью из теорем, определений, доказательств, конструкций, гипотез (может быть, и математических компьютерных программ) — с тем, что современные математики рассказывают на конференциях, хранят в библиотеках и электронных архивах, чем они гордятся, за что они друг друга награждают. Короче говоря, математика — это просто то, чем занимаются математики, так же как музыка — это то, чем занимаются музыканты.

Во-вторых, можно возразить, что математика — это вид человеческой деятельности, глубоко укорененный в реальности и постоянно к этой реальности возвращающийся. От счета на пальцах до высадки на Луне и поисковой системы Google — мы занимаемся математикой, чтобы понимать и создавать реальные объекты и оперировать ими, и, возможно, именно *это понимание* является математикой, а не трудноуловимое бормотание сопутствующих абстракций. При таком подходе математики становятся более или менее ответственными деятелями истории человечества, подобно Архимеду, помогавшему защищать Сиракузы (и заодно местного тирана), Алану Тьюрингу,

---

Впервые опубликовано: La Mathematica / Ed. C. Bartocci, P. Odifreddi. Vol. 2. Problemi e teoremi. Einaudi, 2008 *Перевод с английского С. М. Львовского.*

анализировавшему перехваченные шифрованные послания маршала Роммеля в Берлин, или Джону фон Нейману, предложившему детонацию на больших высотах в качестве эффективной тактики бомбометания. Если принять такую точку зрения, то математики могут защищать свое ремесло, подчеркивая его общественную полезность. Математик в такой роли может сталкиваться с моральными проблемами так же, как и любой другой человек; если бы я хотел продемонстрировать некоторые особенности этих проблем, специфические для профессии математика, то я не нашел бы ничего лучше, чем горькая ирония из [2, с. 11]: «...математика может также оказаться совершенно незаменимым инструментом. Так, когда изучалось воздействие кассетных бомб на человека, но *испытания на свиньях были невозможны по соображениям гуманности* (курсив мой. — *Ю. М.*), в игру вступило математическое моделирование».

В-третьих, имеется грандиозная картина великого Замка Математики, возвышающегося где-то в платоновском мире идей, каковой замок мы скромно и преданно исследуем (а не конструируем). Величайшим математикам удается ухватить какие-то контуры Великого замысла, но даже тем, кому открылся всего лишь узор плитки на кухне, это открытие может принести счастье и блаженство. Тот, кто предпочитает выразить эту же мысль иными словами, с помощью семиотической метафоры, мог бы сказать, что математика — это прототекст, существование которого только постулируется, но который тем не менее лежит в основе тех его искаженных и фрагментарных копий, с которыми мы обречены иметь дело. О личности автора этого прототекста (или строителя Замка) все могут только строить догадки, но Георг Кантор с его ви́деньем бесконечности бесконечностей как напрямую вдохновленной Богом и Курт Гёдель с его «онтологическим доказательством» сомнений на этот счет, кажется, не испытывали.

Различные оттенки и комбинации этих трех подходов, социальных позиций и вытекающих из этого выборов стратегии индивидуального поведения окрашивают все дальнейшее обсуждение. Единственная цель этого краткого предисловия — продемонстрировать читателю те внутренние напряжения, которые будут присутствовать в нашем изложении, а вовсе не имитировать (отсутствующее) ясное понимание и не предложить (отсутствующие) определенные суждения.

Наше последнее предупреждение касается присутствующих в нашем изложении исторических экскурсов. Есть два разных способа читать старые тексты: при одном способе читатель стремится понять время, когда они были написаны, и культуру, к которой этот текст относился, при другом читатель стремится пролить свет на ценности и предрассудки нашего времени. В истории математики эти подходы представлены историей в стиле «этноматематика» и историей в стиле Бурбаки соответственно.

В этом тексте я в явном виде и сознательно принимаю «модернизаторскую» точку зрения.

Зилке Виммер-Загир снабдила меня некоторыми источниками по истории китайской и японской математики и обсудила со мной их связь с этим проектом. Д. Ю. Манин объяснил мне принятую в Google стратегию ранжирования страниц. Я благодарен им обоим за щедрую помощь.

