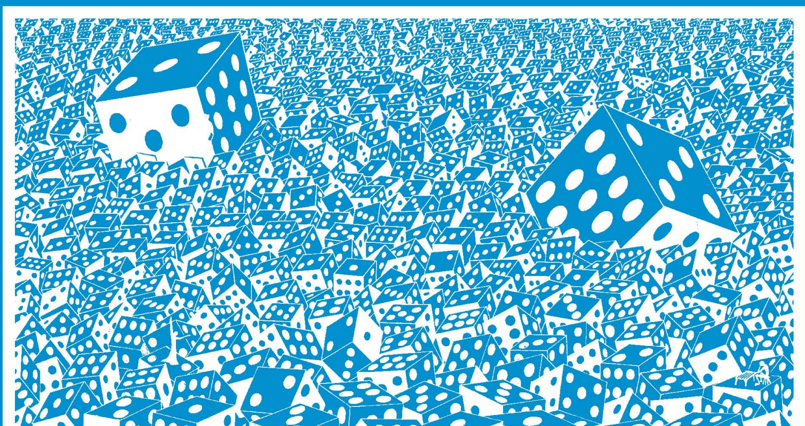
Й. СТОЯНОВ

КОНТРПРИМЕРЫ в теории вероятностей



УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
С82

Стоянов Й.
Контрпримеры в теории вероятностей
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
294 с.
ISBN 978-5-4439-2040-5

Книга содержит около 300 разнообразных контрпримеров и примеров, относящихся к основным разделам теории вероятностей и случайных процессов. Во второе издание добавлен новый материал, расширен список литературы. Книгу можно активно использовать при изучении теории вероятностей и случайных процессов.

Предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

Подготовлено на основе книги: *Й. Стоянов.* Контрпримеры в теории вероятностей. — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2040-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство
$\mathsf{E}X$, $\mathsf{D}X$ — математическое ожидание и дисперсия величины X
$\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, — n-мерное евклидово пространство
$\mathcal{B}^n$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\widetilde{\mathbb{N}}$ — множество целых чисел: $\widetilde{\mathbb{N}} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
I_A, $I(A)$ — индикаторная функция множества A
$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ — нормальное распределение с параметрами a и σ^2
$X \sim F$ — случайная величина X имеет распределение F
Φ — стандартная нормальная функция распределения
$F_1 * F_2$ — свертка функций распределения F_1 и F_2
$x \vee y$ — максимум величин x и y: $\max(x, y)$
$x \wedge y$ — минимум величин x и y: $\min(x, y)$
$\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ — логические импликации
$\downarrow$ — монотонное убывание
п. н. — почти наверное
б. ч. — бесконечно часто
$\xrightarrow{d}$ — сходимость по распределению
$\xrightarrow{\mathsf{P}}$ — сходимость по вероятности
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$ — сходимость почти наверное (с вероятностью 1)
$\xrightarrow{L^r}$ — сходимость в пространстве $\mathcal{L}^r$
$\xrightarrow{w}$ — слабая сходимость
$\xrightarrow{c}$ — сходимость вполне
$\xrightarrow{v}$ — сходимость по вариации
ЗБЧ — закон больших чисел
УЗБЧ — усиленный закон больших чисел
ЦПТ — центральная предельная теорема
$\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n по k

ГЛАВА 1

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. Классы случайных событий

Пусть задано произвольное непустое множество Ω. Его элементы, обозначаемые ω, будут интерпретироваться как исходы некоторого эксперимента. Как обычно, через $A \cup B$ и $A \cap B$ (а также AB) будем обозначать соответственно объединение и пересечение любых двух подмножеств $A \subseteq \Omega$ и $B \subseteq \Omega$, а через $\overline{A}$ — дополнение множества $A \subseteq \Omega$. В частности, $\overline{\Omega} = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество. Если множества A и B не пересекаются, то их объединение будем обозначать $A + B$; соответственно, объединение непересекающихся множеств A_i, $i \geqslant 1$, обозначается $\sum\limits_i A_i$.

Класс $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется *алгеброй*, если он содержит Ω и замкнут относительно дополнения и конечных объединений, т. е. если:

а) $\Omega \in \mathcal{A}$;

б) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;

в) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Учитывая законы де Моргана ($\overline{A_1 A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$ и $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \overline{A}_2$), легко видеть, что условие в) можно заменить условием

в$'$) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_1 A_2 \in \mathcal{A}$.

Это означает, что класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно конечных пересечений.

