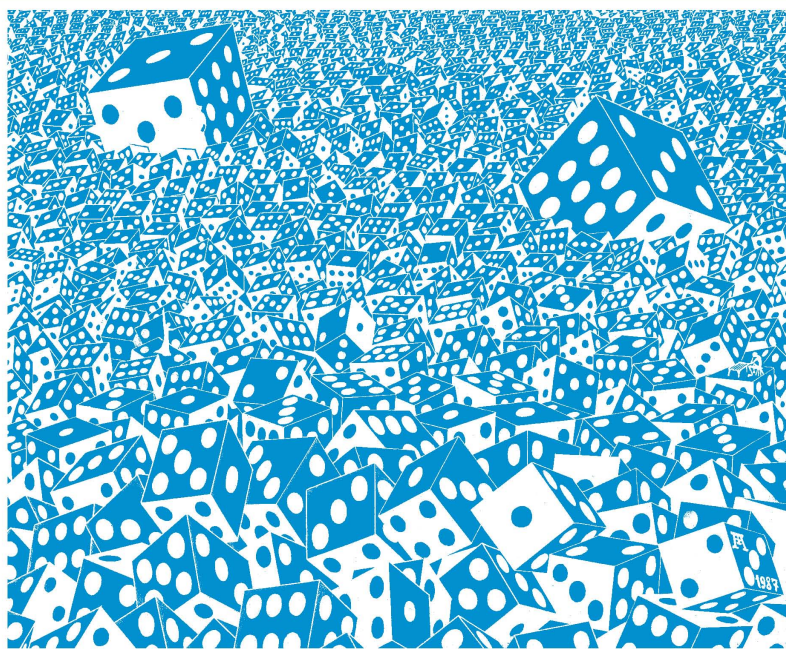


И. СТОЯНОВ

КОНТРИМЕРЫ  
в теории вероятностей



УДК 519.21(075.8)

ББК 22.171

С82

Стоянов Й.

Контрпримеры в теории вероятностей

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2014

294 с.

ISBN 978-5-4439-2040-5

Книга содержит около 300 разнообразных контрпримеров и примеров, относящихся к основным разделам теории вероятностей и случайных процессов. Во второе издание добавлен новый материал, расширен список литературы. Книгу можно активно использовать при изучении теории вероятностей и случайных процессов.

Предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

Подготовлено на основе книги: *Й. Стоянов. Контрпримеры в теории вероятностей.* — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-2040-5

© Стоянов Й., 2012.

© МЦНМО, 2014.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие к русскому изданию</b>	<b>13</b>
<b>Предисловие автора</b>	<b>15</b>
<b>Основные обозначения и сокращения</b>	<b>17</b>
<b>Глава 1. Случайные события и их вероятности</b>	<b>18</b>
§ 1. Классы случайных событий . . . . .	18
1.1. Класс событий, который образует алгебру, но не является $\sigma$ -алгеброй . . . . .	19
1.2. О замкнутости класса событий относительно операций объединения, пересечения и дополнения . . . . .	20
1.3. Каждая алгебра событий является полуалгеброй, но не наоборот . . . . .	20
1.4. В $\sigma$ -алгебре подмножеств множества $\Omega$ могут не содержаться все его подмножества . . . . .	20
1.5. Каждая $\sigma$ -алгебра является $d$ -системой, но обратное неверно . . . . .	21
1.6. Множества, которые не являются событиями в произведении соответствующих $\sigma$ -алгебр . . . . .	22
1.7. Объединение $\sigma$ -алгебр может не быть $\sigma$ -алгеброй . . . . .	22
§ 2. Вероятность . . . . .	25
2.1. Вероятностная мера, которая является аддитивной, но не $\sigma$ -аддитивной . . . . .	26
2.2. Две вероятностные меры могут совпадать на заданном классе событий и не совпадать на $\sigma$ -алгебре, порожденной этим классом . . . . .	27
2.3. Теорема Колмогорова о продолжении меры в пространстве $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ . . . . .	28
2.4. О регулярных условных вероятностях . . . . .	29
§ 3. Независимость случайных событий . . . . .	31
3.1. О роли вероятностной меры в свойстве независимости . . . . .	32
3.2. Попарная независимость событий не влечет их независимости в совокупности . . . . .	33

3.3.	Из соотношения $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ не следует, что события $A, B$ и $C$ независимы в совокупности . . . . .	34
3.4.	Система из $n + 1$ зависимых событий, каждые $n$ из которых независимы в совокупности . . . . .	35
3.5.	О независимости и условной независимости случайных событий . . . . .	37
3.6.	Об одном выборе условий типа независимости, из которого не следует независимость в совокупности . . . . .	38
3.7.	Из независимых в совокупности событий можно формировать зависимые классы событий . . . . .	39
3.8.	Семейства случайных событий с «необычными» свойствами независимости/зависимости . . . . .	39
§ 4.	Разные свойства случайных событий и их вероятностей . . . . .	41
4.1.	Вероятностные пространства без нетривиальных независимых событий . . . . .	41
4.2.	О лемме Бореля–Кантелли . . . . .	42
4.3.	Может ли класс событий обладать свойством независимости и быть исчерпывающим? . . . . .	43
<b>Глава 2.</b>	<b>Распределения. Случайные величины</b>	<b>46</b>
§ 5.	Функции распределения случайных величин . . . . .	46
5.1.	Эквивалентные случайные величины распределены одинаково, но обратное неверно . . . . .	49
5.2.	Если случайные величины $X, Y$ и $Z$ заданы на одном вероятностном пространстве, то из $X \stackrel{d}{=} Y$ не следует, что $XZ \stackrel{d}{=} YZ$ . . . . .	50
5.3.	Функция, которая является метрикой в пространстве распределений, но не является метрикой в пространстве случайных величин . . . . .	50
5.4.	Об $n$ -мерных распределениях . . . . .	51
5.5.	Отсутствие атомов не влечет непрерывности многомерных функций распределения . . . . .	51
5.6.	Об абсолютной непрерывности распределений случайного вектора и его компонент . . . . .	53
5.7.	Многомерные функции распределения не определяются однозначно своими маргинальными распределениями . . . . .	54
5.8.	О свертках функций распределений . . . . .	55
5.9.	О несохранении свойства унимодальности при свертках унимодальных распределений . . . . .	56
§ 6.	Математическое ожидание . . . . .	59
6.1.	О линейности математического ожидания . . . . .	61