1. Математическое знание

1.1. Взгляд с птичьего полета. Сэр Майкл Атья начинает свой доклад [1] с такого обобщающего вступления: «Три большие раздела математики — это, в порядке их появления, геометрия, алгебра и анализ. Геометрией мы обязаны в основном греческой цивилизации, алгебра имеет индо-арабское происхождение, а с созданием Ньютоном и Лейбницем анализа пришла новая эра». Затем он объясняет, что в царстве физики эти разделы математики соответствуют исследованию пространства, времени и континуума соответственно: «Вряд ли кто-нибудь будет спорить с тем, что геометрия занимается исследованием пространства; возможно, менее очевидно, что алгебра занимается исследованием времени. Заметим, однако, что для любой алгебраической системы необходимо выполнение последовательных операций (сложения, умножения и т. п.) и что эти операции воспринимаются как выполняемые одна после другой. Иными словами, алгебре необходимо время, чтобы придать ей смысл, пусть даже обычно при этом речь идет о дискретных отрезках времени».

Можно было бы предложить и альтернативную точку зрения на алгебру, согласно которой она теснее всего связана не с физикой, а с языком. Если посмотреть на постепенное зарождение позиционной системы записи чисел, а в дальнейшем — алгебраических обозначений для переменных и операций, то можно выделить два исторических этапа.

На первом этапе обозначения используются в первую очередь для нужд сокращения и унификации символического представления некоторого набора значений. На этом этапе ту же роль мог играть (и играл) также естественный язык — но менее эффективно. Поэтому описанный процесс правомерно сравнить с развитием специализированного поддиалекта в естественном языке. Римские цифры, до сих пор использующиеся в декоративных целях — это ископаемые, оставшиеся от указанного периода. Другая полезная аналогия — возникновение и развитие химической нотации (возможно, это развитие было более прямым, и во всяком случае оно лучше документировано).

На втором этапе разрабатываются алгоритмы для сложения и умножения (а позднее и для деления) чисел, записанных в позиционной системе. Параллельно этому из переменных и алгебраических операций начинают строить тождества и уравнения, а затем и последовательности уравнений, удовлетворяющие единообразным правилам вывода (тождественных преобразований). На этом этапе высказывания на новом (математическом) диалекте становятся не столь носителями определенных значений, сколь сырьем для переработки на фабрике, производящей вычисления. Именно этот сдвиг смысла, от более или менее явной семантики обозначений к скрытой семантике алгоритмов, преобразующих строки символов, был ключевым событием в процессе зарождения алгебры.

Ничего похожего на этот второй этап не происходило с естественными языками. Напротив, когда в 60-х годах XX века с появлением больших компьютеров начались первые попытки алгоритмической обработки текстов на английском, французском или русском языках (например, для целей автоматического перевода), стало ясно, насколько естественные языки неудобны для компьютерной обработки. Оказалось, что невозможно обойтись без огромных словарных баз данных. Морфология, порядок слов и сочетания грамматических конструкций подчинялись запутанным и нелогичным правилам; хуже того, в разных языках эти правила прихотливым образом противоречили друг другу. Невзирая на все усилия, автоматический перевод без последующего редактирования человеком так и не приводит к удовлетворительным результатам.

Эта характерная для человеческих языков сопротивляемость к алгоритмической обработке является, возможно, глубинной причиной того, что только математика способна обеспечить адекватный язык для физики. Не то чтобы нам не хватало слов для выражения всех этих $E = mc^2$ и $\int e^{iS(\varphi)} D\varphi$ — слова-то как раз есть, и они легко придумываются, но мы так бы ничего и не могли делать с этими великими открытиями, если бы для их описания мы располагали исключительно словами.

С другой стороны, не можем мы также и опустить слова и иметь дело только с формулами. Слова в математических и естественнонаучных текстах играют три основные роли. Во-первых, они обеспечивают многочисленные связи между физической реальностью и миром математических абстракций. Во-вторых, слова несут оценочные суждения (иногда явные, иногда неявные), которыми мы руководствуемся при выборе тех или иных цепочек математических рассуждений в огромном дереве «всех» допустимых, но по большей части бессодержательных формальных выводов. Наконец (последнее по счету, но не по важности), слова позволяют нам общаться, учить и учиться.

В заключение приведу глубокое замечание Поля Самуэльсона, сравнивающего использование слов и математических символов в экономических моделях (цитируется по [4]): «Когда мы приступаем к решению этих проблем [из экономики] с помощью слов, мы решаем те же уравнения, что и в случае, когда мы эти уравнения явно выписываем. ⟨...⟩ По-настоящему серьезные ошибки происходят на этапе формулировки исходных предпосылок. ⟨...⟩ Одно из преимуществ такого посредника, как математика (точнее говоря, математических канонов изложения доказательств, будь то словесно или с использованием символики), состоит в том, что нам приходится выложить карты на стол, так что наши исходные предпосылки будут видны всем».

