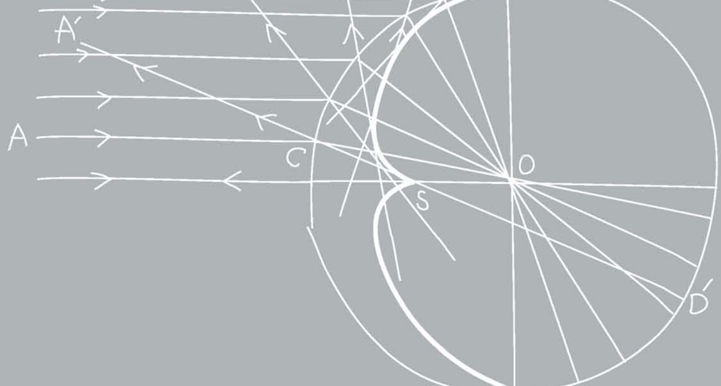
Классические

НАПРАВЛЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

В. И. АРНОЛЬД

Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений



УДК 517.9
ББК 22.161.6
А84

Арнольд В. И.
Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
379 с.
ISBN 978-5-4439-2069-6

В книге изложен ряд основных идей и методов, применяемых для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Элементарные методы интегрирования рассматриваются с точки зрения общематематических понятий (разрешение особенностей, группы Ли симметрий, диаграммы Ньютона и т. д.).

Теория уравнений с частными производными первого порядка изложена на основе геометрии контактной структуры.

Рассматриваются вопросы качественной теории дифференциальных уравнений (структурная устойчивость, У-системы), асимптотических методов (усреднение, адиабатические инварианты), аналитических методов локальной теории в окрестности особой точки или периодического решения (нормальные формы Пуанкаре), а также теории бифуркаций фазовых портретов при изменении параметров.

Книга рассчитана на широкие круги математиков — от студентов, знакомых лишь с простейшими понятиями анализа и алгебры, до преподавателей, научных работников и всех читателей, применяющих дифференциальные уравнения в физике и естественных науках.

Подготовлено на основе книги: *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — 4-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. — 384 с.: ил.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-2069-6

Оглавление

Предисловие 5

Некоторые используемые обозначения 9

Глава 1. **Специальные уравнения** 11

§ 1. Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп симметрий 11

§ 2. Разрешение особенностей дифференциальных уравнений 19

§ 3. Уравнения, не разрешенные относительно производных 25

§ 4. Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности регулярной особой точки 36

§ 5. Стационарное уравнение Шрёдингера 43

§ 6. Геометрия дифференциального уравнения второго порядка и геометрия пары полей направлений в трехмерном пространстве 55

Глава 2. **Уравнения с частными производными первого порядка** . 71

§ 7. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка 71

§ 8. Нелинейное уравнение с частными производными первого порядка 80

§ 9. Теорема Фробениуса 98

Глава 3. **Структурная устойчивость** 102

§ 10. Понятие структурной устойчивости 103

§ 11. Дифференциальные уравнения на торе 111

§ 12. Аналитическое приведение к повороту аналитических диффеоморфизмов окружности 128

§ 13. Введение в гиперболическую теорию 135

§ 14. У-системы 142

§ 15. Структурно устойчивые системы не всюду плотны 157

Глава 4. **Теория возмущений** 160

§ 16. Метод усреднения 161

§ 17. Усреднение в одночастотных системах 165

§ 18. Усреднение в многочастотных системах 170

§ 19. Усреднение в гамильтоновых системах 181

§ 20. Адиабатические инварианты 185

§ 21. Усреднение в слоении Зейферта 191

Глава 5. **Нормальные формы** 198
§ 22. Формальное приведение к линейной нормальной форме 198
§ 23. Резонансный случай 202
§ 24. Области Пуанкаре и Зигеля 205
§ 25. Нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки 210
§ 26. Нормальная форма уравнения с периодическими коэффициентами 213
§ 27. Нормальная форма окрестности эллиптической кривой 222
§ 28. Доказательство теоремы Зигеля 235

Глава 6. **Локальная теория бифуркаций** 242
§ 29. Семейства и деформации 242
§ 30. Матрицы, зависящие от параметров, и особенности декремент-диаграмм 260
§ 31. Бифуркации особых точек векторного поля 283
§ 32. Версальные деформации фазовых портретов 289
§ 33. Потеря устойчивости положения равновесия 294
§ 34. Потеря устойчивости автоколебаний 311
§ 35. Версальные деформации эквивариантных векторных полей на плоскости 330
§ 36. Перестройки топологии при резонансах 351
§ 37. Классификация особых точек 367

Образцы экзаменационных задач 373

Предисловие

Основное открытие Ньютона, то, которое он счел нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «*Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*». В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

В настоящее время теория дифференциальных уравнений представляет собой трудно обозримый конгломерат большого количества разнообразных идей и методов, в высшей степени полезный для всевозможных приложений и постоянно стимулирующий теоретические исследования во всех отделах математики.

Большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории с естественно-научными приложениями, проходит через дифференциальные уравнения. Многие разделы теории дифференциальных уравнений настолько разрослись, что стали самостоятельными науками; проблемы теории дифференциальных уравнений имели большое значение для возникновения таких наук, как линейная алгебра, теория групп Ли, функциональный анализ, квантовая механика и т. д. Таким образом, дифференциальные уравнения лежат в основе естественно-научного математического мировоззрения.

При отборе материала для настоящей книги автор старался изложить основные идеи и методы, применяемые для изучения дифференциальных уравнений. Особые усилия были приложены к тому, чтобы основные идеи, как правило простые и наглядные, не загромождались техническими деталями. С наибольшей подробностью рассматриваются наиболее фундаментальные и простые вопросы, в то время как изложение более специальных и трудных частей теории носит характер обзора.

Книга начинается с исследования некоторых специальных дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах. При этом основное внимание уделяется не формально-рецептурной стороне элементарной теории интегрирования, а ее связям с общематематическими идеями, методами и понятиями (разрешение особенностей, группы Ли, диаграммы Ньютона), с одной стороны, и естественно-научным приложениям — с другой.