6.2.	Об интегрируемости последовательности случайных величин и ограниченности их супремума . . . . .	63
6.3.	У симметричного распределения все моменты нечетного порядка равны нулю, но обратное неверно . . . . .	63
6.4.	Об одном свойстве моментов случайных величин, которое не имеет аналога для случайных векторов . . . . .	64
6.5.	О справедливости теоремы Фубини . . . . .	65
6.6.	Семейство интегрируемых случайных величин, которое не является равномерно интегрируемым . . . . .	66
6.7.	Всегда ли справедливо равенство $E\{E(X Y)\} = EX$ ? . . . . .	67
6.8.	О невозможности расширить одно из свойств условного математического ожидания . . . . .	68
§ 7.	Независимость случайных величин . . . . .	69
7.1.	О попарной независимости случайных величин и их независимости в совокупности . . . . .	69
7.2.	Множество зависимых случайных величин, каждое собственное подмножество которого обладает свойством независимости . . . . .	70
7.3.	Зависимые случайные величины $X$ и $Y$ , такие что случайные величины $X^2$ и $Y^2$ независимы . . . . .	73
7.4.	Независимость случайных величин в терминах характеристических функций . . . . .	74
7.5.	Независимость случайных величин в терминах производящих функций . . . . .	76
7.6.	Свертка функций распределений может быть распределением суммы зависимых случайных величин . . . . .	77
7.7.	Некоррелированные, но зависимые случайные величины . . . . .	77
7.8.	Из равенства $E(Y X) = EY$ почти наверное не всегда вытекает, что $X$ и $Y$ независимы . . . . .	78
7.9.	Существует ли связь между понятиями независимости и условной независимости случайных величин? . . . . .	79
§ 8.	Характеристические и производящие функции . . . . .	80
8.1.	Характеристические функции, совпадающие на конечном отрезке, но не на всей числовой прямой . . . . .	82
8.2.	Дискретное и абсолютно непрерывное распределения с характеристическими функциями, совпадающими на отрезке $[-1, 1]$ . . . . .	83
8.3.	Абсолютно непрерывное распределение может иметь характеристическую функцию, которая не интегрируема абсолютно . . . . .	84

8.4.	Неинтегрируемая дискретная случайная величина с дифференцируемой характеристической функцией . . . . .	85
8.5.	Неинтегрируемая абсолютно непрерывная случайная величина с дифференцируемой характеристической функцией . . . . .	86
8.6.	Производящая функция может не существовать, даже если случайная величина имеет моменты любого порядка $r$ , $r = 1, 2, \dots$ . . . . .	87
§ 9.	Безгранично делимые и устойчивые распределения . . . . .	89
9.1.	Не обращающаяся в нуль характеристическая функция, которая не является безгранично делимой . . . . .	90
9.2.	О свойстве безграничной делимости характеристических функций $\varphi$ и $ \varphi $ . . . . .	91
9.3.	Произведение двух независимых неотрицательных и безгранично делимых случайных величин не всегда сохраняет свойство безграничной делимости . . . . .	93
9.4.	О свойстве безграничной делимости в многомерном случае . . . . .	94
9.5.	О безграничной делимости случайного вектора и линейных комбинаций его компонент . . . . .	95
9.6.	Безгранично делимые распределения, которые не являются устойчивыми . . . . .	97
9.7.	Устойчивое распределение можно разложить на два безгранично делимых и неустойчивых распределения . . . . .	99
§ 10.	Нормальное распределение . . . . .	100
10.1.	Нормальность одномерных распределений не обеспечивает нормальности соответствующего многомерного распределения . . . . .	101
10.2.	Если $(X_1, X_2)$ имеет двумерное нормальное распределение, то $X_1$ , $X_2$ и $X_1 + X_2$ нормально распределены, но обратное неверно . . . . .	102
10.3.	Свойство нормальности может не иметь места для системы случайных величин, даже если любая ее подсистема обладает этим свойством . . . . .	104
10.4.	О связи между свойствами нормальности и некоррелированности . . . . .	105
10.5.	Случайные величины $X$ , $Y$ , $X + Y$ и $X - Y$ могут быть нормально распределенными, причем $X$ и $Y$ некоррелированы, а распределение вектора $(X, Y)$ может не быть нормальным . . . . .	107

10.6.	Условие, характеризующее нормальное распределение через нормальность линейных комбинаций, не может быть ослаблено . . . . .	108
10.7.	Распределение, отличающееся от нормального, может иметь условные нормальные распределения . . . . .	109
§ 11.	Проблема моментов . . . . .	111
11.1.	Проблема моментов для некоторых функций от нормально распределенной случайной величины . . . . .	113
11.2.	Логарифмически нормальное распределение и проблема моментов . . . . .	114
11.3.	Еще один класс абсолютно непрерывных распределений, которые не определяются однозначно своими моментами . . . . .	117
11.4.	Проблема моментов для степенных преобразований экспоненциального распределения . . . . .	118
11.5.	Различные дискретные распределения с совпадающими моментами любого порядка . . . . .	119
11.6.	Как связаны два различных достаточных условия для единственности решения проблемы моментов? . . . . .	123
11.7.	Условие Карлемана достаточно, но не необходимо для единственности решения проблемы моментов . . . . .	124
11.8.	Условие Крейна достаточно, но не необходимо для неединственности решения проблемы моментов . . . . .	126
§ 12.	Характеризационные свойства некоторых вероятностных распределений . . . . .	126
12.1.	Как распределены случайные величины, если их сумма имеет биномиальное распределение? . . . . .	127
12.2.	Свойство геометрического распределения, которое не является его характеризационным свойством . . . . .	128
12.3.	О применимости теоремы Райкова . . . . .	129
12.4.	О применимости теоремы Крамера . . . . .	131
12.5.	Об одном свойстве, которое не является характеризационным для нормального распределения . . . . .	132
12.6.	Еще одно интересное свойство, которое не является характеризационным для нормального распределения . . . . .	133
12.7.	Об одном свойстве, не являющемся характеризационным для распределения Коши . . . . .	134
12.8.	Об одном свойстве, которое не является характеризационным для гамма-распределения . . . . .	135
§ 13.	Разные свойства случайных величин . . . . .	136