Возвращаясь к карте математических провинций Геометрии, Алгебры и Анализа, заметим, что на ней надо найти место и для (математической) Логики, с ее современными воплощениями — Теорией Алгоритмов и Теоретической Информатикой (Computer Science). Имеются очень сильные доводы в пользу того, чтобы, вопреки Фреге, рассматривать ее как часть широко понимаемой алгебры. Если согласиться с этим, то догадка Атьи насчет связи между алгеброй и понятием времени получает подтверждение. Именно, серьезные сдвиги в развитии логики в 30-е годы XX века произошли тогда, когда Алан Тьюринг воспользовался физической метафорой «машины Тьюринга» для описания алгоритмизованного вычисления. До его работы логика обсуждалась почти исключительно в паралингвистических терминах, как и у нас выше. Тьюринговское представление о конечном автомате, передвигающемся дискретными шагами вдоль одномерной ленты и записывающем на ней биты или стирающем их, вместе с теоремой существования универсальной машины такого типа, подчеркивает именно этот временной аспект всякого вычисления. Еще важнее то обстоятельство, что представление о вычислении как о физическом процессе не только помогло сконструировать современные компьютеры, но и открыло пути для продумывания в физических терминах (как классических, так и квантовых) общих закономерностей хранения и обработки информации.

1.2. Математика: предмет изучения. Когда мы занимаемся биологией, мы изучаем живые организмы. Когда мы занимаемся астрономией, мы изучаем небесные тела. Когда мы занимаемся химией, мы изучаем разновидности материи и их взаимопревращения.

Мы наблюдаем и измеряем нечто в реальном мире, мы разрабатываем специализированные эксперименты в точно определенных условиях (впрочем, не в астрономии), и в результате всего этого мы строим объясняющую парадигму, которая становится на текущий момент вехой в развитии науки.

Но что же мы изучаем, когда занимаемся математикой?

Один из возможных ответов таков: *мы изучаем идеи, с которыми можно обращаться так, как если бы они были реальными предметами* (П. Дэвис и Р. Херш называют их «умственными объектами с воспроизводимыми свойствами»).

Каждая такая идея должна быть достаточно жесткой, чтобы сохранять свою форму во всяком контексте, где она может быть использована. В то же время у каждой такой идеи должен быть богатый потенциал для создания связей с другими математическими идеями. Когда первоначальный комплекс идей сформировался (исторически или педагогически), связи между этими идеями также могут приобрести статус математических объектов, образуя тем самым первый уровень гигантской иерархии абстракций.

В самом низу этой иерархии лежат мысленные образы самих вещей и способов манипулирования ими. Чудесным образом оказывается, что даже абстракции высокого уровня могут каким-то образом отражать реальность: знания о мире, полученные физиками, можно выразить только на языке математики.

Вот несколько основных примеров.

1.2.1. Натуральные числа. Это, возможно, старейшая *протоматематическая* идея. «Жесткость» таких объектов, как 1, 2, 3..., такова, что первые натуральные числа обретают символический и религиозный смысл во многих культурах. На ум тут же приходят христианская Троица и и буддистская нирвана: слово ‘нирвана’ происходит от санскритского nir-dva-n-dva, где dva так и значит ‘два’, а все выражение подразумевает, что состояние абсолютного блаженства будет достигнуто, когда человек подавит индивидуальное существование и будет составлять «одно» с Вселенной. (Эти отрицательные коннотации слова ‘два’ сохранились даже в некоторых современных европейских языках, в которых у слова ‘два’ имеются ассоциации с идеей сомнения; см. латинское dubius, немецкое Zweifeln и описание Мефистофеля у Гёте.)

Натуральное число является также и *протофизической* идеей: подсчет материальных объектов (а позднее — и нематериальных, например, дней и ночей) является первым проявлением идеи измерения (см. ниже).

Натуральное число становится *математической* идеей, когда:

а) изобретаются способы обращения с натуральными числами так, как если бы они были предметами (сложение, умножение);

б) выявляются первые абстрактные свойства внутренней структуры совокупности всех натуральных чисел (простые числа, их бесконечность, существование и единственность разложения на простые множители).

Эти два открытия весьма отдалены друг от друга и исторически, и географически (возможно, также и в культурном и философском аспектах). Позиционная система счисления знаменует начало того, что мы сегодня называем *прикладной математикой,* а простые числа — того, что раньше называли *чистой математикой*. Скажем об этом немного подробнее.