Теория уравнений с частными производными первого порядка рассматривается при помощи естественной контактной структуры в многообразии 1-струй функций. Попутно излагаются необходимые элементы геометрии контактных структур, делающие всю теорию независимой от других источников.

Значительную часть книги занимают методы, обычно называемые качественными. Современное развитие основанной А. Пуанкаре качественной теории дифференциальных уравнений привело к пониманию того, что, подобно тому как явное интегрирование дифференциальных уравнений, вообще говоря, невозможно, невозможным оказывается и качественное исследование сколько-нибудь общих дифференциальных уравнений с многомерным фазовым пространством. В книге обсуждается анализ дифференциальных уравнений с точки зрения структурной устойчивости, т. е. устойчивости качественной картины по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений. Изложены основные результаты, полученные после первых работ А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина в этой области: начала теории структурно устойчивых У-систем Аносова, все траектории которых экспоненциально неустойчивы, и теорема Смейла о неплотности множества структурно устойчивых систем. Обсуждается также вопрос о значении этих математических открытий для приложений (речь идет об описании устойчивых хаотических режимов движения, вроде турбулентных).

К наиболее мощным и часто применяемым методам исследования дифференциальных уравнений относятся различные асимптотические методы. В книге изложены основные идеи метода усреднения, восходящего к работам основоположников небесной механики и широко используемого во всех областях приложений, где нужно отделить медленную эволюцию от быстрых осцилляций (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский и др.).

Несмотря на обилие исследований по усреднению, в вопросе об эволюции даже для простейших многочастотных систем далеко не все ясно. В книге дается обзор работ о прохождении резонансов и о захвате в резонанс, направленных к выяснению этого вопроса.

Основой метода усреднения является идея уничтожения возмущений посредством подходящего выбора системы координат. Эта же идея лежит в основе теории нормальных форм Пуанкаре. Метод нормальных форм является основным методом локальной теории дифференциальных уравнений, описывающей поведение фазовых кривых в окрестности особой точки или замкнутой фазовой кривой. В книге изложены основы метода нормальных форм Пуанкаре, включая доказательство фундаментальной теоремы Зигеля о линеаризации голоморфного отображения.

Важные применения метод нормальных форм Пуанкаре находит не только при исследовании отдельного дифференциального уравнения, но и в теории бифуркаций, когда предметом изучения является семейство уравнений, зависящих от параметров.

Теория бифуркаций изучает изменения качественной картины при изменении параметров, от которых зависит система. При общих значениях параметров обычно приходится иметь дело с системами общего положения (все особые точки простые и т. д.). Однако если система зависит от параметров, то при некоторых значениях параметров неизбежно встречаются вырождения (например, слияние двух особых точек векторного поля).

В однопараметрическом семействе общего положения встречаются лишь простейшие вырождения (те, от которых нельзя избавиться малым шевелением семейства). Таким образом возникает иерархия вырождений по коразмерностям соответствующих поверхностей в функциональном пространстве всех изучаемых систем: в однопараметрических семействах общего положения встречаются лишь вырождения, соответствующие поверхностям коразмерности один, и т. д.

В последние годы в теории бифуркаций наблюдается значительный прогресс, связанный с применением идей и методов общей теории особенностей дифференцируемых отображений Х. Уитни.

Книга заканчивается главой о теории бифуркаций, в которой применяются развитые в предыдущих главах методы и описаны результаты, полученные в этой области, начиная с основополагающих работ А. Пуанкаре и А. А. Андронова.

При изложении всех вопросов автор стремился избежать аксиоматически-дедуктивного стиля, характерным признаком которого являются немотивированные определения, скрывающие фундаментальные идеи и методы; подобно притчам, их разъясняют лишь ученикам наедине.

Продолжающаяся, как утверждают, уже более 50 лет аксиоматизация и алгебраизация математики привела к неудобочитаемости столь большого числа математических текстов, что стала реальностью всегда угрожающая математике угроза полной утраты контакта с физикой и естественными науками. Автор старался вести изложение таким образом, чтобы книгой могли пользоваться не только математики, но все потребители теории дифференциальных уравнений.

У читателя настоящей книги предполагается лишь очень небольшие общематематические представления в объеме примерно первых двух курсов университетской программы; достаточно (но не необходимо), например, знакомство с учебником В. И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (М., 1975*).

Изложение построено таким образом, чтобы читатель мог пропускать места, оказавшиеся для него трудными, без большого ущерба для понимания дальнейшего: были приняты меры к тому, чтобы по возможности избегать ссылок из главы в главу и даже из параграфа в параграф.

Содержание настоящей книги составил материал ряда обязательных и специальных курсов, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ в 1970—1976 годах для студентов-математиков II—III курсов, для слушателей факультета повышения квалификации и на экспериментальном потоке математиков естественно-научного профиля.

Автор выражает благодарность студентам О. Е. Хадину, А. К. Ковальджи, Е. М. Кагановой и доценту Ю. С. Ильяшенко, чьи конспекты были очень полезными при подготовке этой книги. Составленный Ю. С. Ильяшенко конспект специального курса, а также конспекты лекций на экспериментальном потоке в течение ряда лет находились в библиотеке факультета. Автор благодарен многочисленным читателям и слушателям этих курсов за ряд ценных замечаний, использованных при подготовке книги. Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и В. А. Плиссу за тщательное рецензирование рукописи, способствовавшее ее улучшению.

Июнь 1977 г. *В. И. Арнольд*

---

* При изложении нескольких отдельных вопросов используются или упоминаются также самые первоначальные сведения о дифференциальных формах, группах Ли и функциях комплексного переменного. Для понимания большей части книги знакомство с этими сведениями не обязательно.

Некоторые используемые обозначения

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное линейное пространство.

$\exists$ — существует.

$\forall$ — для всякого.

$a \in A$ — элемент a множества A.