13.1.	О свойстве независимости при суммировании пуассоновских случайных величин . . . . .	136
13.2.	О симметричности суммы и разности двух случайных величин . . . . .	137
13.3.	Соотношение между классами распределений NBU и IFR . . . . .	139
13.4.	Перестановочные и «хвостовые» события, связанные с последовательностями случайных величин . . . . .	140
13.5.	Перестановочная последовательность случайных величин, не обладающих свойством независимости . . . . .	142
13.6.	О применимости закона «0 или 1» Колмогорова . . . . .	143
13.7.	О применимости закона «0 или 1» Хьюитта–Сэвиджа . . . . .	144
13.8.	Всегда ли применима теорема де Финетти? . . . . .	145
<b>Глава 3.</b>	<b>Предельные теоремы</b>	<b>146</b>
§ 14.	Разные виды сходимости последовательностей случайных величин . . . . .	146
14.1.	О сходимости функций случайных величин . . . . .	148
14.2.	Из сходимости по распределению не вытекает сходимость по вероятности . . . . .	149
14.3.	Последовательности случайных величин, сходящиеся по вероятности, но не с вероятностью 1 . . . . .	149
14.4.	Из сходимости в среднем порядка $r$ вытекает сходимость по вероятности, но обратное неверно . . . . .	151
14.5.	Из сходимости в среднем порядка $r$ не всегда вытекает сходимость почти наверное . . . . .	152
14.6.	Из сходимости почти наверное не всегда следует сходимость в среднем порядка $r$ . . . . .	152
14.7.	Сходимость плотностей обеспечивает слабую сходимость функций распределений, но обратное неверно . . . . .	153
14.8.	Из сходимости $X_n \xrightarrow{d} X$ и $Y_n \xrightarrow{d} Y$ не всегда вытекает, что $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$ . . . . .	154
14.9.	Не существует метрики, соответствующей сходимости почти наверное . . . . .	155
14.10.	О сходимости вполне и сходимости почти наверное последовательностей случайных величин . . . . .	156
14.11.	О сходимости средних по Чезаро для последовательности случайных величин . . . . .	156
§ 15.	Законы больших чисел . . . . .	158
15.1.	Условие Маркова достаточно, но не необходимо для справедливости закона больших чисел . . . . .	159



15.2.	Условие Колмогорова достаточно, но не необходимо для справедливости усиленного закона больших чисел для неодинаково распределенных случайных величин . . . . .	160
15.3.	Еще один пример, когда условие Колмогорова не выполнено, но усиленный закон больших чисел имеет место . . . . .	161
15.4.	О роли условия Колмогорова $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^2/n^2) < \infty$ . . . . .	161
15.5.	Арифметические средние для случайной последовательности могут сходиться по вероятности, даже если теорема Хинчина неприменима . . . . .	163
15.6.	Последовательность случайных величин, удовлетворяющая слабому, но не усиленному закону больших чисел	164
15.7.	Закон больших чисел может не выполняться, если сходимость с вероятностью 1 заменить сходимостью вполне . . . . .	166
15.8.	О справедливости обобщенного закона больших чисел	167
§ 16.	Слабая сходимость вероятностных мер и распределений .	168
16.1.	Определяющие классы и классы, определяющие сходимость . . . . .	169
16.2.	Из сходимости по распределению не вытекает слабая сходимость соответствующих вероятностных мер для всех борелевских множеств . . . . .	172
16.3.	О слабой сходимости и сходимости моментов . . . . .	174
16.4.	Два случая, когда теорема непрерывности неприменима	175
16.5.	Когда теорема непрерывности применима для плотностей? . . . . .	176
16.6.	О слабой сходимости и сходимости по вариации . . . . .	178
16.7.	Слабая сходимость и метрика Леви . . . . .	180
§ 17.	Центральная предельная теорема . . . . .	181
17.1.	Последовательности случайных величин, для которых центральная предельная теорема не справедлива . . . . .	183
17.2.	Какова роль различных условий для выполнения центральной предельной теоремы? . . . . .	184
17.3.	Две «эквивалентные» последовательности случайных величин, такие что одна из них удовлетворяет, а другая не удовлетворяет центральной предельной теореме . . . . .	185
17.4.	Условие Ляпунова и центральная предельная теорема	186
17.5.	О центральной предельной теореме и сходимости дисперсии нормированной суммы $S_n/\sqrt{DS_n}$ . . . . .	189

17.6.	Центральная предельная теорема не всегда применима при суммировании случайного числа случайных величин . . . . .	190
17.7.	Какова связь между двумя центральными предельными теоремами, интегральной и локальной? . . . . .	191
§ 18.	Разные предельные теоремы . . . . .	193
18.1.	В теореме Колмогорова о «трех рядах» условие независимости существенно . . . . .	194
18.2.	Об одном следствии теоремы Колмогорова о «трех рядах» . . . . .	195
18.3.	О радиусе сходимости случайных степенных рядов . . . . .	196
18.4.	Всегда ли можно менять порядок операций взятия математического ожидания, бесконечного суммирования и предела . . . . .	197
18.5.	$L^r$ -сходимость последовательности случайных величин не вытекает из сходимости условных математических ожиданий . . . . .	199
18.6.	О законе повторного логарифма Човера . . . . .	200
18.7.	О рекордах и максимумах последовательности независимых случайных величин . . . . .	201
<b>Глава 4.</b>	<b>Случайные процессы</b>	<b>203</b>
§ 19.	Основные понятия и свойства случайных процессов . . . . .	203
19.1.	О роли семейства конечномерных распределений при построении случайного процесса с заданными свойствами . . . . .	205
19.2.	У случайного процесса могут быть модификации с различными свойствами . . . . .	206
19.3.	О свойстве сепарабельности случайных процессов . . . . .	207
19.4.	Измеримые и прогрессивно измеримые процессы . . . . .	208
19.5.	О стохастической непрерывности случайных процессов . . . . .	210
19.6.	Критерий Колмогорова для непрерывности с вероятностью 1 случайного процесса . . . . .	211
19.7.	Существует ли связь между непрерывностью случайного процесса и непрерывностью порожденной им фильтрации? . . . . .	212
§ 20.	Марковские процессы . . . . .	214
20.1.	Уравнение Колмогорова–Чепмена может иметь место, даже если процесс немарковский . . . . .	216
20.2.	Об одном следствии марковского свойства . . . . .	217

20.3.	Связь между различными понятиями эргодичности для марковских цепей . . . . .	218
20.4.	Эргодичность марковской цепи не всегда обеспечивает сходимость математического ожидания функции от этой цепи . . . . .	220
20.5.	Две неэквивалентные марковские цепи с непрерывным временем могут быть частично эквивалентными . . . . .	222
20.6.	Марковские процессы, феллеровские процессы, сильно феллеровские процессы и связи между ними . . . . .	223
20.7.	Марковские, но не строго марковские процессы . . . . .	224
§ 21.	Стационарные процессы и некоторые смежные вопросы . . . . .	227
21.1.	О свойстве стационарности случайных процессов . . . . .	228
21.2.	О стационарности заданного порядка $m$ . . . . .	229
21.3.	Условие сильного перемешивания не всегда сохраняется при преобразовании стационарного в узком смысле процесса . . . . .	230
21.4.	Стационарный в узком смысле процесс может быть регулярным и не обладать свойством полной регулярности . . . . .	232
21.5.	Законы больших чисел для стационарных в широком смысле процессов . . . . .	233
21.6.	О свойствах эргодичности и перемешивания для сохраняющих меру преобразований . . . . .	234
21.7.	Стационарные последовательности, для которых центральная предельная теорема не имеет места . . . . .	236
§ 22.	Мартингалы с дискретным временем . . . . .	239
22.1.	$L^1$ -ограниченные мартингалы, не являющиеся $L^1$ -доминированными . . . . .	240
22.2.	Мартингалы, для которых теорема Дуба об остановке не имеет места . . . . .	241
22.3.	Каждый квазимартингал является амартом, но обратное не верно . . . . .	242
22.4.	Амарты, мартингалы в пределе, эвентуальные мартингалы и связи между ними . . . . .	243
22.5.	Квазимартингалы, амарты, прогрессивные мартингалы и связи между ними . . . . .	244
22.6.	О сходимости субмартингалов почти на верное и в пространстве $\mathcal{L}^1$ . . . . .	245
22.7.	Мартингалы могут сходиться по вероятности, но не сходиться почти на верное . . . . .	246