Класс $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется *σ-алгеброй*, если $\mathcal{F}$ — алгебра, которая замкнута относительно счетных объединений, т. е. если

г) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Снова, как и выше, условие г) может быть заменено эквивалентным ему условием

г$'$) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Таким образом, σ-алгебра $\mathcal{F}$ является замкнутой относительно счетных пересечений.

Напомним, что элементы любой алгебры или σ-алгебры называются *случайными событиями* (или просто *событиями*).

Другие классы событий, такие как полуалгебры, d-системы и произведение σ-алгебр, будут введены и изучены в рассмотренных далее конкретных примерах.

По поводу основных теоретико-вероятностных объектов, идей и результатов читатель может обратиться к любому из хорошо известных учебных пособий, например [9, 26, 60, 75, 81, 92, 106, 116, 117, 118, 145, 179, 330].

1.1. Класс событий, который образует алгебру, но не является σ-алгеброй

(а) Пусть $\Omega = [0, \infty)$, а класс $\mathcal{A}_1$ содержит все интервалы вида $[a, b)$ или $[a, \infty)$, где $0 \leqslant a < b < \infty$. Далее, пусть класс $\mathcal{A}_2$ состоит из пустого множества $\varnothing$ и всех конечных сумм непересекающихся интервалов из $\mathcal{A}_1$. Покажем, что класс $\mathcal{A}_1$ не является алгеброй, а $\mathcal{A}_2$ — алгебра, которая не является σ-алгеброй.

Действительно, возьмем произвольные действительные числа a и b, $0 < a < b < \infty$. Тогда $A = [a, b) \in \mathcal{A}_1$, но поскольку $\overline{A} = [0, a) \cup [b, \infty) \notin \mathcal{A}_1$, то $\mathcal{A}_1$ не может быть алгеброй.

Далее, легко проверить, что: 1) объединение конечного числа элементов класса $\mathcal{A}_2$ принадлежит $\mathcal{A}_2$; 2) дополнение любого элемента класса $\mathcal{A}_2$ снова принадлежит $\mathcal{A}_2$. Таким образом, мы видим, что $\mathcal{A}_2$ образует алгебру. Однако $\mathcal{A}_2$ не является σ-алгеброй, потому что, например, множество $A_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ принадлежит $\mathcal{A}_2$, в то время как пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ не принадлежит $\mathcal{A}_2$.

(б) Пусть $\mathcal{A}$ — класс подмножеств множества $\Omega = \mathbb{R}^1$, состоящий из конечных сумм непересекающихся интервалов вида $(-\infty, a]$, $(b, c]$ и (d, ∞), где a, b, c, d — любые числа из $\mathbb{R}^1$. Тогда класс $\mathcal{A}$ образует алгебру. Однако пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(b - \dfrac{1}{n}, c\right]$, равное $[b, c]$, не входит в $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй.

(в) Возьмем произвольное множество Ω, содержащее бесконечное число элементов. Обозначим через $\mathcal{A}$ совокупность всех таких подмножеств $A \subseteq \Omega$, что конечно либо дополнение $\overline{A}$ подмножества A, либо оно само. Тогда легко видеть, что $\mathcal{A}$ — алгебра, которая σ-алгеброй не является.

1.2. О замкнутости класса событий относительно операций объединения, пересечения и дополнения

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$, а класс $\mathcal{A}$ состоит из всех интервалов вида (x, ∞), $x \in \Omega$. Используя обозначения $u = x \wedge y = \min(x, y)$ и $v = x \vee y = \max(x, y)$, мы видим, что

$$(x, \infty) \cup (y, \infty) = (u, \infty) \in \mathcal{A}, \quad (x, \infty) \cap (y, \infty) = (v, \infty) \in \mathcal{A},$$

т. е. класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно (конечных) объединений и пересечений. Однако, класс $\mathcal{A}$ не замкнут относительно взятия дополнения. Например, если $A = (x, \infty)$, то $A \in \mathcal{A}$, но $\overline{A} = (-\infty, x] \notin \mathcal{A}$.

1.3. Каждая алгебра событий является полуалгеброй, но не наоборот

Пусть Ω — произвольное множество. Напомним, что класс $\mathcal{S}$ подмножеств Ω называется *полуалгеброй*, если $\Omega \in \mathcal{S}$, $\varnothing \in \mathcal{S}$, класс $\mathcal{S}$ замкнут относительно конечных пересечений и дополнения любого множества в $\mathcal{S}$ является конечной суммой непересекающихся множеств из $\mathcal{S}$.

Легко видеть, что любая алгебра подмножеств множества Ω является и полуалгеброй. Простые примеры показывают, что обратное неверно.