$A \subset B$ — подмножество A множества B.

$A \cap B$ — пересечение (общая часть) множеств A и B.

$A \cup B$ — объединение множеств A и B.

$A \setminus B$ — разность множеств A и B (часть A вне B).

$A \times B$ — прямое произведение множеств A и B (множество пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$).

$A \oplus B$ — прямая сумма линейных пространств.

$f\colon A \to B$ — отображение f из A в B.

$x \mapsto y$ или $y = f(x)$ — отображение f переводит элемент x в элемент y.

$\operatorname{Im} f$ или $f(A)$ — образ отображения f (но $\operatorname{Im} z$ — мнимая часть z).

$f^{-1}(y)$ — полный прообраз точки y при отображении f (множество всех x, для которых $f(x) = y$).

$\operatorname{Ker} f$ — ядро линейного оператора f (полный прообраз нуля).

$\dot{f}$ — скорость изменения функции f (производная по времени t).

f', f_*, df/dx, Df/Dx — производная отображения f.

$T_x M$ — касательное пространство к многообразию M в точке x.

$A \Rightarrow B$ — из утверждения A следует B.

$A \Leftrightarrow B$ — утверждения A и B равносильны.

$\omega_1 \wedge \omega_2$ — внешнее произведение дифференциальных форм ω_1 и ω_2.

$f \circ g$ — суперпозиция отображений $((f \circ g)(x) = f(g(x)))$.

$L_v f$ — производная функции f по направлению векторного поля v.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — координатные функции. Вектор v задается тогда своими компонентами $v_1, \ldots, v_n$. Производная по направлению поля v задается формулой

$$L_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

При фиксированной системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ используются следующие обозначения:

dx_k — функция от вектора, равная его k-й компоненте.

$\frac{\partial}{\partial x_k}$ — векторное поле, k-я компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны нулю.

Для дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ область определения правой части называется *фазовым пространством*, точка x называется *фазовой точкой*, вектор $v(x)$ называется *вектором фазовой скорости*, v называется *векторным полем фазовой скорости*. Если $x = \varphi(t)$ — решение уравнения, то образ отображения φ называется *фазовой кривой*, а график отображения φ — *интегральной кривой*.

Для дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x, t)$ область определения правой части называется *расширенным фазовым пространством*; v задает в расширенном фазовом пространстве поле направлений; если $x = \varphi(t)$ — решение, то график отображения φ называется *интегральной кривой*.

Глава 1

Специальные уравнения

При исследовании дифференциальных уравнений применяются методы всех отделов математики. В настоящей главе обсуждаются отдельные специальные уравнения и типы уравнений. Особое внимание обращается, с одной стороны, на значение рассматриваемых уравнений для приложений, а с другой — на связи методов исследования с различными общематематическими вопросами (разрешение особенностей, диаграммы Ньютона, группы Ли симметрий и т. д.). Глава заканчивается элементарной теорией стационарного одномерного уравнения Шрёдингера и геометрической теорией нелинейного уравнения второго порядка.

§ 1. Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп симметрий

В этом параграфе изложены общие соображения, на которых основаны методы интегрирования дифференциальных уравнений в явном виде. В качестве примера обсуждается теория подобия, т. е. теория однородных и квазиоднородных уравнений.

A. Группы симметрий дифференциальных уравнений

Рассмотрим векторное поле v в фазовом пространстве U.

Определение. Диффеоморфизм $g\colon U \to U$ называется *симметрией поля v*, если он переводит поле v в себя:

$$v(gx) = g_{*x}v(x).$$

Поле v называется тогда *инвариантным* относительно диффеоморфизма g.

Пример 1. Векторное поле с независящими от x компонентами на плоскости с координатами (x, y) инвариантно относительно сдвигов вдоль оси x (рис. 1).

Пример 2. Векторное поле $x\partial_x + y\partial_y$ на евклидовой плоскости (x, y) инвариантно относительно растяжений $g(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ и относительно поворотов.

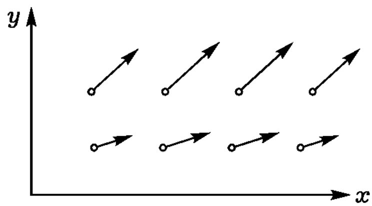


Рис. 1

Все симметрии данного поля образуют группу.

Задача. Найти группу симметрии поля $x\partial_x + y\partial_y$ на плоскости с координатами (x, y).

Рассмотрим поле направлений в расширенном фазовом пространстве.

Определение. Диффеоморфизм расширенного фазового пространства называется *симметрией поля направлений*, если он переводит поле в себя. Поле направлений называется тогда *инвариантным* относительно этого диффеоморфизма.

Пример 1. Поле направлений уравнения $\dot{x} = v(x)$ инвариантно относительно сдвигов вдоль оси t (рис. 2*а*).

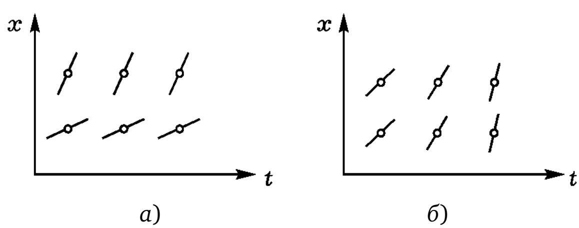


Рис. 2

Пример 2. Поле направлений уравнения $\dot{x} = v(t)$ инвариантно относительно сдвигов вдоль оси x (рис. 2*б*).

Определение. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ (соответственно, $\dot{x} = v(x, t)$) называется *инвариантным* относительно диффеоморфизма g фазового пространства (соответственно, расширенного фазового пространства), если векторное поле v (соответственно, поле направлений v) инвариантно относительно этого диффеоморфизма g; диффеоморфизм g называется тогда *симметрией* данного уравнения.