22.8.	Мартингалы могут расходиться на множестве с заранее заданной вероятностью . . . . .	248
§ 23.	Мартингалы с непрерывным временем . . . . .	249
23.1.	Мартингалы, не являющиеся локально квадратично-интегрируемыми . . . . .	250
23.2.	$L^2$ -ограниченный локальный мартингал, который не является мартингалом . . . . .	251
23.3.	Экспоненциальные мартингалы: неулучшаемость условия Новикова и два полезных следствия . . . . .	253
23.4.	Квадратично-интегрируемый мартингал с неслучайной характеристикой не обязан быть процессом с независимыми приращениями . . . . .	255
23.5.	О возможности представить мартингал в виде стохастического интеграла относительно другого мартингала . . . . .	256
23.6.	Гауссовские процессы, которые не являются семимартингалами . . . . .	257
§ 24.	Разные свойства случайных процессов . . . . .	259
24.1.	О перестановочности операций пересечения и супремума для последовательности $\sigma$ -алгебр, связанных со случайными процессами . . . . .	259
24.2.	О тождествах Вальда для винеровского процесса . . . . .	261
24.3.	О сходимости квадратической вариации винеровского процесса . . . . .	262
24.4.	Можно ли характеризовать многомерный гауссовский процесс по его проекциям? . . . . .	263
24.5.	Представление Крамера, кратность и спектральный тип случайного процесса . . . . .	265
24.6.	Фрактальный винеровский процесс и марковское свойство . . . . .	267
	<b>Дополнительные замечания</b>	<b>268</b>
	<b>Литература</b>	<b>273</b>

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство  
 $EX, DX$  — математическое ожидание и дисперсия величины  $X$   
 $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ , —  $n$ -мерное евклидово пространство  
 $\mathcal{B}^n$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $\mathbb{R}^n$   
 $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел:  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$   
 $\mathbb{N}_0$  — множество неотрицательных целых чисел:  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$   
 $\tilde{\mathbb{N}}$  — множество целых чисел:  $\tilde{\mathbb{N}} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$   
 $I_A, I(A)$  — индикаторная функция множества  $A$   
 $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$  — нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$   
 $X \sim F$  — случайная величина  $X$  имеет распределение  $F$   
 $\Phi$  — стандартная нормальная функция распределения  
 $F_1 * F_2$  — свертка функций распределения  $F_1$  и  $F_2$   
 $x \vee y$  — максимум величин  $x$  и  $y$ :  $\max(x, y)$   
 $x \wedge y$  — минимум величин  $x$  и  $y$ :  $\min(x, y)$   
 $\implies, \iff$  — логические импликации  
 $\downarrow$  — монотонное убывание  
п. н. — почти наверное  
б. ч. — бесконечно часто  
 $\xrightarrow{d}$  — сходимость по распределению  
 $\xrightarrow{P}$  — сходимость по вероятности  
 $\xrightarrow{\text{п.н.}}$  — сходимость почти наверное (с вероятностью 1)  
 $\xrightarrow{L^r}$  — сходимость в пространстве  $\mathcal{L}^r$   
 $\xrightarrow{w}$  — слабая сходимость  
 $\xrightarrow{c}$  — сходимость вполне  
 $\xrightarrow{v}$  — сходимость по вариации  
ЗБЧ — закон больших чисел  
УЗБЧ — усиленный закон больших чисел  
ЦПТ — центральная предельная теорема  
 $\binom{n}{k}$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$

# ГЛАВА 1

## СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

### § 1. Классы случайных событий

Пусть задано произвольное непустое множество  $\Omega$ . Его элементы, обозначаемые  $\omega$ , будут интерпретироваться как исходы некоторого эксперимента. Как обычно, через  $A \cup B$  и  $A \cap B$  (а также  $AB$ ) будем обозначать соответственно объединение и пересечение любых двух подмножеств  $A \subseteq \Omega$  и  $B \subseteq \Omega$ , а через  $\bar{A}$  — дополнение множества  $A \subseteq \Omega$ . В частности,  $\bar{\Omega} = \emptyset$ , где  $\emptyset$  — пустое множество. Если множества  $A$  и  $B$  не пересекаются, то их объединение будем обозначать  $A + B$ ; соответственно, объединение непересекающихся множеств  $A_i$ ,  $i \geq 1$ , обозначается  $\sum_i A_i$ .

Класс  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$  называется *алгеброй*, если он содержит  $\Omega$  и замкнут относительно дополнения и конечных объединений, т. е. если:

- а)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;
- б)  $A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$ ;
- в)  $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ .

Учитывая законы де Моргана ( $\overline{A_1 A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$  и  $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \bar{A}_2$ ), легко видеть, что условие в) можно заменить условием

- в')  $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \implies A_1 A_2 \in \mathcal{A}$ .

Это означает, что класс  $\mathcal{A}$  замкнут относительно конечных пересечений.

Класс  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  *$\sigma$ -алгеброй*, если  $\mathcal{F}$  — алгебра, которая замкнута относительно счетных объединений, т. е. если

- г)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

Снова, как и выше, условие г) может быть заменено эквивалентным ему условием

- г')  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

Таким образом,  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  является замкнутой относительно счетных пересечений.

Напомним, что элементы любой алгебры или  $\sigma$ -алгебры называются *случайными событиями* (или просто *событиями*).

Другие классы событий, такие как полуалгебры,  $d$ -системы и произведение  $\sigma$ -алгебр, будут введены и изучены в рассмотренных далее конкретных примерах.

По поводу основных теоретико-вероятностных объектов, идей и результатов читатель может обратиться к любому из хорошо известных учебных пособий, например [9, 26, 60, 75, 81, 92, 106, 116, 117, 118, 145, 179, 330].