Первоначально и числа, и способы обращения с ними кодировались специфическими материальными объектами: пальцами и другими частями тела, палочками, предназначенными для счета, зарубками. Зарубка — это уже знак, а не вещь в собственном смысле слова; она может означать не только 1, но и 10, и 60 — в зависимости от того, где она расположена в ряду других символов. Тем самым открывается дорога к великому математическому открытию — позиционной системе счисления. Впрочем, непротиворечивой позиционной системе необходим еще и знак для нуля, который появился достаточно поздно, ознаменовав переход на новый уровень математической абстракции.

Выразительный отрывок из [2] рисует такую картину.

> В 2074 году до н. э. царь Шульги провел военную реформу в шумерском государстве, а на следующий год — административную реформу (кажется, объявленную как временную в связи с чрезвычайными обстоятельствами, но вскоре ставшую постоянной), согласно которой бо́льшая часть трудоспособного населения была организована в почти что рабские рабочие бригады, а писцы-надсмотрщики были сделаны ответственными за производительность этих бригад, исчисляемую в абстрактных единицах, равных 1/60 рабочего дня (12 минут), согласно четким нормативам.

> Вся работа и все результаты труда должны были скрупулезно подсчитываться и при учете переводиться в эти абстрактные единицы; для этого требовалось в массовом порядке проводить умножение и деление. При этом была введена и использовалась для промежуточных подсчетов позиционная система с основанием 60. Наличие такой системы предполагает существование таблицы умножения, таблицы обратных и таблицы технических констант и изучение этих таблиц в школах. Тем самым создание системы, основная идея которой «носилась в воздухе» в течение уже нескольких столетий, потребовало решения на государственном уровне и весьма энергичного проведения этого решения в жизнь. Как и во множестве случаев позднее, только война создала возможность для проявления такой политической воли.

С другой стороны, представляется, что простые числа возникли из чистого созерцания, так же как и идея совершенно конкретной бесконечности: как самих натуральных чисел, так и простых чисел.

Доказательство бесконечности простых чисел, включенное в «Начала» Евклида, является одним из красивейших математических рассуждений древности. Напомним его вкратце (в современных обозначениях): если у нас есть конечный список простых чисел $p_1, \ldots, p_n$, то к нему можно добавить еще одно, взяв любой простой делитель числа $p_1 \ldots p_n + 1$.

Это — идеальный пример обращения с математическими идеями так, как если бы они были жесткими материальными объектами. На этой стадии это уже чистые идеи, откровенно не имеющие даже отдаленного отношения к *материальным обозначениям* на шумерский или еще какой-нибудь лад. И сегодня, глядя на число, записанное в десятичной системе, легко сказать, четно ли оно и делится ли оно на 5 — но невозможно сходу увидеть, что оно является простым. Целые поколения математиков после Евклида дивились тому, как, на первый взгляд, случайно рассыпаны простые числа в натуральном ряду.

Наблюдение, эксперимент в точно определенных условиях, а с недавних пор — даже промышленное производство простых чисел (построение и выявление больших простых чисел с помощью практически реализуемых алгоритмов используется в задачах криптографии) стали отличительной чертой значительной части современной теории чисел.

1.2.2. Действительные числа и «геометрическая алгебра». Целые числа возникли из счета, но остальные действительные числа возникли в геометрии в качестве длин, площадей и объемов. Пифагоровское открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной продемонстрировало также и то, что «величин» больше, чем «чисел». В дальнейшем величины стали действительными числами.

Арифметические операции над целыми числами развивались от соединения двух кучек палочек и составления двух шестов с зарубками до регламентированных действий с систематизированными обозначениями. Алгебраические операции над действительными числами начинались с рисования и разглядывания рисунков, которые могли быть то планами местности или будущих строений, то изображениями евклидовских квадратов, окружностей и углов.

В XX веке историки математики спорили о том, правильно ли рассматривать значительную часть греческой математики как «геометрическую алгебру». Один из примеров геометрической алгебры — рисунок, изображающий квадрат, разделенный двумя прямыми, параллельными двум перпендикулярным сторонам, на четыре части, две из которых также являются квадратами. Этот рисунок можно понять как геометрическую запись и доказательство алгебраического тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Наш модернизаторский подход к истории подсказывает необходимость рассмотрения нескольких режимов мышления, в особенности мышления, связанного с математикой. Вот основное разделение.

а) Сознательное манипулирование конечной и дискретной системой символов с явно зафиксированными правилами построения осмысленных строк символов и менее явными правилами, согласно которым некоторые строки признаются «интересными» (левое полушарие: лингвистическая и алгебраическая деятельность).

б) В большой степени подсознательное манипулирование со зрительными образами, неявно опирающееся на прошлый опыт и оценку вероятностей возможных результатов, но также использующее в качестве критерия равновесие, гармонию и симметрию (правое полушарие: пластические искусства, музыка, геометрия).