Теорема. *Симметрия уравнения переводит фазовые (интегральные) кривые уравнения в фазовые (интегральные) кривые того же уравнения.*

Доказательство. Пусть $x=\varphi(t)$ — решение уравнения $\dot{x}=v(x)$ и g — симметрия. Тогда $x=g(\varphi(t))$ — тоже решение, поэтому симметрия переводит фазовую кривую в фазовую кривую. Для интегральных кривых доказательство аналогично. □

Пример. Семейство интегральных кривых уравнения $\dot{x}=v(t)$ переходит в себя при сдвигах вдоль оси x, а уравнения $\dot{x}=v(x)$ — при сдвигах вдоль оси t.

Следующие примеры часто встречаются в приложениях под названием «теории подобия», «теории размерностей» или «соображений автомодельности».

Б. Однородные уравнения

Определение. Поле направлений на плоскости без точки O называется *однородным,* если оно инвариантно относительно всех растяжений

$$g^{\lambda}(x,y)=(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

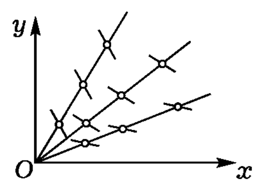


Рис. 3

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=v(x,y)$$

называется *однородным,* если его поле направлений однородно (рис. 3).

Иными словами, направления поля во всех точках каждого луча, выходящего из начала координат, должны быть параллельны:

$$v(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y)\equiv v(x,y).$$

Пример. Функция f называется однородной степени d, если

$$f(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y)\equiv e^{\lambda d}f(x,y).$$

Примером является любая форма (однородный многочлен) степени d. Пусть P и Q — две формы степени d от x и y. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=P, \quad \dot{y}=Q$$

задается векторным полем на плоскости. Соответствующее поле направлений в области $P\neq 0$ является полем направлений однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P} \quad \text{(например, } \frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ и т. п.).}$$

Замечание. Областью определения однородного поля не обязательно должна быть вся плоскость без точки O — однородные поля можно рассматривать в любой однородной (= инвариантной относительно растяжений) области, например в угле с вершиной O и т. п.

Теорема. *Интегральная кривая однородного уравнения под действием растяжений g^λ переходит в интегральную кривую того же уравнения.*

Таким образом, для исследования однородного уравнения достаточно исследовать по одной интегральной кривой в каждом секторе плоскости.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы п. А.

Задача. Докажите, что фазовые кривые системы $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$, где P и Q формы степени d, получаются друг из друга при помощи гомотетий (рис. 4).

Если какая-либо из этих кривых замкнута и проходится за время T, то при растяжении g^λ из нее получится замкнутая фазовая кривая с периодом обращения $\frac{T}{e^{\lambda(d-1)}}$.

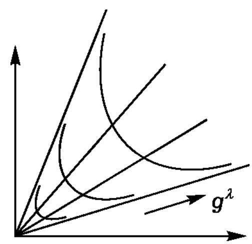


Рис. 4

B. Квазиоднородные уравнения и «соображения размерностей»

Зафиксируем вещественные числа α и β и рассмотрим семейство растяжений в разное число раз по разным направлениям на плоскости

$$g^s(x, y) = (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y). \tag{1}$$

Заметим, что формула (1) задает однопараметрическую группу линейных преобразований плоскости (рис. 5).

Определение. Функция f называется *квазиоднородной степени d*, если

$$f(g^s(x, y)) \equiv e^{ds}f(x, y).$$

Пример. Если $\alpha = \beta = 1$, то получаются обычные однородные функции степени d.

Квазиоднородные степени складываются при умножении функций. Они называются также *весами*. Таким образом, x имеет вес α,

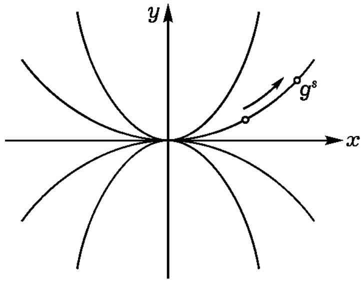


Рис. 5

y — вес β, x^2y — вес $2\alpha+\beta$ и т. д. Все квазиоднородные одночлены фиксированной степени легко увидеть на следующей *диаграмме Ньютона* (рис. 6). Будем изображать одночлен x^py^q точкой (p, q) на квадранте целочисленной решетки. Тогда показатели всех одночленов степени d — это целые точки на отрезке с уравнением $d=\alpha p+\beta q$ на плоскости показателей (p, q).

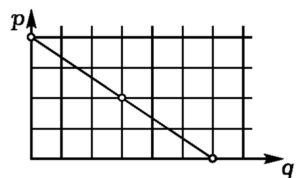


Рис. 6

Задача. Подобрать веса так, чтобы функция x^2+xy^3 была квазиоднородной.

Определение. Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx}=v(x, y)$ называется *квазиоднородным* (*с весами* α, β), если поле направлений v инвариантно относительно растяжений (1).

Из общей теоремы п. A о симметриях вытекает

Теорема. *Интегральные кривые квазиоднородного уравнения получаются друг из друга под действием растяжений* (1).

Задача. Докажите, что функция $v(x, y)$ задает квазиоднородное дифференциальное уравнение (с весами (α, β)), если и только если она квазиоднородная степени $d=\beta-\alpha$.

Замечание. Приведенные определения и теоремы легко переносятся на случай большего двух числа переменных и на дифференциальные уравнения порядка выше 1. В частности, легко доказывается

Теорема. *Пусть на плоскости* (x, y) *дана кривая* $\gamma: y=y(x)$, *и в точке* (x_0, y_0) *имеем* $\dfrac{d^ky}{dx^k}=F$. *Тогда для кривой* $g^s\gamma$ *в соответствую-*

щей точке будет

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{(\beta - k\alpha)s} F.$$

Иными словами, $\dfrac{d^k y}{dx^k}$ *преобразуется при преобразовании* (1) *как* $\dfrac{y}{x^k}$, чем и объясняется удобство обозначения $\dfrac{d^k y}{dx^k}$.