### 1.1. Класс событий, который образует алгебру, но не является $\sigma$ -алгеброй

(а) Пусть  $\Omega = [0, \infty)$ , а класс  $\mathcal{A}_1$  содержит все интервалы вида  $[a, b)$  или  $[a, \infty)$ , где  $0 \leq a < b < \infty$ . Далее, пусть класс  $\mathcal{A}_2$  состоит из пустого множества  $\emptyset$  и всех конечных сумм непересекающихся интервалов из  $\mathcal{A}_1$ . Покажем, что класс  $\mathcal{A}_1$  не является алгеброй, а  $\mathcal{A}_2$  — алгебра, которая не является  $\sigma$ -алгеброй.

Действительно, возьмем произвольные действительные числа  $a$  и  $b$ ,  $0 < a < b < \infty$ . Тогда  $A = [a, b) \in \mathcal{A}_1$ , но поскольку  $\bar{A} = [0, a) \cup [b, \infty) \notin \mathcal{A}_1$ , то  $\mathcal{A}_1$  не может быть алгеброй.

Далее, легко проверить, что: 1) объединение конечного числа элементов класса  $\mathcal{A}_2$  принадлежит  $\mathcal{A}_2$ ; 2) дополнение любого элемента класса  $\mathcal{A}_2$  снова принадлежит  $\mathcal{A}_2$ . Таким образом, мы видим, что  $\mathcal{A}_2$  образует алгебру. Однако  $\mathcal{A}_2$  не является  $\sigma$ -алгеброй, потому что, например, множество  $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$  при любом  $n \in \mathbb{N}$  принадлежит  $\mathcal{A}_2$ , в то время как пересечение  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$  не принадлежит  $\mathcal{A}_2$ .

(б) Пусть  $\mathcal{A}$  — класс подмножеств множества  $\Omega = \mathbb{R}^1$ , состоящий из конечных сумм непересекающихся интервалов вида  $(-\infty, a]$ ,  $(b, c]$  и  $(d, \infty)$ , где  $a, b, c, d$  — любые числа из  $\mathbb{R}^1$ . Тогда класс  $\mathcal{A}$  образует алгебру. Однако пересечение  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(b - \frac{1}{n}, c\right]$ , равное  $[b, c]$ , не входит в  $\mathcal{A}$ . Следовательно,  $\mathcal{A}$  не является  $\sigma$ -алгеброй.

(в) Возьмем произвольное множество  $\Omega$ , содержащее бесконечное число элементов. Обозначим через  $\mathcal{A}$  совокупность всех таких подмножеств  $A \subseteq \Omega$ , что конечно либо дополнение  $\bar{A}$  подмножества  $A$ , либо оно само. Тогда легко видеть, что  $\mathcal{A}$  — алгебра, которая  $\sigma$ -алгеброй не является.

## 1.2. О замкнутости класса событий относительно операций объединения, пересечения и дополнения

Пусть  $\Omega = \mathbb{R}^1$ , а класс  $\mathcal{A}$  состоит из всех интервалов вида  $(x, \infty)$ ,  $x \in \Omega$ . Используя обозначения  $u = x \wedge y = \min(x, y)$  и  $v = x \vee y = \max(x, y)$ , мы видим, что

$$(x, \infty) \cup (y, \infty) = (u, \infty) \in \mathcal{A}, \quad (x, \infty) \cap (y, \infty) = (v, \infty) \in \mathcal{A},$$

т. е. класс  $\mathcal{A}$  замкнут относительно (конечных) объединений и пересечений. Однако, класс  $\mathcal{A}$  не замкнут относительно взятия дополнения. Например, если  $A = (x, \infty)$ , то  $A \in \mathcal{A}$ , но  $\bar{A} = (-\infty, x] \notin \mathcal{A}$ .

## 1.3. Каждая алгебра событий является полуалгеброй, но не наоборот

Пусть  $\Omega$  — произвольное множество. Напомним, что класс  $\mathcal{S}$  подмножеств  $\Omega$  называется *полуалгеброй*, если  $\Omega \in \mathcal{S}$ ,  $\emptyset \in \mathcal{S}$ , класс  $\mathcal{S}$  замкнут относительно конечных пересечений и дополнения любого множества в  $\mathcal{S}$  является конечной суммой непересекающихся множеств из  $\mathcal{S}$ .

Легко видеть, что любая алгебра подмножеств множества  $\Omega$  является и полуалгеброй. Простые примеры показывают, что обратное неверно.

(а) Пусть  $\Omega = [-\infty, \infty]$ , а класс  $\mathcal{S}_1$  содержит  $\Omega$ ,  $\{\infty\}$  и все интервалы вида  $[a, b)$ , где  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Тогда  $\emptyset \in \mathcal{S}_1$ ,  $[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [a_1 \vee a_2, b_1 \wedge b_2) \in \mathcal{S}_1$  и  $\overline{[a, b)} = [-\infty, a) \cup [b, \infty)$ . Следовательно,  $\mathcal{S}_1$  — полуалгебра. Но, очевидно, что  $\mathcal{S}_1$  — не алгебра.

(б) Возьмем  $\Omega = \mathbb{R}^1$  и обозначим через  $\mathcal{S}_2$  класс всех подмножеств вида  $AB$ , где  $A$  — замкнутое, а  $B$  — открытое множество в  $\Omega$ . Тогда  $\mathcal{S}_2$  образует полуалгебру, но  $\mathcal{S}_2$  не является алгеброй.

## 1.4. В $\sigma$ -алгебре подмножеств множества $\Omega$ могут не содержаться все его подмножества

В любой теоретико-множественной задаче мы рассматриваем множество  $\Omega$ , называемое *пространством элементарных событий*, и некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}$  случайных событий, т. е. подмножеств  $\Omega$ . Поэтому для нас важно знать, содержит ли  $\mathcal{F}$  все подмножества множества  $\Omega$ . Приводимый далее пример содержит ответ на этот вопрос.

Напомним сначала, что множество  $A \in \Omega$  называется *c-конечным*, если его дополнение  $\bar{A}$  конечно.

Пусть класс  $\mathcal{F}_1$  состоит из всех конечных и всех *c-конечных* подмножеств множества  $\Omega$ . Тогда легко проверить, что  $\mathcal{F}_1$  является алгеброй.



При этом  $\mathcal{F}_1$  будет  $\sigma$ -алгеброй тогда и только тогда, когда  $\Omega$  — конечное множество.

Далее, множество  $A \in \Omega$  называется *c-счетным*, если его дополнение  $\bar{A}$  содержит счетное число элементов.

Через  $\mathcal{F}_2$  обозначим совокупность всех счетных и всех *c-счетных* подмножеств множества  $\Omega$ . Нетрудно видеть, что  $\mathcal{F}_2$  образует  $\sigma$ -алгебру. Предположим теперь, что множество  $\Omega$  несчетное. Тогда в  $\Omega$  имеется такое множество  $A$ , что одновременно  $A$  и его дополнение  $\bar{A}$  — несчетные множества. Это показывает, в частности, что не все подмножества множества  $\Omega$  входят в  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_2$ .