В сознании математика, занимающегося исследованием, эти два режима мышления должны сочетаться многими сложными способами. Это непросто, в частности, и потому, что скорости обработки информации в двух режимах чрезвычайно сильно различаются: порядка 10 битов в секунду для сознательной обработки символов и порядка 10^7 битов в секунду для подсознательной визуальной деятельности (см. [26]).

Возможно, именно из-за внутреннего напряжения, создаваемого этим (и другими) несоответствиями, взгляды на два указанные режима мышления часто являются эмоционально окрашенными; два полушария рассматриваются как воплощения разных ценностей: холодный интеллект против теплого чувства, голая логика против проницательной интуиции. См. прекрасные статьи Дэвида Мамфорда [22] и [23], в которых он красноречиво выступает за статистику и против логики, но при этом пользуется математической статистикой, которая, как и всякий раздел математики, построена в высшей степени логично.

Возвращаясь к действительным числам и «геометрической алгебре» греков, мы узнаем в ней пример правополушарного подхода к предмету, который в дальнейшем развился в нечто управляемое в основном левым полушарием. Мамфорд по этому поводу говорит, что современная алгебра представляет собой грамматику операций с объектами, являющимися по сути своей геометрическими, а греческая алгебра — это ранний компендиум таких операций.

Возможно, влияние непрерывности греческого геометрического мышления как когнитивного феномена можно обнаружить не только в современной геометрии, но и в теоретической физике. В течение последних десятилетий из физики в математику шел такой мощный поток догадок, гипотез и изощренных конструкций, что был даже изобретен термин «физическая математика». Теоретическое мышление, на котором основано творческое использование фейнмановских интегралов, поражает нас богатством результатов, построенных на основе, которая по любым математическим критериям должна считаться весьма шаткой. Это можно рассматривать как дополнительную иллюстрацию того тезиса, что «геометрическая алгебра» существовала в реальности и не является исключительно результатом нашей реконструкции.

1.2.3. $e^{\pi i} = -1$: повесть о трех числах. Не исключено, что формула Эйлера $e^{\pi i} = -1$ — самая красивая одиночная формула во всей математике.

В ней в высшей степени неожиданным образом объединены три (или четыре, если включить в счет и -1) константы, открытые в различные эпохи и с очень разной мотивацией.

Говоря очень кратко, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ принадлежит (опять) к наследию греков. Само его существование как действительного числа (то есть как чего-то подобного длине отрезка или площади квадрата) нельзя осознать без дополнительного мыслительного усилия. Проблема квадратуры круга — это не просто очередная геометрическая задача; это тест на легитимность с неясным результатом.

Напротив, число $e = 2{,}718281828\ldots$ является продуктом уже зрелой, хоть и не полностью развитой, западной математики (середина

XVII века). Это — теоретический побочный продукт, с одной стороны, изобретенных в это время таблиц логарифмов, являвшихся средством оптимизации численных алгоритмов (замена умножения сложением), и с другой стороны — задачи о «квадратуре гиперболы». Никакие классические геометрические конструкции не приводили к числу e и не наводили на мысль о существовании соотношения между e и π.

Наконец, определение «мнимого» числа $i=\sqrt{-1}$, рассматривавшегося многими современниками как нечто чудовищное, было для Кардано буквально вынужденным шагом, предпринятым в связи с формулами для решения кубического уравнения в радикалах. Когда все три корня являются вещественными, при использовании этих формул в промежуточных вычислениях появляются комплексные числа.

Формула Эйлера представляет собой замечательный пример «бесконечных» тождеств, с которыми он (а позднее — Сринаваса Рамануджан) блестяще умел обращаться. На самом деле тождество $e^{\pi i}=-1$ является частным случаем ряда $e^{ix}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(ix)^n/n!$, дающего более общее выражение для $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

Дальнейший прогресс в понимании действительных чисел и теории пределов отодвинул великие таланты Эйлера и Рамануджана в обращении с «бесконечными тождествами» на второй план. Уже когда Г. Харди описывал математическое мышление Рамануджана, ему никак не удавалось мысленно поставить себя на его место. Эта история что-то говорит нам о противопоставлении «логика — статистика», но я не могу ухватить даже приблизительную формулировку.

Вне связи с предыдущим, позднее формула $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ оказалась основой для адекватного описания одного из самых важных и неожиданных открытий в физике XX столетия: квантовых амплитуд вероятности, их волнового поведения и квантовой интерференции.