(а) Пусть $\Omega = [-\infty, \infty]$, а класс $\mathcal{S}_1$ содержит Ω, $\{\infty\}$ и все интервалы вида $[a, b)$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$. Тогда $\varnothing \in \mathcal{S}_1$, $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [a_1 \vee a_2, b_1 \wedge b_2) \in \mathcal{S}_1$ и $\overline{[a, b)} = [-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Следовательно, $\mathcal{S}_1$ — полуалгебра. Но, очевидно, что $\mathcal{S}_1$ — не алгебра.

(б) Возьмем $\Omega = \mathbb{R}^1$ и обозначим через $\mathcal{S}_2$ класс всех подмножеств вида AB, где A — замкнутое, а B — открытое множество в Ω. Тогда $\mathcal{S}_2$ образует полуалгебру, но $\mathcal{S}_2$ не является алгеброй.

1.4. В σ-алгебре подмножеств множества Ω могут не содержаться все его подмножества

В любой теоретико-множественной задаче мы рассматриваем множество Ω, называемое *пространством элементарных событий*, и некоторую σ-алгебру $\mathcal{F}$ случайных событий, т. е. подмножеств Ω. Поэтому для нас важно знать, содержит ли $\mathcal{F}$ все подмножества множества Ω. Приводимый далее пример содержит ответ на этот вопрос.

Напомним сначала, что множество $A \in \Omega$ называется *c-конечным*, если его дополнение $\overline{A}$ конечно.

Пусть класс $\mathcal{F}_1$ состоит из всех конечных и всех c-конечных подмножеств множества Ω. Тогда легко проверить, что $\mathcal{F}_1$ является алгеброй.

При этом $\mathcal{F}_1$ будет σ-алгеброй тогда и только тогда, когда Ω — конечное множество.

Далее, множество $A \in \Omega$ называется *с-счетным*, если его дополнение $\overline{A}$ содержит счетное число элементов.

Через $\mathcal{F}_2$ обозначим совокупность всех счетных и всех c-счетных подмножеств множества Ω. Нетрудно видеть, что $\mathcal{F}_2$ образует σ-алгебру. Предположим теперь, что множество Ω несчетное. Тогда в Ω имеется такое множество A, что одновременно A и его дополнение $\overline{A}$ — несчетные множества. Это показывает, в частности, что не все подмножества множества Ω входят в σ-алгебру $\mathcal{F}_2$.

1.5. Каждая σ-алгебра является d-системой, но обратное неверно

Напомним, что класс $\mathcal{D}$ подмножеств Ω называется *d-системой*, если:

1) $\Omega \in \mathcal{D}$;

2) $A, B \in \mathcal{D}$ и $A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$;

3) $A_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Тривиально проверить, что каждая σ-алгебра является также и d-системой. Естественно задаться вопросом о справедливости обратного утверждения. В общем случае ответ отрицательный. Проиллюстрируем это на одном конкретном примере.

Предположим, что Ω — конечное множество, число элементов которого четное (например, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$). Обозначим через $\mathcal{D}_e$ совокупность всех подмножеств D множества Ω, содержащих четное число элементов. Очевидно, $\Omega \in \mathcal{D}_e$. Пусть $A \in \mathcal{D}_e$ и $B \in \mathcal{D}_e$, причем $A \subseteq B$. Тогда разность $B \setminus A$ тоже содержит четное число элементов множества Ω и, значит, $B \setminus A \in \mathcal{D}_e$.

Наконец, если $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность подмножеств множества Ω, принадлежащих $\mathcal{D}_e$, т. е. каждое A_j имеет четное число элементов, и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, то легко заметить, что объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ также содержит четное число элементов, т. е. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_e$. Следовательно, условия 1)–3) выполнены и класс $\mathcal{D}_e$ образует d-систему. Однако, положив, например, $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$ и $B = \{\omega_2, \omega_3\}$, мы видим, что $A \in \mathcal{D}_e$, $B \in \mathcal{D}_e$, но пересечение $AB = \omega_2$ не принадлежит $\mathcal{D}_e$. Это означает, что класс $\mathcal{D}_e$ не является даже алгеброй, а тем более и σ-алгеброй.

Заметим, однако, что если d-система $\mathcal{D}$ подмножеств Ω замкнута относительно конечных пересечений, то тогда $\mathcal{D}$ образует σ-алгебру.