### 1.5. Каждая $\sigma$ -алгебра является $d$ -системой, но обратное неверно

Напомним, что класс  $\mathcal{D}$  подмножеств  $\Omega$  называется *d-системой*, если:

- 1)  $\Omega \in \mathcal{D}$ ;
- 2)  $A, B \in \mathcal{D}$  и  $A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$ ;
- 3)  $A_n \in \mathcal{D}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ .

Тривиально проверить, что каждая  $\sigma$ -алгебра является также и  $d$ -системой. Естественно задаться вопросом о справедливости обратного утверждения. В общем случае ответ отрицательный. Проиллюстрируем это на одном конкретном примере.

Предположим, что  $\Omega$  — конечное множество, число элементов которого четное (например,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}\}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ ). Обозначим через  $\mathcal{D}_e$  совокупность всех подмножеств  $D$  множества  $\Omega$ , содержащих четное число элементов. Очевидно,  $\Omega \in \mathcal{D}_e$ . Пусть  $A \in \mathcal{D}_e$  и  $B \in \mathcal{D}_e$ , причем  $A \subseteq B$ . Тогда разность  $B \setminus A$  тоже содержит четное число элементов множества  $\Omega$  и, значит,  $B \setminus A \in \mathcal{D}_e$ .

Наконец, если  $A_1, A_2, \dots$  — последовательность подмножеств множества  $\Omega$ , принадлежащих  $\mathcal{D}_e$ , т. е. каждое  $A_j$  имеет четное число элементов, и  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , то легко заметить, что объединение  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  также содержит четное число элементов, т. е.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_e$ . Следовательно, условия 1)–3) выполнены и класс  $\mathcal{D}_e$  образует  $d$ -систему. Однако, положив, например,  $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$  и  $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ , мы видим, что  $A \in \mathcal{D}_e$ ,  $B \in \mathcal{D}_e$ , но пересечение  $AB = \omega_2$  не принадлежит  $\mathcal{D}_e$ . Это означает, что класс  $\mathcal{D}_e$  не является даже алгеброй, а тем более и  $\sigma$ -алгеброй.

Заметим, однако, что если  $d$ -система  $\mathcal{D}$  подмножеств  $\Omega$  замкнута относительно конечных пересечений, то тогда  $\mathcal{D}$  образует  $\sigma$ -алгебру.

### 1.6. Множества, которые не являются событиями в произведении соответствующих $\sigma$ -алгебр

Пусть заданы два произвольных множества,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Их *произведение*, обозначаемое  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , задается так:  $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$ . Для любого множества  $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$  через  $A_{\omega_1}$  обозначим сечение  $A$  в точке  $\omega_1$ , т.е.  $A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$ . Аналогично,  $A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$ . Прямоугольник в  $\Omega_1 \times \Omega_2$  — это подмножество вида

$$A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}, \quad A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2.$$

Пусть  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  —  $\sigma$ -алгебры подмножеств множеств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. Если  $A_1 \in \mathcal{F}_1$  и  $A_2 \in \mathcal{F}_2$ , то множество  $A_1 \times A_2$  называется измеримым прямоугольником (относительно  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$ ). Нетрудно видеть, что измеримые прямоугольники образуют полуалгебру подмножеств в произведении  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Далее, алгебра, порожденная измеримыми прямоугольниками, состоит из всех конечных сумм непересекающихся измеримых прямоугольников. Наконец,  $\sigma$ -алгебра, порожденная этой алгеброй, обозначается  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  и называется *произведением  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$* .

Хорошо известен следующий результат [21, 81, 326]: для любого измеримого множества  $A$  в  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  и любых фиксированных элементов  $\omega_1 \in \Omega_1$  и  $\omega_2 \in \Omega_2$  сечения  $A_{\omega_1}$  и  $A_{\omega_2}$  являются измеримыми множествами соответственно в  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  и  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ .

Теперь естественно поставить вопрос: является ли  $A$  измеримым множеством в  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ , если известно, что его сечения  $A_{\omega_1}$ ,  $\omega_1 \in \Omega_1$ , и  $A_{\omega_2}$ ,  $\omega_2 \in \Omega_2$  — измеримые множества соответственно в  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  и  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ? Нетрудно видеть, что ответ отрицателен.

Действительно, предположим, что  $\Omega$  — несчетное множество, а  $\mathcal{F}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $\Omega$ , содержащая все одноэлементные подмножества  $\Omega$ . Тогда множество  $D = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega\}$ , т.е. диагональ произведения  $\Omega \times \Omega$ , в силу несчетности  $\Omega$ , не принадлежит произведению  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ . В то же время все сечения  $D$  принадлежат  $\mathcal{F}$ . Другими словами, для каждого  $\omega \in \Omega$  сечение  $D_\omega$  принадлежит  $\mathcal{F}$ , т.е.  $D_\omega$  — событие, но  $D \notin \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ , и, значит,  $D$  не является событием.

### 1.7. Объединение $\sigma$ -алгебр может не быть $\sigma$ -алгеброй

Предположим, что  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  — последовательность  $\sigma$ -алгебр подмножеств некоторого множества  $\Omega$ . Тогда их пересечение  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  всегда

является  $\sigma$ -алгеброй. Вопрос: является ли  $\sigma$ -алгеброй объединение  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  заданных  $\sigma$ -алгебр? Покажем, что в общем случае это не так.

(а) Рассмотрим множество  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  и следующие два класса его подмножеств:  $\mathcal{F}_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \emptyset, \Omega\}$  и  $\mathcal{F}_2 = \{\{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \emptyset, \Omega\}$ . Каждый из этих классов является алгеброй, а также и  $\sigma$ -алгеброй. Очевидно, что пересечение  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  равно тривиальной  $\sigma$ -алгебре  $\{\emptyset, \Omega\}$ . Однако объединение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \emptyset, \Omega\}$$

не является  $\sigma$ -алгеброй. В самом деле, достаточно, например, заметить, что множество  $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\}$  не принадлежит классу  $\mathcal{F}$ .

(б) Пусть  $\Omega$  — фиксированное множество, а  $(\mathcal{A}_n)$ ,  $n \geq 1$ , — последовательность алгебр подмножеств множества  $\Omega$ . Будем говорить, что  $(\mathcal{A}_n)$  — возрастающая последовательность, если для каждого  $n \geq 1$  имеет место строгое включение  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ , и что последовательность  $(\mathcal{A}_n)$  — неубывающая, если  $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$  при всех  $n \geq 1$ , но возможны равенства  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$  для некоторых индексов  $n$ .