1.2.4. Множество по Кантору: минимальный математический объект. Согласно исходному описанию Кантора,

> Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

> Под «множеством» мы понимаем всякое соединение M определенных и различных объектов m (называемых «элементами» множества M), существующих в нашем восприятии или в нашей мысли.

Благодаря немецкому синтаксису структура канторовской фразы аккомпанирует ее смыслу: «Objekten m unserer Anschauung...» заключены между словами «Zusammenfassung» и «zu einem Ganzen», как между открывающей и закрывающей скобками.

Видя это определение в первый раз, трудно представить себе, какого рода математикой (и шире: какого рода умственной деятельностью) можно заниматься на столь скудной основе. Собственно говоря, именно эта скудость и позволила Кантору изобрести свой «диагональный процесс», сравнивать бесконечности, как если бы они были физическими объектами, и открыть, что бесконечность действительных чисел строго больше, чем бесконечность чисел натуральных.

При этом на канторовской интуиции основывается бóльшая часть работы по основаниям математики в XX веке: она может резко отвергаться логиками различных направлений, и она же является основой для проекта великого объединения, сначала под названием «теория множеств», а затем — «теория категорий».

1.2.5. «Все люди смертны. Кай — человек...»: от силлогизмов к программам. Аристотель кодифицировал элементарные разновидности утверждений и основные правила логического вывода. Аналогия между этими правилами и элементарной арифметикой была понята давно, но описана в явном виде относительно недавно (важную роль в этом сыграл Дж. Буль). Философы науки расходятся во мнениях по поводу того, что здесь первично. Фреге, например, настаивал на том, что арифметика является частью логики.

XX век оказался свидетелем сложнейшего соединения логики с арифметикой, когда в 30-е годы Гёдель, Тарский и Чёрч создали математические модели математических рассуждений, далеко выходящие за пределы комбинаторики конечных текстов. Одним из важных инструментов была восходящая к Лейбницу идея воспользоваться вычислимой нумерацией всех возможных текстов, чтобы заменить логические выводы арифметическими операциями.

Тарский в качестве модели истины предложил «истинность во всех интерпретациях» и обнаружил, что множество (номеров) арифметических истин невыразимо арифметической формулой. Инфинитарность понятия истины по Тарскому связана с тем, что в логических формулах допускаются кванторы всеобщности и существования, вследствие чего интерпретация конечной формулы подразумевает потенциально бесконечную последовательность проверок.

Гёдель, пользуясь аналогичным приемом, показал, что множество арифметических истин, выводимых из любой данной конечной системы аксиом и правил вывода, не может совпадать с множеством всех истинных формул. Существенной общей чертой обоих доказательств была ауторефрерентность.

Помимо прочего, Гёдель и Тарский показали, что основное иерархическое отношение — это отношение между языком и метаязыком. Более того, объективный смысл имеют только взаимоотношения языка и метаязыка, а не их абсолютный статус. Можно пользоваться логикой для описания арифметики, и можно пользоваться арифметикой при обсуждении логики. Искусная комбинация обоих уровней однозначно демонстрирует ограничения, внутренне присущие чистой логике как познавательному инструменту, даже когда он применяется «только» к само́й чистой логике.

В течение того же десятилетия Тьюринг и Чёрч проанализировали понятие вычислимости, изначально более «арифметичное». При этом Тьюринг сделал решительный шаг, поставив физический образ (машину Тьюринга) на место традиционных лингвистических воплощений логики и вычислимости, доминировавших в рассуждениях Тарского и Гёделя. Это был серьезный шаг, подготовивший последующее развитие техники: возникновение программируемых электронных вычислителей.

С теоретической точки зрения можно сказать, что и Чёрч, и Тьюринг открыли, что существует «окончательное» понятие вычислимости, воплощенное в универсальной рекурсивной функции или универсальной машине Тьюринга. Это не математическая теорема — скорее это «физическое открытие в метафизической области», которое обосновывается не доказательством, но тем фактом, что все последующие попытки дать альтернативное определение вычислимости приводили к равносильным понятиям. Скрытая (по крайней мере, в популярных изложениях) часть этого открытия состоит в осознании того, что правильное определение вычислимости содержит в себе элементы невычислимости, которых невозможно избежать никоим образом: рекурсивная функция в общем случае определена не везде, и мы не можем выяснить, где она определена, а где — нет.

Современные компьютеры являются технологически отчужденным воплощением этих великих открытий.

1.3. Определения, теоремы, доказательства. Теперь я вкратце опишу, каким образом проявляет себя «чистая» математика в качестве коллективной деятельности современного профессионального сообщества. Речь в основном пойдет не столько об организационных формах этой деятельности, сколько о том, как отражается вовне внутренняя структура мира математических идей.