1.6. Множества, которые не являются событиями в произведении соответствующих σ-алгебр

Пусть заданы два произвольных множества, Ω_1 и Ω_2. Их *произведение*, обозначаемое $\Omega_1 \times \Omega_2$, задается так: $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \colon \omega_1 \in \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$. Для любого множества $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ через A_{ω_1} обозначим сечение A в точке ω_1, т. е. $A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \colon (\omega_1, \omega_2) \in A\}$. Аналогично, $A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \colon (\omega_1, \omega_2) \in A\}$. Прямоугольник в $\Omega_1 \times \Omega_2$ — это подмножество вида

$$A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \colon \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}, \quad A_1 \subseteq \Omega_1,\ A_2 \subseteq \Omega_2.$$

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — σ-алгебры подмножеств множеств Ω_1 и Ω_2 соответственно. Если $A_1 \in \mathcal{F}_1$ и $A_2 \in \mathcal{F}_2$, то множество $A_1 \times A_2$ называется измеримым прямоугольником (относительно $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$). Нетрудно видеть, что измеримые прямоугольники образуют полуалгебру подмножеств в произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$. Далее, алгебра, порожденная измеримыми прямоугольниками, состоит из всех конечных сумм непересекающихся измеримых прямоугольников. Наконец, σ-алгебра, порожденная этой алгеброй, обозначается $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и называется *произведением σ-алгебр* $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$.

Хорошо известен следующий результат [21, 81, 326]: *для любого измеримого множества A в $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ и любых фиксированных элементов $\omega_1 \in \Omega_1$ и $\omega_2 \in \Omega_2$ сечения A_{ω_1} и A_{ω_2} являются измеримыми множествами соответственно в $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ и $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$.*

Теперь естественно поставить вопрос: является ли A измеримым множеством в $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, если известно, что его сечения A_{ω_1}, $\omega_1 \in \Omega_1$, и A_{ω_2}, $\omega_2 \in \Omega_2$ — измеримые множества соответственно в $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ и $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$? Нетрудно видеть, что ответ отрицателен.

Действительно, предположим, что Ω — несчетное множество, а $\mathcal{F}$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств множества Ω, содержащая все одноэлементные подмножества Ω. Тогда множество $D = \{(\omega, \omega) \colon \omega \in \Omega\}$, т. е. диагональ произведения $\Omega \times \Omega$, в силу несчетности Ω, не принадлежит произведению $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$. В то же время все сечения D принадлежат $\mathcal{F}$. Другими словами, для каждого $\omega \in \Omega$ сечение D_ω принадлежит $\mathcal{F}$, т. е. D_ω — событие, но $D \notin \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, и, значит, D не является событием.

1.7. Объединение σ-алгебр может не быть σ-алгеброй

Предположим, что $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ — последовательность σ-алгебр подмножеств некоторого множества Ω. Тогда их пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ всегда является σ-алгеброй. Вопрос: является ли σ-алгеброй объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ заданных σ-алгебр? Покажем, что в общем случае это не так.

(а) Рассмотрим множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и следующие два класса его подмножеств: $\mathcal{F}_1 = \bigl\{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \varnothing, \Omega\bigr\}$ и $\mathcal{F}_2 = \bigl\{\{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \varnothing, \Omega\bigr\}$. Каждый из этих классов является алгеброй, а также и σ-алгеброй. Очевидно, что пересечение $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ равно тривиальной σ-алгебре $\{\varnothing, \Omega\}$. Однако объединение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \bigl\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \varnothing, \Omega\bigr\}$$

не является σ-алгеброй. В самом деле, достаточно, например, заметить, что множество $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\}$ не принадлежит классу $\mathcal{F}$.

(б) Пусть Ω — фиксированное множество, а $(\mathcal{A}_n)$, $n \geqslant 1$, — последовательность алгебр подмножеств множества Ω. Будем говорить, что $(\mathcal{A}_n)$ — возрастающая последовательность, если для каждого $n \geqslant 1$ имеет место строгое включение $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, и что последовательность $(\mathcal{A}_n)$ — неубывающая, если $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$, но возможны равенства $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$ для некоторых индексов n.

Для любого класса $\mathcal{A}$ подмножеств Ω и любого фиксированного множества $D \subset \mathcal{A}$ введем новый класс $\mathcal{A}|D = \{A \in \mathcal{A}\colon A \subset D\}$. Легко заметить, что если $\mathcal{A}$ — алгебра, то $\mathcal{A}|D$ является алгеброй в D, а если $(\mathcal{A}_n)$ — возрастающая последовательность алгебр, то это свойство сохраняется и для новой последовательности $(\mathcal{A}_n|D)$.