Задача. Докажите, что если частица в силовом поле с однородной степени d силой проходит траекторию Γ за время T, то эта же частица пройдет гомотетичную траекторию $\lambda\Gamma$ за время

$$T' = \lambda^{(1-d)/2} T.$$

Решение. Уравнение Ньютона $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$, в котором F однородна степени d, переходит в себя при подходящих преобразованиях (1). Именно, для этого нужно взять веса α (для x) и β (для t) так, чтобы $\alpha - 2\beta = \alpha d$. Итак, $\beta = \dfrac{1-d}{2}\alpha$. Поэтому растяжению $x' = \lambda x$ соответствует $T' = \lambda^{(1-d)/2} T$.

Задача. Докажите третий закон Кеплера: квадраты времен прохождения подобных траекторий в поле тяготения относятся как кубы линейных размеров.

Решение. Из решения предыдущей задачи при $d = -2$ (закон всемирного тяготения) получаем $T' = \lambda^{3/2} T$.

Задача. Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний в случае возвращающей силы, пропорциональной отклонению (линейный осциллятор) и кубу отклонения (мягкая сила).

Ответ. Для линейного маятника период не зависит от амплитуды, а для мягкого обратно пропорционален амплитуде.

Задача. Известно, что волчок с вертикальной осью имеет критическую угловую скорость: если угловая скорость больше критической, волчок стоит вертикально устойчиво, а если меньше — то падает.

Как изменится критическая угловая скорость, если перенести волчок на Луну, где ускорение силы тяжести в шесть раз меньше земного?

Ответ. Уменьшится в $\sqrt{6}$ раз.

Г. Применения однопараметрических групп симметрий к понижению порядка

Теорема. *Если известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений в* $\mathbb{R}^n$, *то задача интегрирования соответствующего дифференциального уравнения сводится к задаче интегрирования уравнения в* $\mathbb{R}^{n-1}$.

В частности, если известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений на плоскости, то соответствующее уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ *интегрируется явно.*

Доказательство. Пусть $\{g^s\}$ — данная группа симметрий. Рассмотрим орбиты $\{g^s x\}$ потока $\{g^s\}$. Можно (по меньшей мере локально) определить $(n-1)$-мерное *пространство орбит* (факторпространство по действию g^s) и отображение p исходного пространства на факторпространство (орбиты потока $\{g^s\}$ p переводит в точки). Оказывается, исходное поле направлений переходит при отображении p в некоторое новое поле направлений в $(n-1)$-мерном пространстве орбит; его только и остается проинтегрировать. □

Точнее говоря, рассмотрим какую-нибудь точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$; мы предполагаем, что проходящая через точку x_0 орбита группы симметрий $\{g^s\}$ является кривой σ. Проведем через точку x_0 какую-либо $(n-1)$-мерную локальную трансверсаль Σ к кривой σ. В окрестности точки x_0 введем локальную систему координат (s, u), где паре $s \in \mathbb{R}$, $u \in \Sigma$ отвечает точка $g^s u$ исходного пространства. Тогда отображение p проектирования на пространство орбит и действие группы симметрий g^s задаются в окрестности точки x_0 формулами

$$p(s, u) = u, \quad g^{s_1}(s_2, u) = (s_1 + s_2, u)$$

(точки поверхности Σ параметризуют локальные орбиты).

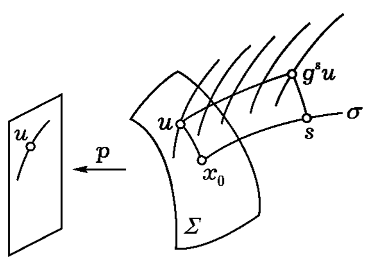


Рис. 7

Заметим, что если группа g^s явно известна, то координаты (s, u) можно явно найти. Запишем в этих координатах наше исходное дифференциальное уравнение. Если наше поле направлений в точке x_0 не касается поверхности Σ (чего всегда можно добиться выбором Σ), то в окрестности этой точки наше уравнение принимает вид

$$\frac{du}{ds} = v(s, u).$$

При этом группа симметрий $\{g^s\}$ имеет вид сдвигов вдоль оси s, поэтому *функция v от s не зависит*. Векторное поле $v(u)$ на Σ определяет на этой $(n-1)$-мерной поверхности поле направлений; зная его интегральные кривые, мы найдем (квадратурой) решения уравнения $\frac{du}{ds}=v(u)$, а значит — интегральные кривые исходного уравнения.

В частном случае $n=2$ выбор координат (s,u) сразу приводит к интегрируемому уравнению $\frac{du}{ds}=v(u)$.

Замечание. Практически часто бывает удобно вместо координаты s использовать подходящую функцию z переменной s. В такой системе координат уравнение, допускающее группу симметрий $\{g^s\}$, будет записываться в виде уравнения

$$\frac{du}{dz}=v(u)f(z)$$

(в случае $n=2$ — в виде уравнения с разделяющимися переменными).

Пример. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными в полярной системе координат, а также в системе координат $u=y/x$, $z=x$ (рис. 8 *а*).

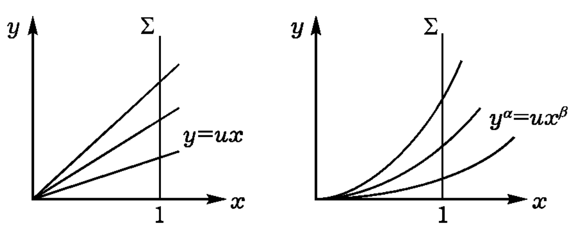
Здесь $\{g^s\}$ — однопараметрическая группа растяжений в e^s раз; Σ для полярной системы — окружность $x^2+y^2=1$, а для второй системы координат — прямая $x=1$; $z=e^s$.

Задача. В каких координатах интегрируется явно квазиоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=v(x,y),$$

где вес x равен α, вес y равен β (так что v — квазиоднородная функция степени $\beta-\alpha$).

Решение. Можно взять $u=\frac{y^\alpha}{x^\beta}$, $z=x$ (в области, где $x\neq0$). См. рис. 8 *б*.