Давайте посмотрим на любую современную статью в каком-нибудь из ведущих математических журналов, например, «Annals of

Mathematics» или «Inventiones mathematicae». В типичном случае она делится на относительно короткие фрагменты, называемые определениями, теоремами (с такими подвидами, как лемма и предложение) и доказательствами (эти последние могут быть значительно длиннее). Это — основные строительные блоки современного математического текста; для оживления добавляются такие украшения, как мотивировки, примеры, контрпримеры, разбор частных случаев и пр.

Эта традиция организации математического знания унаследована нами от греков (особенно важным источником были «Начала» Евклида). Цель определения — ввести математический объект. Цель теоремы — сформулировать какие-то свойства объекта или взаимоотношения между различными объектами. Цель доказательства — сделать эти утверждения убедительными, представив рассуждение, разделенное на цепочку мелких утверждений, каждое из которых обосновывается с помощью «стандартных» средств убеждения.

Попросту говоря, сначала мы объясняем, о чем мы говорим, а затем — почему то, что мы утверждаем, является верным (вопреки Бертрану Расселу).

Определения. С эпистемологической точки зрения это предмет тонкий и противоречивый, поскольку речь идет о чрезвычайно специфических умственных образах, как правило, отсутствующих в нетренированном уме (что такое действительное число? случайная величина? группа?). Когда выше я описывал некоторые из основных объектов, я пользовался нарративными средствами для того, чтобы сделать их наглядными и ощутимыми, но я не приводил настоящих определений в техническом смысле слова.

У Евклида определения обычно представляют собой смесь из пояснений, использующих зрительные образы, и «аксиом», в которых речь идет об идеализированных свойствах, приписываемых нами определяемым объектам.

В современной математике можно более или менее явно ограничить себя фундаментальным мысленным образом канторовского «множества» и ограниченным набором свойств множеств и конструкций, позволяющих строить множества из уже имеющихся. При этом каждое из наших определений можно воспринимать как стандартизированное описание некоторой структуры, состоящей из множеств, их подмножеств и т. д. Это — подход, разработанный группой «Бурбаки» и оказавшийся в итоге чрезвычайно влиятельным, удобным и широко принятым способом организации математического знания. Как и следовало ожидать, впоследствии этот подход стал мишенью для критики, направленной по большей части на систему ценностей, поддерживающую эту неоевклидовскую традицию, но прагматическая польза бурбакистского подхода неоспорима. Уж по крайней мере, ему мы обязаны существенным облегчением общения между математиками разных специальностей.

Если принять какую-нибудь из форм теории множеств как основу для дальнейших построений, то только аксиомы теории множеств остаются «аксиомами» в евклидовском смысле — интуитивно очевидными свойствами, принимаемыми без дальнейшего обсуждения (впрочем, см. ниже), тогда как аксиомы действительных чисел или планиметрии становятся доказываемыми свойствами явно строящихся теоретико-множественных объектов.

Бурбаки в своем многотомном трактате современной математики развили эту картину, добавив к ней красивое понятие «порождающих структур» (structures-mères). См. работу [31], посвященную истории группы «Бурбаки».

Подходя к вопросу шире, можно сказать, что математики развили специфическую дискурсивную практику, которую можно назвать «культурой определений». В этой культуре много усилий вкладывается в уяснение содержания (семантики) основных абстрактных *понятий* и синтаксиса их взаимоотношений, в то время как выбор слов (и в еще большей мере *обозначений*) признается делом не первостепенной важности, а в большой степени — и произвольным соглашением, основанным на соображениях удобства, эстетики или на стремлении вызвать подходящие ассоциации. Можно сравнить это с некоторыми традициями гуманитарного дискурса, в котором такие термины, как Dasein или différance, жестко используются как маркеры определенной традиции при том, что об их точном определении никто особо не заботится[1].

1.4. Проблемы, гипотезы, исследовательские программы. Время от времени появляется статья, в которой решается, или по крайней мере предстает в новом свете, серьезная проблема или доказывается гипотеза, которая была известна в течение десятилетий или даже

[1] Возможно, этому высказыванию не хватает широты взгляда. Несколько дней назад я ехал в трамвае, мысленно подвергая деконструкции следующие две строки Огдена Нэша: Some people after a full day's work sit up all night getting a college education by correspondence, // While others seem to think they'll get just as far by devoting their evenings to the study of the difference in temperament between brunettance and blondance.

Я размышлял о том, что в основе этого анализа лежит в точности «deferral» в смысле Дерриды, когда мой взгляд упал на вывеску мебельного магазина. Там было написано буквально следующее: DESIGN FÜR DASEIN.