Итак, пусть $(\mathcal{A}_n)$ — возрастающая последовательность алгебр. Мы интересуемся свойствами объединения $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Для этой цели докажем сначала следующие два утверждения:

1. *Для каждого фиксированного индекса m существует такое множество $D \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_m$, что последовательность $\bigl(\mathcal{A}_n|(\Omega \setminus D),\ n \geqslant 1\bigr)$ возрастает.*

2. *В классе $\mathcal{A}$ существует последовательность $(C_n,\ n \geqslant 1)$, состоящая из таких попарно непересекающихся множеств, что $C_n \notin \mathcal{A}_n$, $n \geqslant 1$.*

Перейдем к доказательству этих утверждений. Поскольку индекс m фиксирован, а последовательность $(\mathcal{A}_n)$ возрастает, то для любых m_1 и m_2, для которых $m < m_1 < m_2$, найдутся такие множества G_1 и G_2, что $G_1 \in \mathcal{A}_{m_1} \setminus \mathcal{A}_m$ и $G_2 \in \mathcal{A}_{m_2} \setminus \mathcal{A}_{m_1}$. Тогда среди трех попарно непересекающихся множеств $G_1 \setminus G_2$, $G_1 \cap G_2$ и $G_2 \setminus G_1$ по крайней мере два множества не принадлежат $\mathcal{A}_m$. Таким образом, мы нашли два непересекающиеся множества (обозначим их F_1 и F_2), не входящие в $\mathcal{A}_m$.

Отсюда вытекает, что для любого $n > m_2$ имеет место соотношение

$$\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus F_1)) \vee (\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus F_2)).$$

(Напомним, что для любых алгебр $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ через $\mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2$ принято обозначать алгебру, порожденную объединениями $A \cup B$, $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$.) Это соотношение и свойство возрастания последовательности $(\mathcal{A}_n)$ позволяют заключить, что хотя бы одна из последовательностей, $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus F_1))$ или $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus F_2))$, также возрастает. Следовательно, полагая $D = F_j$, если $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus F_j))$ возрастает, мы получаем требуемую возрастающую последовательность алгебр $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus D))$. Этим утверждение 1 доказано.

Далее, из утверждения 1 следует существование такого множества $C_1 \in \mathcal{A}$, что $C_1 \notin \mathcal{A}_1$, причем последовательность $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus C_1))$ возрастает. Рассуждая индуктивно, предположим, что в классе $\mathcal{A}$ найдены такие попарно непересекающиеся множества $C_1, \ldots, C_k$, что $C_i \notin \mathcal{A}_i$, для всех $i = 1, \ldots, k$, а последовательность $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus S_k))$, где $S_k = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, является возрастающей. Снова, согласно утверждению 1, существует такое множество $C_{k+1} \in \mathcal{A} \,|\, (\Omega \setminus S_k)$, что $C_{k+1} \notin \mathcal{A}_{k+1} \,|\, (\Omega \setminus S_k)$, а $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus S_k) \,|\, (\Omega \setminus C_{k+1}))$ — возрастающая последовательность. При этом $C_1, \ldots, C_{k+1}$ — попарно непересекающиеся множества, а $C_{k+1} \notin \mathcal{A}_{k+1}$. Остается только заметить, что последовательность $(\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus S_{k+1}))$ также возрастающая. Это следует из проведенного выше рассуждения и соотношения $\mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus S_k) \,|\, (\Omega \setminus C_{k+1}) = \mathcal{A}_n \,|\, (\Omega \setminus S_{k+1})$, где $S_{k+1} = S_k \cup C_{k+1}$. Утверждение 2 доказано.

Теперь не составляет труда показать, что объединение $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ не является σ-алгеброй. Предположим обратное, т. е. что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Возьмем последовательность (C_n), построенную в утверждении 2. Пусть $\{N_1, N_2, \ldots\}$ — разбиение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на бесконечные подмножества. Обозначим $D_p = \bigcup\limits_{n \in N_p} C_n$. Из сделанного предположения (о том, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра) вытекает, что $D_p \in \mathcal{A}$, и, следовательно, для каждого p существует такое n_p, что $D_p \in \mathcal{A}_{n_p}$. Так как последовательность алгебр $(\mathcal{A}_n)$ возрастает, то можно считать, что последовательность индексов (n_p) также (строго!) возрастает. Далее, для каждого p выберем индекс $m_p \in N_p$, для которого $m_p > n_p$, и положим $E = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} C_{m_p}$. Согласно нашему предположению $E \in \mathcal{A}$, и, следовательно, существует такой индекс q, что $E \in \mathcal{A}_{n_q}$. Отсюда и из конструкции множества D_p вытекает, что $D_q \cap E = C_{m_q} \in \mathcal{A}_{n_q}$. Однако $n_q < m_q$, а это означает, что $C_{m_q} \in \mathcal{A}_{m_q}$. Полученное таким образом противоречие (согласно утверждению 2, $C_n \notin \mathcal{A}_n$) показывает, что наше предположение (о том, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра) неверно.