а) *б*)

Рис. 8

Задача. Выписать явно уравнение с разделяющимися переменными, к которому приводится уравнение предыдущей задачи в координатах (u,z).

Решение. $y^\alpha = ux^\beta$, поэтому $\alpha y^{\alpha-1}\,dy = x^\beta\,du + \beta ux^{\beta-1}\,dx$. Если $dy = v\,dx$, то $\alpha y^{\alpha-1} v\,dx = x^\beta\,du + \beta ux^{\beta-1}\,dx$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha y^{\alpha-1}v - \beta ux^{\beta-1}}{x^\beta}.$$

Но $v(x, y) = x^{(\beta/\alpha)-1}w(u)$, поэтому

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha w(u) - \beta u}{x}.$$

§ 2. Разрешение особенностей дифференциальных уравнений

Здесь коротко описан один важный общематематический прием, называемый разрешением особенностей, раздутием или σ-процессом.

A. σ-процесс

Вблизи неособой точки все векторные поля устроены просто и одинаково.

Для исследования мелких деталей всевозможных математических объектов вблизи особых точек разработан специальный аппарат, имеющий, подобно микроскопу, большую разрешающую силу — т. н. *разрешение особенностей*. С аналитической точки зрения речь идет о выборе таких систем координат вблизи особой точки, в которых малым перемещениям вблизи особенности соответствуют большие изменения координат.

Этим свойством обладает уже полярная система координат, но переход к полярным координатам требует трансцендентных (тригонометрических) функций, поэтому алгебраически часто удобнее другая процедура — так называемый σ-процесс, или раздутие особенности.

Мы начнем с одной вспомогательной конструкции. Пусть p: $\mathbb{R}^2 \setminus O \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ — стандартное расслоение, определяющее проективную прямую. (Проективная прямая — это многообразие, точками которого являются прямые на плоскости, проходящие через начало координат. Отображение p сопоставляет точке плоскости прямую, соединяющую ее с началом координат.)

Рассмотрим *график* Γ отображения p. Этот график представляет собой гладкую поверхность в прямом произведении $(\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ (рис. 9). Вкладывая плоскость без точки в плоскость, мы можем рас-

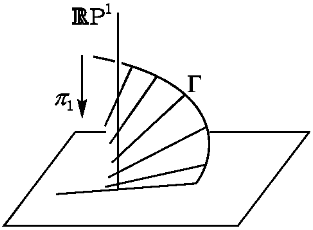


Рис. 9

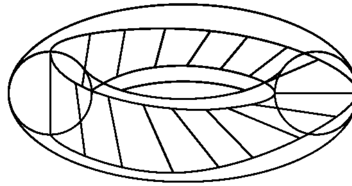


Рис. 10

сматривать график как гладкую поверхность Г в прямом произведении $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Естественная проекция $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфно отображает график Г на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus O$. (Чтобы яснее представить себе все это, полезно заметить, что Г локально имеет вид винтовой лестницы; в целом проективная прямая диффеоморфна окружности S^1, а произведение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ диффеоморфно внутренности баранки.)

Теорема. *Замыкание графика* Г *отображения* p *в* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ *является гладкой поверхностью* $\Gamma_1 = \Gamma \cup (O \times \mathbb{R}P^1)$. *Поверхность* Γ_1 *диффеоморфна листу Мёбиуса* (рис. 10).

Доказательство. Пусть (x, y) — координаты на плоскости, $u = y/x$ — аффинная локальная координата в $\mathbb{R}P^1$. Тогда (x, y, u) — локальная система координат в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. В этой системе координат Г задается уравнением $y = ux$, $x \neq 0$, поэтому Γ_1 в этой системе координат задается локальным уравнением $y = ux$. Эта поверхность гладкая; она получается добавлением к части Г, покрытой нашей системой координат, попавшей туда части проективной прямой $O \times \mathbb{R}P^1$.

Доказательство гладкости Γ_1 завершается рассмотрением второй локальной системы координат (x, y, v), где $x = vy$.

Проекция $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ расслаивает Γ_1 на прямые. При полном обходе окружности $\mathbb{R}P^1$ соответствующая прямая на $\mathbb{R}^2$ поворачивается на угол π; отсюда следует, что Γ_1 — лист Мёбиуса. □

Определение. Переход от $\mathbb{R}^2$ к Γ_1 называется *σ-процессом с центром O*, или *раздутием* точки O в прямую $O \times \mathbb{R}P^1$. Отображение $\pi_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^2$ называется *анти-сигма-процессом* или *сжатием* окружности $O \times \mathbb{R}P^1$ в точку O.

Отображение $\pi_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^2$, суженное на Г, является диффеоморфизмом на проколотую плоскость. Поэтому всевозможные геометрические объекты на плоскости, имеющие особенность в точке O, переносятся на Γ_1. При этом особенности могут упрощаться или «разрешаться».

Пример. Рассмотрим три прямые, проходящие через точку O. На Γ_1 им соответствуют три прямые, пересекающие $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ уже в разных точках (рис. 11).

Задача. Рассмотрим две кривые, имеющие в точке O касание порядка n (например, $y=0$ и $y=x^2$, $n=2$). Доказать, что на Γ_1 им соответствуют две кривые, имеющие в соответствующей точке O_1 касание порядка $n-1$ (рис. 12).

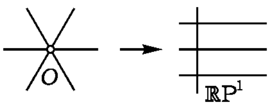


Рис. 11

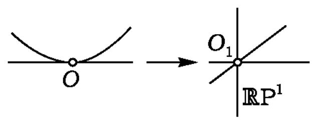


Рис. 12

Если после σ-процесса особенности не сводятся к трансверсальным пересечениям, то можно сделать еще σ-процесс в полученных особых точках, и т. д., пока все не сведется к трансверсальным пересечениям. Можно доказать, что особенности всякой алгебраической кривой могут быть таким образом разрешены (сведены к трансверсальным пересечениям) за конечное число шагов.