столетий и не поддавалась решению, несмотря на множество усилий. Такие названия, как великая теорема Ферма (доказанная Эндрю Уайлсом), гипотеза Пуанкаре, гипотеза Римана или P-NP проблема, в наши дни попадают даже в газетные заголовки.

Давид Гильберт построил свой доклад на ознаменовавшем начало XX века Втором международном математическом конгрессе (Париж, 8 августа 1900 года) вокруг обсуждения десяти выдающихся математических проблем; они вошли в список из 23 проблем, перечисленных в печатной версии доклада. Можно спорить по поводу их сравнительной ценности с чисто научной точки зрения, но бесспорно, что они сыграли значительную роль в концентрации усилий математиков на четко намеченных направлениях исследований и в создании ясных целей и мотивировок для молодых ученых.

Если проблема (вопрос, на который можно ответить «да» или «нет») в основе своей представляет собой догадку об истинности некоторого утверждения (как проблема Гольдбаха: всякое четное число $\geqslant 4$ является суммой двух простых), то исследовательская программа предполагает широкий взгляд на большую область, какие-то части которой вовсе неисследованы, а про какие-то другие имеются догадки, основанные на аналогиях, разборе простых частных случаев и т. п.

Различие между проблемой и исследовательской программой не является абсолютным. Например, первая проблема Гильберта — гипотеза континуума, — которая в эпоху Гильберта и Кантора выглядела как конкретная задача, положила начало большой исследовательской программе, в результате работы которой было, помимо прочего, установлено, что ни один из двух ответов не выводим в рамках общепринятой аксиоматической теории множеств.

С другой стороны, явная формулировка исследовательской программы может оказаться делом рискованным. В проблеме номер 6 предлагалось аксиоматизировать физику, но в течение последующих трех десятилетий лицо физики полностью изменилось.

Некоторые из наиболее влиятельных исследовательских программ последних десятилетий представляли собой прозрения относительно структуры платоновской реальности. Андре Вейль предсказал существование теорий когомологий для алгебраических многообразий в конечной характеристике. Гротендик их построил, навсегда изменив наше понимание взаимосвязей между непрерывным и дискретным.

Когда Пуанкаре говорил, что решенных проблем нет, есть только проблемы, решенные в большей или меньшей степени, он подразумевал, что всякий вопрос, поставленный так, что на него можно ответить «да» или «нет», свидетельствует об узости мышления.

Начало XXI века было ознаменовано тем, что Институт Клея опубликовал список проблем тысячелетия. Их ровно семь, и каждая из них — это вопрос с ответом «да» или «нет». Впервые в таком списке фигурирует и задача, пришедшая из информатики: знаменитая P-NP гипотеза. Кроме того, на клеевских проблемах висят ярлыки с ценами: по $\$10^6$ за каждую. Ясно, что силы свободного рынка в установлении этих цен роли не играли.

2. Математика как инструмент познания

2.1. Немного истории. Древние источники по истории математики свидетельствуют, что математика как отдельный род деятельности возникла как ответ на нужды торговли и государственного управления (для обслуживания войны и крупных общественных работ): см. приведенную выше цитату о шумерской административной реформе.

В качестве другого примера обратимся к китайской книге «Девять глав о математических операциях», составленной при династии Хань в начале нашей эры (далее мы следуем докладу К. Шемлы на Берлинском международном математическом конгрессе 1998 года [7]). Книга по большей части состоит из задач с решениями, выглядящими как частные случаи общих алгоритмов, что позволяет решать аналогичные задачи с другими числовыми значениями. Согласно докладчику,

> В задачах все время встречаются конкретные вопросы, с которыми сталкивалась ханьская бюрократия, а более конкретно — вопросы, за которые отвечал «Великий Министр Сельского Хозяйства» (дасынун): оплата труда чиновников, управление зернохранилищами или установление стандартных мер для зерна. Более того, шестая из глав названа по имени экономического мероприятия, предлагавшегося Великим Министром Сельского Хозяйства Сан Хуняном (152—82 до н. э.) с целью более справедливого налогообложения. В книге приводятся математические процедуры для вычисления налогов.

Еще одно описание того, чем занимались китайские математики, приведено в [30].

> В течение всей долгой истории китайской империи математическая астрономия была единственным разделом естественных наук, пользовавшимся серьезным вниманием правителей. При каждой династии неотъемлемой частью государства была императорская обсерватория. На императора работали ученые трех специальностей: математики, астрономы и астрологи. При этом