Итак, в общем случае объединение счетного числа σ-алгебр не обязательно является σ-алгеброй.

§ 2. Вероятность

Предположим, что Ω — любое множество, а $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств. Функция P называется *вероятностью* на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, если она определена для всех событий $A \in \mathcal{A}$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

а) $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathcal{A}$; $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

б) функция P конечно аддитивна, т. е. для любого конечного числа попарно непересекающихся событий $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i);$$

в) функция P непрерывна в $\varnothing$, т. е. для любых событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ таких, что $A_{n+1} \subset A_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0.$$

Отметим здесь, что условия б) и в) эквивалентны следующему условию:

г) функция P σ-аддитивна (счетно аддитивна), т. е.

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

для любых попарно непересекающихся событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$.

Пусть P_0 — σ-аддитивная вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$ и $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ обозначает наименьшую σ-алгебру, порожденную алгеброй $\mathcal{A}$. Тогда, согласно теореме Каратеодори (см. [21, 60, 75, 81, 116, 117, 139, 145, 330]), на $(\Omega, \mathcal{F})$ существует единственная вероятность P являющаяся *продолжением* P_0, т. е. такая, что $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}_0(A)$ для $A \in \mathcal{A}$. В этом случае принято также говорить, что P_0 является *сужением* P на алгебру $\mathcal{A}$, и обозначать это так: $\mathsf{P}|\mathcal{A} = \mathsf{P}_0$.

Упорядоченная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *вероятностным пространством*, если Ω — произвольное множество точек (объектов), называемых элементарными событиями (исходами) некоторого эксперимента; $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, причем элементы $\mathcal{F}$ называются *случайными событиями* (или просто *событиями*); функция P есть вероятность на $(\Omega, \mathcal{F})$, т. е. P удовлетворяет условиям а), б) и в), или, что эквивалентно, условиям а) и г).

Изложенные далее примеры иллюстрируют свойства вероятностных мер. Пример 2.4 посвящен важному понятию регулярной условной вероятности.

2.1. Вероятностная мера, которая является аддитивной, но не σ-аддитивной

Пусть Ω — множество всех рациональных чисел r, $r \in [0,1]$, а $\mathcal{F}_1$ — класс подмножеств множества Ω, имеющих вид $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ или (a,b), где a и b — рациональные числа. Обозначим через $\mathcal{F}_2$ класс всех конечных сумм попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{F}_1$. Тогда $\mathcal{F}_2$ является алгеброй. Определим теперь вероятностную меру P так:

$$\mathsf{P}(A) = b - a, \qquad \text{если } A \in \mathcal{F}_1;$$

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i), \quad \text{если } B \in \mathcal{F}_2.$$

Если $B \in \mathcal{F}_2$, то подразумевается, что $B = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i — попарно не пересекающиеся множества из $\mathcal{F}_1$.

Мы интересуемся свойствами вероятности P. Покажем, например, что P аддитивна. Действительно, возьмем два непересекающихся множества из $\mathcal{F}_2$, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $B' = \sum\limits_{j=1}^{m} A'_j$, где $A_i, A'_j \in \mathcal{F}_1$ и все A_i, A'_j попарно непересекающиеся. Тогда сумму $B + B'$ можно представить в виде $B + B' = \sum\limits_{k=1}^{m+n} C_k$, где $C_1, \ldots, C_{m+n}$ — это множества $A_1, \ldots, A_n$ и $A'_1, \ldots, A'_m$, взятые в произвольном порядке. Тогда, согласно определению P, получаем, что

$$\mathsf{P}(B + B') = \mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{m+n} C_k\right) = \sum_{k=1}^{m+n} \mathsf{P}(C_k) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mathsf{P}(A'_j) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(B').$$

Это означает, что вероятностная мера P аддитивна. Далее легко видеть, что каждое одноточечное множество $\{r\}$ принадлежит $\mathcal{F}_2$ и $\mathsf{P}(\{r\}) = 0$. Так как Ω — счетное множество и $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \{r_i\}$, то имеем $\mathsf{P}(\Omega) = 1 \neq 0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(\{r_i\})$.