Задача. Разрешить особенность кривой $x^2=y^3$.

Ответ. См. рис. 13.

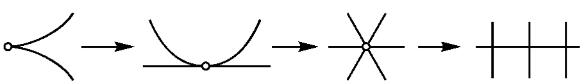


Рис. 13

Б. Формулы разрешения

Практически σ-процесс означает переход от координат (x, y) к координатам $(x, u=y/x)$ там, где $x\neq 0$, и к координатам $(v=x/y, y)$ там, где $y\neq 0$ (рис. 14). Посмотрим, что происходит при этом с дифференциальным уравнением, заданным векторным полем на плоскости (x, y). Мы будем предполагать, что точка O — особая точка нашего векторного поля.

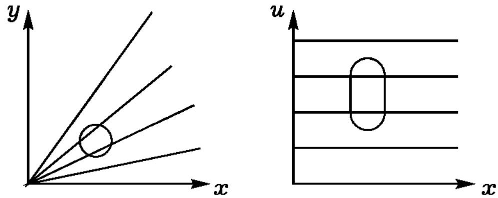


Рис. 14

Теорема. *Гладкое векторное поле w с особой точкой O превращается после σ-процесса в векторное поле на Γ, продолжающееся до гладкого поля на Γ_1.*

Доказательство. Пусть w — поле, задающее систему $\dot{x}=P(x, y)$, $\dot{y}=Q(x, y)$. В координатах $(x, u=y/x)$ находим

$$\dot{x} = P(x, ux), \quad \dot{u} = \frac{Q(x, ux) - uP(x, ux)}{x}.$$

Правые части гладкие, так как $P(0, 0)=Q(0, 0)=0$. Во второй системе координат $(v=x/y, y)$ тоже получится гладкое поле. □

Замечание. Может оказаться, что полученное векторное поле обращается в нуль на всей вклеенной при σ-процессе прямой. В таком случае поле можно поделить на x в области первой системы координат и на y в области второй. Деление не меняет направлений векторов поля. Поэтому на Γ_1 возникает поле направлений с особыми точками, лежащими на вклеенной прямой, но не заполняющими ее целиком. В окрестности каждой особой точки поле направлений задается гладким векторным полем.

Каждому «направлению входа» фазовых кривых исходного поля в O соответствует особая точка полученного поля, лежащая на вклеенной при σ-процессе прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

Если эти особые точки O_i устроены недостаточно просто, можно сделать в них σ-процессы. Продолжая таким же образом, можно в конце концов прийти к случаю, когда хотя бы одно из собственных чисел линеаризации поля в каждой особой точке отлично от нуля.

Во многих случаях уже первый σ-процесс позволяет разобраться в поведении фазовых или интегральных кривых вблизи особой точки. Например, интегральные кривые однородного уравнения переходят при наших заменах координат $(x, y) \mapsto (x, u=y/x)$ в интегральные кривые уравнений с разделяющимися переменными.

B. Пример. Исследование маятника с трением

Проиллюстрируем метод на тривиальном примере линейного уравнения. Уравнение маятника с коэффициентом трения k имеет вид $\ddot{x}+k\dot{x}+x=0$. Уравнение эквивалентно системе с фазовой плоскостью (x, y):

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-ky-x.$$

Мы приходим к однородному уравнению

$$\frac{dy}{dx}=-k-\frac{x}{y}.$$

Согласно общей теории, после σ-процесса, т. е. в системе координат $(x, u=y/x)$, переменные должны разделяться. Действительно, $\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+ku+1}{ux}$. Вводя еще $\ln|x|=z$, получаем

$$\frac{du}{dz}=-k-\left(u+\frac{1}{u}\right).$$

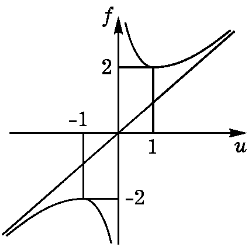


Рис. 15

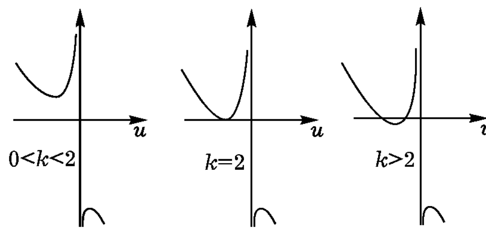


Рис. 16

Исследуем интегральные кривые этого уравнения при различных значениях коэффициента $k>0$. График функции $f=u+\frac{1}{u}$ — гипербола (рис. 15). Следовательно, график функции $-k-f(u)$ имеет вид, изображенный на рис. 16. Соответственно, интегральные кривые уравнения $\frac{du}{dz}=-k-f(u)$ будут иметь вид, изображенный на рис. 17. Возвращаясь на фазовую плоскость (x, y), получаем рис. 18.

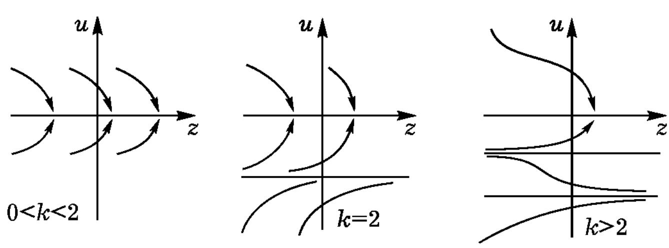


Рис. 17

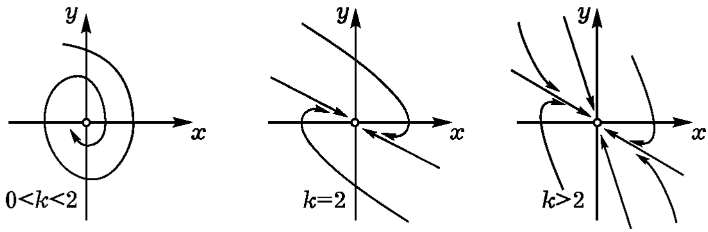


Рис. 18

Итак, при малых значениях коэффициента трения ($0<k<2$) маятник совершает бесконечное число колебаний, а при $k \geqslant 2$ направление движения маятника меняется не более одного раза.

Задача. Построить фазовые кривые уравнений $\dot{z}=az^n$ и $\dot{z}=a\bar{z}^{\,n}$, $z\in\mathbb{C}$.

Г. Пример. Период малых колебаний

Теорема. *Предположим, что все фазовые кривые, проходящие через близкие к положению равновесия O точки, замкнуты. Тогда предел периода колебаний вблизи O при стремлении амплитуды колебаний к 0 равен периоду колебаний в линеаризованной системе.*

Доказательство. После σ-процесса замкнутые фазовые кривые, обходящие один раз вокруг O, перейдут в кривые на листе Мёбиуса, замыкающиеся после двух оборотов; стремление амплитуды колебаний к 0 соответствует стремлению фазовой кривой на листе Мёбиуса к вклеиваемой при σ-процессе проективной прямой (к средней линии листа Мёбиуса).

По теореме о непрерывной зависимости решения от начального условия предел периода колебаний при стремлении амплитуды к 0 равен удвоенному периоду обращения по вклеенной прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ в системе, полученной при σ-процессе. Но скорости движения по вклеенной прямой для данного поля и для его линеаризации одинаковы (см. уравнение для $\dot{u}$ в п. Б). Легко проверить, что все фазовые кривые линеаризованного уравнения замкнуты. Эти замкнутые кривые в линейной системе проходятся за одинаковое время, так как линейное векторное поле переходит в себя при растяжениях фазовой плоскости. Следовательно, предел периода колебаний в исходной системе равен пределу периода колебаний в линеаризованной системе и, значит, равен просто периоду колебаний в линеаризованной системе. □

Замечание. Предел, о котором шла речь, называется *периодом малых колебаний*.

Задача. Вычислить период малых колебаний маятника $\ddot{x}=-\sin x$ вблизи положения равновесия $x=0$.

§ 3. Уравнения, не разрешенные относительно производных

В этом параграфе основные понятия теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, рассматриваются с точки зрения общей теории особенностей гладких отображений и геометрии пространства струй.

А. Основные определения

Речь идет об уравнении

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

где $p = \dfrac{dy}{dx}$.

Примеры. 1) $p^2 = x$; 2) $p^2 = y$; 3) $y = px + p^2$.

Трехмерное пространство с координатами (x, y, p) называется *пространством* 1*-струй функций* $y(x)$. (Две гладкие функции y_1, y_2 имеют в точке x_0 одинаковую k-струю, если $|y_1(x) - y_2(x)| = o(|x - x_0|^k)$; таким образом, 1-струя функции определяется выбором точки x, выбором значения y функции в этой точке и выбором значения p производной.)

Уравнение (1) задает в пространстве струй поверхность. Оказывается, на этой поверхности возникает поле направлений. Вот как оно строится. Рассмотрим какую-либо точку в пространстве струй. Компоненты вектора ξ, приложенного в этой точке, будем обозначать $dx(\xi)$, $dy(\xi)$, $dp(\xi)$. Таким образом, dx, dy и dp — это не какие-то мистические бесконечно малые величины, а вполне определенные линейные функции от вектора ξ.

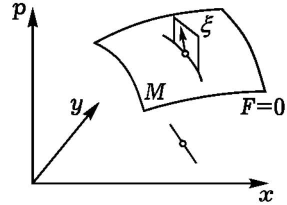


Рис. 19

В точке (x, y, p) пространства струй рассмотрим плоскость, составленную из векторов ξ, для которых $dy = p\,dx$. Иными словами, вектор ξ, приложенный в точке (x, y, p), попадает в указанную плоскость (рис. 19), если его проекция на евклидову плоскость (x, y) имеет направление с тангенсом угла наклона к оси x, равным p. Построенная плоскость называется *контактной плоскостью*. Таким образом, в каждой точке пространства 1-струй приложена контактная плоскость; все вместе они образуют контактное поле плоскостей (или, как еще говорят, контактную структуру) в пространстве 1-струй.

Задача*. Существуют ли поверхности в пространстве 1-струй, касающиеся в каждой своей точке приложенной в этой точке контактной плоскости?

Ответ. Нет.

Предположим, что поверхность в пространстве 1-струй, заданная уравнением (1), гладкая. (Это — не очень большое ограничение, так как для гладкой (= бесконечно дифференцируемой) функции F общего положения значение 0 не критическое и множество уровня 0 гладкое; если для данной функции это не так, то при почти всяком сколь угодно малом изменении функции F множество уровня 0 становится гладким: например, достаточно прибавить к F малую константу (см. теорему Сарда, § 10 п. E).)

Рассмотрим какую-либо точку на гладкой поверхности M, заданной уравнением (1), и предположим, что в этой точке касательная плоскость к поверхности не совпадает с контактной плоскостью. Тогда эти две плоскости пересекаются по прямой. Более того, касательные и контактные плоскости во всех близких точках поверхности пересекаются по прямым, так что в окрестности рассматриваемой точки возникает поле направлений на M.

Интегральными кривыми уравнения (1) называются интегральные кривые полученного поля направлений на поверхности M. Решить (или исследовать) уравнение (1) — значит найти (или исследовать) эти кривые. Связь интегральных кривых на M с графиками решений уравнения (1) на плоскости (x, y) обсуждается ниже; подчеркнем, что интегральные кривые на M определяются не в терминах решений уравнения (1), а в терминах контактных плоскостей.

Б. Регулярные точки и дискриминантная кривая

Направление оси p в пространстве струй будем называть *вертикальным направлением*. Пусть M — гладкая поверхность в пространстве струй, заданная уравнением (1). Рассмотрим отображение проектирования вдоль вертикального направления

$$\pi\colon M \to \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, p) = (x, y).$$

Определение. Точка поверхности M называется *регулярной*, если она не является критической точкой отображения π.