Полученное противоречие показывает, что вероятностная мера P не является σ-аддитивной на алгебре $\mathcal{F}_2$.

2.2. Две вероятностные меры могут совпадать на заданном классе событий и не совпадать на σ-алгебре, порожденной этим классом

Напомним сначала следующий результат (см. [116, 145, 157]): *пусть Ω — произвольное множество и $\mathcal{C}$ — класс событий в Ω, замкнутый относительно операции пересечения, т. е. $A, B \in \mathcal{C} \Longrightarrow AB \in \mathcal{C}$. Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная $\mathcal{C}$, заданы две вероятности,* P_1 *и* P_2, *совпадающие на $\mathcal{C}$. Тогда они совпадают и на σ-алгебре $\mathcal{F}$.*

Неудивительно, что такие результаты существенно зависят от структуры класса $\mathcal{C}$. Проиллюстрируем это конкретным примером.

Рассмотрим множество $\Omega = \{a, b, c, d\}$ и определим вероятностные меры Q_1 и Q_2 следующим образом:

$$\mathsf{Q}_1(\{a\}) = \mathsf{Q}_1(\{d\}) = \frac{1}{6}, \qquad \mathsf{Q}_1(\{b\}) = \mathsf{Q}_1(\{c\}) = \frac{1}{3},$$
$$\mathsf{Q}_2(\{a\}) = \mathsf{Q}_2(\{d\}) = \frac{1}{3}, \qquad \mathsf{Q}_2(\{b\}) = \mathsf{Q}_2(\{c\}) = \frac{1}{6}.$$

Выберем класс $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, где $C_1 = \{a, b\}$, $C_2 = \{c, d\}$, $C_3 = \{a, c\}$, $C_4 = \{b, d\}$. Проверим, что $\mathsf{Q}_1(C_i) = \mathsf{Q}_2(C_i)$ для каждого $C_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Например, если $C = C_2$, находим

$$\mathsf{Q}_1(C_2) = \mathsf{Q}_1(\{c\}) + \mathsf{Q}_1(\{d\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\mathsf{Q}_2(C_2) = \mathsf{Q}_2(\{c\}) + \mathsf{Q}_2(\{d\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Так же элементарно проверяется, что $\mathsf{Q}_1(\cdot) = \mathsf{Q}_2(\cdot)$, и для остальных элементов класса $\mathcal{C}$.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — совокупность всех подмножеств множества Ω. Тогда $\mathcal{F}$ совпадает с σ-алгеброй $\sigma(\mathcal{C})$, порожденной классом $\mathcal{C}$. Спрашивается, совпадают ли Q_1 и Q_2 на $\mathcal{F}$? Ответить на этот вопрос легко. Например, $C_1 \cap C_3 = \{a\} \in \sigma(\mathcal{C})$, однако

$$\mathsf{Q}_1(\{a\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} = \mathsf{Q}_2(\{a\}).$$

Несовпадение Q_1 и Q_2 также имеет место для каждого из остальных элементов $\{b\}, \{c\}$ и $\{d\}$, принадлежащих σ-алгебре $\mathcal{F}$.

Итак, $\mathsf{Q}_1 = \mathsf{Q}_2$ на классе $\mathcal{C}$, но $\mathsf{Q}_1 \neq \mathsf{Q}_2$ на σ-алгебре $\mathcal{F}$. Причина этого — незамкнутость класса $\mathcal{C}$ относительно операции пересечения.

2.3. Теорема Колмогорова о продолжении меры в пространстве $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$

Вероятностные меры в измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $n \geqslant 1$, строятся сначала для элементарных множеств (прямоугольников или параллелепипедов вида $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^n$), потом для множеств вида $A = \sum_i (a_i, b_i]$ и, наконец, с помощью теоремы Каратеодори, для множеств из $\mathcal{B}^n$. Подобную конструкцию можно использовать и для построения вероятностей в пространстве $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$.

Пусть $C_n(B) = \{x \in \mathbb{R}^\infty\colon (x_1, \ldots, x_n) \in B\}, B \in \mathcal{B}^n$, обозначает цилиндрическое множество в $\mathbb{R}^\infty$ с основанием $B \in \mathcal{B}^n$. Естественно рассматривать цилиндрические множества как элементарные множества в $\mathbb{R}^\infty$. Вероятностную меру множеств σ-алгебры $\mathcal{B}^\infty$ можно определить через вероятности элементарных множеств.

Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$. Положим

$$P_n(B) = \mathsf{P}(C_n(B)), \quad B \in \mathcal{B}^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом мы получаем последовательность вероятностных мер $P_1, P_2, \ldots$, определенных соответственно на измеримых пространствах $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2), \ldots$ Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и любого $B \in \mathcal{B}^n$ имеет место равенство

$$P_{n+1}(B \times \mathbb{R}^1) = P_n(B), \tag{1}$$

называемое *свойством согласованности*. Фундаментальным является следующий обратный результат (теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$).

Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — последовательность вероятностных мер на $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2), \ldots$, обладающих свойством согласованности (1). *Тогда на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ существует такая единственная, вероятностная мера P, что $\mathsf{P}(C_n(B)) = P_n(B)$ для любого множества $B \in \mathcal{B}^n$, $n = 1, 2, \ldots$*

Доказательство этой теоремы может быть найдено, например, в книгах [22, 60, 116, 117, 145, 330, 345, 404]. Заметим, что оно использует некоторые специфические свойства евклидовых пространств. Оказывается, что в общем случае, без предположений о топологической структуре измеримых пространств и о структуре семейства мер $\{P_n\}$, эта теорема неверна. Вот конкретный пример.

Рассмотрим пространство $\Omega = (0, 1]$, которое, очевидно, не является полным. В этом пространстве построим последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$ и последовательность вероятностных мер $P_1, P_2, \ldots$, где P_n определена на $(\Omega, \mathcal{F}_n)$. Затем мы введем σ-алгебру $\mathcal{F} = \sigma\Big(\bigcup_n \mathcal{F}_n\Big)$, являющуюся наименьшей σ-алгеброй, содержащей все $\mathcal{F}_n$, и покажем, что не существует такой вероятностной меры P на $(\Omega, \mathcal{F})$, что ее сужение $\mathsf{P}|\mathcal{F}_n$ на $\mathcal{F}_n$ совпадало бы с P_n, $n = 1, 2, \ldots$

Действительно, для $n = 1, 2, \ldots$ определим функцию $h_n(\omega) = 1$, если $0 < \omega < \dfrac{1}{n}$, и $h_n(\omega) = 0$, если $\dfrac{1}{n} \leqslant \omega \leqslant 1$. Пусть

$$\mathcal{C}_n = \{A \subset \Omega\colon A = [\omega\colon h_n(\omega) \in B],\ B \in \mathcal{B}^1\}$$

и $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все классы множеств $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$. Ясно, что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$ Введем σ-алгебру $\mathcal{F} = \sigma\bigl(\bigcup \mathcal{F}_n\bigr)$, содержащую все $\mathcal{F}_n$. На измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ определим вероятностную меру P_n следующим образом:

$$P_n\{\omega\colon (h_1(\omega), \ldots, h_n(\omega)) \in B^n\} = \begin{cases} 1, & \text{если } (1, \ldots, 1) \in B^n,\ B^n \in \mathcal{B}^n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что $\mathcal{C}_n$ содержит лишь множества $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$, $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $\varnothing$ и Ω, и легко описать структуру σ-алгебры $\mathcal{F}_n$. Кроме того, мера P_n сосредоточена на $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$. Тогда семейство мер $\{P_n\}$ удовлетворяет свойству согласованности (1), т. е. $P_{n+1}(A) = P_n(A)$ для всех $A \in \mathcal{F}_n$.

Допустим теперь, что на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ существует такая вероятностная мера P, что $\mathsf{P}\,|\,\mathcal{F}_n = P_n$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ имело бы место соотношение

$$\mathsf{P}\{\omega\colon h_1(\omega) = \ldots = h_n(\omega) = 1\} = P_n\{\omega\colon h_1(\omega) = \ldots = h_n(\omega) = 1\} = 1. \quad (2)$$

Заметим, однако, что монотонное убывание последовательности

$$\{\omega\colon h_1(\omega) = \ldots = h_n(\omega) = 1\} = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

противоречит равенствам (2) и требованию счетной аддитивности функции P, а значит, и непрерывности этой функции в «нуле» $\varnothing$.

2.4. О регулярных условных вероятностях

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{F}$ — такая σ-алгебра, что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. Напомним, что условная вероятность $\mathsf{P}(A|\mathcal{F}_1)$, $A \in \mathcal{F}$, определена P-п. н. как такая $\mathcal{F}_1$-измеримая функция ω, что

$$\mathsf{P}(AB) = \int_B \mathsf{P}(A|\mathcal{F}_1)\, d\mathsf{P}(\omega) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathcal{F}_1.$$