Для любого класса  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$  и любого фиксированного множества  $D \subset \mathcal{A}$  введем новый класс  $\mathcal{A}|D = \{A \in \mathcal{A} : A \subset D\}$ . Легко заметить, что если  $\mathcal{A}$  — алгебра, то  $\mathcal{A}|D$  является алгеброй в  $D$ , а если  $(\mathcal{A}_n)$  — возрастающая последовательность алгебр, то это свойство сохраняется и для новой последовательности  $(\mathcal{A}_n|D)$ .

Итак, пусть  $(\mathcal{A}_n)$  — возрастающая последовательность алгебр. Мы интересуемся свойствами объединения  $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ . Для этой цели докажем сначала следующие два утверждения:

1. Для каждого фиксированного индекса  $m$  существует такое множество  $D \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_m$ , что последовательность  $(\mathcal{A}_n|(\Omega \setminus D), n \geq 1)$  возрастает.

2. В классе  $\mathcal{A}$  существует последовательность  $(C_n, n \geq 1)$ , состоящая из таких попарно непересекающихся множеств, что  $C_n \notin \mathcal{A}_n$ ,  $n \geq 1$ .

Перейдем к доказательству этих утверждений. Поскольку индекс  $m$  фиксирован, а последовательность  $(\mathcal{A}_n)$  возрастает, то для любых  $m_1$  и  $m_2$ , для которых  $m < m_1 < m_2$ , найдутся такие множества  $G_1$  и  $G_2$ , что  $G_1 \in \mathcal{A}_{m_1} \setminus \mathcal{A}_m$  и  $G_2 \in \mathcal{A}_{m_2} \setminus \mathcal{A}_{m_1}$ . Тогда среди трех попарно непересекающихся множеств  $G_1 \setminus G_2$ ,  $G_1 \cap G_2$  и  $G_2 \setminus G_1$  по крайней мере два множества не принадлежат  $\mathcal{A}_m$ . Таким образом, мы нашли два непересекающиеся множества (обозначим их  $F_1$  и  $F_2$ ), не входящие в  $\mathcal{A}_m$ .

Отсюда вытекает, что для любого  $n > m_2$  имеет место соотношение

$$\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus F_1)) \vee (\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus F_2)).$$

(Напомним, что для любых алгебр  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_2$  через  $\mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2$  принято обозначать алгебру, порожденную объединениями  $A \cup B$ ,  $A \in \mathcal{D}_1$ ,  $B \in \mathcal{D}_2$ .) Это соотношение и свойство возрастания последовательности  $(\mathcal{A}_n)$  позволяют заключить, что хотя бы одна из последовательностей,  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus F_1))$  или  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus F_2))$ , также возрастает. Следовательно, полагая  $D = F_j$ , если  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus F_j))$  возрастает, мы получаем требуемую возрастающую последовательность алгебр  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus D))$ . Этим утверждение 1 доказано.

Далее, из утверждения 1 следует существование такого множества  $C_1 \in \mathcal{A}$ , что  $C_1 \notin \mathcal{A}_1$ , причем последовательность  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus C_1))$  возрастает. Рассуждая индуктивно, предположим, что в классе  $\mathcal{A}$  найдены такие попарно непересекающиеся множества  $C_1, \dots, C_k$ , что  $C_i \notin \mathcal{A}_i$ , для всех  $i = 1, \dots, k$ , а последовательность  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus S_k))$ , где  $S_k = C_1 \cup \dots \cup C_k$ , является возрастающей. Снова, согласно утверждению 1, существует такое множество  $C_{k+1} \in \mathcal{A} | (\Omega \setminus S_k)$ , что  $C_{k+1} \notin \mathcal{A}_{k+1} | (\Omega \setminus S_k)$ , а  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus S_k) | (\Omega \setminus C_{k+1}))$  — возрастающая последовательность. При этом  $C_1, \dots, C_{k+1}$  — попарно непересекающиеся множества, а  $C_{k+1} \notin \mathcal{A}_{k+1}$ . Остается только заметить, что последовательность  $(\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus S_{k+1}))$  также возрастающая. Это следует из проведенного выше рассуждения и соотношения  $\mathcal{A}_n | (\Omega \setminus S_k) | (\Omega \setminus C_{k+1}) = \mathcal{A}_n | (\Omega \setminus S_{k+1})$ , где  $S_{k+1} = S_k \cup C_{k+1}$ . Утверждение 2 доказано.

Теперь не составляет труда показать, что объединение  $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$  является  $\sigma$ -алгеброй. Предположим обратное, т. е. что  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра. Возьмем последовательность  $(C_n)$ , построенную в утверждении 2. Пусть  $\{N_1, N_2, \dots\}$  — разбиение множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$  на бесконечные подмножества. Обозначим  $D_p = \bigcup_{n \in N_p} C_n$ . Из сделанного предположения (о том, что  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра) вытекает, что  $D_p \in \mathcal{A}$ , и, следовательно, для каждого  $p$  существует такое  $n_p$ , что  $D_p \in \mathcal{A}_{n_p}$ . Так как последовательность алгебр  $(\mathcal{A}_n)$  возрастает, то можно считать, что последовательность индексов  $(n_p)$  также (строго!) возрастает. Далее, для каждого  $p$  выберем индекс  $m_p \in N_p$ , для которого  $m_p > n_p$ , и положим  $E = \bigcup_{p=1}^{\infty} C_{m_p}$ . Согласно нашему предположению  $E \in \mathcal{A}$ , и, следовательно, существует такой индекс  $q$ , что  $E \in \mathcal{A}_{n_q}$ . Отсюда и из конструкции множества  $D_p$  вытекает, что  $D_q \cap E = C_{m_q} \in \mathcal{A}_{n_q}$ . Однако  $n_q < m_q$ , а это означает, что  $C_{m_q} \in \mathcal{A}_{m_q}$ . Полученное таким образом

противоречие (согласно утверждению 2,  $C_n \notin \mathcal{A}_n$ ) показывает, что наше предположение (о том, что  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра) неверно.

Итак, в общем случае объединение счетного числа  $\sigma$ -алгебр не обязательно является  $\sigma$ -алгеброй.

## § 2. Вероятность

Предположим, что  $\Omega$  — любое множество, а  $\mathcal{A}$  — алгебра его подмножеств. Функция  $P$  называется *вероятностью* на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$ , если она определена для всех событий  $A \in \mathcal{A}$  и удовлетворяет следующим аксиомам:

а)  $P(A) \geq 0$  для любого  $A \in \mathcal{A}$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;

б) функция  $P$  конечно аддитивна, т. е. для любого конечного числа попарно непересекающихся событий  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  выполнено равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

в) функция  $P$  непрерывна в  $\emptyset$ , т. е. для любых событий  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  таких, что  $A_{n+1} \subset A_n$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Отметим здесь, что условия б) и в) эквивалентны следующему условию:

г) функция  $P$   $\sigma$ -аддитивна (счетно аддитивна), т. е.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

для любых попарно непересекающихся событий  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ .

Пусть  $P_0$  —  $\sigma$ -аддитивная вероятность на  $(\Omega, \mathcal{A})$  и  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$  обозначает наименьшую  $\sigma$ -алгебру, порожденную алгеброй  $\mathcal{A}$ . Тогда, согласно теореме Каратеодори (см. [21, 60, 75, 81, 116, 117, 139, 145, 330]), на  $(\Omega, \mathcal{F})$  существует единственная вероятность  $P$  являющаяся *продолжением*  $P_0$ , т. е. такая, что  $P(A) = P_0(A)$  для  $A \in \mathcal{A}$ . В этом случае принято также говорить, что  $P_0$  является *сужением*  $P$  на алгебру  $\mathcal{A}$ , и обозначать это так:  $P|_{\mathcal{A}} = P_0$ .

Упорядоченная тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется *вероятностным пространством*, если  $\Omega$  — произвольное множество точек (объектов), называемых элементарными событиями (исходами) некоторого эксперимента;  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ , причем элементы  $\mathcal{F}$  называются

случайными событиями (или просто *событиями*); функция  $P$  есть вероятность на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , т. е.  $P$  удовлетворяет условиям а), б) и в), или, что эквивалентно, условиям а) и г).

Изложенные далее примеры иллюстрируют свойства вероятностных мер. Пример 2.4 посвящен важному понятию регулярной условной вероятности.

### 2.1. Вероятностная мера, которая является аддитивной, но не $\sigma$ -аддитивной

Пусть  $\Omega$  — множество всех рациональных чисел  $r$ ,  $r \in [0, 1]$ , а  $\mathcal{F}_1$  — класс подмножеств множества  $\Omega$ , имеющих вид  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  или  $(a, b)$ , где  $a$  и  $b$  — рациональные числа. Обозначим через  $\mathcal{F}_2$  класс всех конечных сумм попарно непересекающихся множеств из  $\mathcal{F}_1$ . Тогда  $\mathcal{F}_2$  является алгеброй. Определим теперь вероятностную меру  $P$  так:

$$P(A) = b - a, \quad \text{если } A \in \mathcal{F}_1;$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad \text{если } B \in \mathcal{F}_2.$$

Если  $B \in \mathcal{F}_2$ , то подразумевается, что  $B = \sum_{i=1}^n A_i$ , где  $A_i$  — попарно не пересекающиеся множества из  $\mathcal{F}_1$ .

Мы интересуемся свойствами вероятности  $P$ . Покажем, например, что  $P$  аддитивна. Действительно, возьмем два непересекающихся множества из  $\mathcal{F}_2$ ,  $B = \sum_{i=1}^n A_i$  и  $B' = \sum_{j=1}^m A'_j$ , где  $A_i, A'_j \in \mathcal{F}_1$  и все  $A_i, A'_j$  попарно непересекающиеся. Тогда сумму  $B + B'$  можно представить в виде  $B + B' = \sum_{k=1}^{m+n} C_k$ , где  $C_1, \dots, C_{m+n}$  — это множества  $A_1, \dots, A_n$  и  $A'_1, \dots, A'_m$ , взятые в произвольном порядке. Тогда, согласно определению  $P$ , получаем, что

$$\begin{aligned} P(B + B') &= P\left(\sum_{k=1}^{m+n} C_k\right) = \sum_{k=1}^{m+n} P(C_k) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{j=1}^m P(A'_j) = P(B) + P(B'). \end{aligned}$$

Это означает, что вероятностная мера  $P$  аддитивна. Далее легко видеть, что каждое одноточечное множество  $\{r\}$  принадлежит  $\mathcal{F}_2$  и  $P(\{r\}) = 0$ . Так как  $\Omega$  — счетное множество и  $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \{r_i\}$ , то имеем  $P(\Omega) = 1 \neq 0 = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{r_i\})$ .

Полученное противоречие показывает, что вероятностная мера  $P$  не является  $\sigma$ -аддитивной на алгебре  $\mathcal{F}_2$ .

## 2.2. Две вероятностные меры могут совпадать на заданном классе событий и не совпадать на $\sigma$ -алгебре, порожденной этим классом

Напомним сначала следующий результат (см. [116, 145, 157]): пусть  $\Omega$  — произвольное множество и  $\mathcal{C}$  — класс событий в  $\Omega$ , замкнутый относительно операции пересечения, т. е.  $A, B \in \mathcal{C} \implies AB \in \mathcal{C}$ . Пусть на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ , где  $\mathcal{F}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\mathcal{C}$ , заданы две вероятности,  $P_1$  и  $P_2$ , совпадающие на  $\mathcal{C}$ . Тогда они совпадают и на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ .

Неудивительно, что такие результаты существенно зависят от структуры класса  $\mathcal{C}$ . Проиллюстрируем это конкретным примером.

Рассмотрим множество  $\Omega = \{a, b, c, d\}$  и определим вероятностные меры  $Q_1$  и  $Q_2$  следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1(\{a\}) = Q_1(\{d\}) &= \frac{1}{6}, & Q_1(\{b\}) = Q_1(\{c\}) &= \frac{1}{3}, \\ Q_2(\{a\}) = Q_2(\{d\}) &= \frac{1}{3}, & Q_2(\{b\}) = Q_2(\{c\}) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Выберем класс  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ , где  $C_1 = \{a, b\}$ ,  $C_2 = \{c, d\}$ ,  $C_3 = \{a, c\}$ ,  $C_4 = \{b, d\}$ . Проверим, что  $Q_1(C_i) = Q_2(C_i)$  для каждого  $C_i \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Например, если  $C = C_2$ , находим

$$\begin{aligned} Q_1(C_2) &= Q_1(\{c\}) + Q_1(\{d\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \\ Q_2(C_2) &= Q_2(\{c\}) + Q_2(\{d\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Так же элементарно проверяется, что  $Q_1(\cdot) = Q_2(\cdot)$ , и для остальных элементов класса  $\mathcal{C}$ .

Пусть теперь  $\mathcal{F}$  — совокупность всех подмножеств множества  $\Omega$ . Тогда  $\mathcal{F}$  совпадает с  $\sigma$ -алгеброй  $\sigma(\mathcal{C})$ , порожденной классом  $\mathcal{C}$ . Спрашивается, совпадают ли  $Q_1$  и  $Q_2$  на  $\mathcal{F}$ ? Ответить на этот вопрос легко. Например,  $C_1 \cap C_3 = \{a\} \in \sigma(\mathcal{C})$ , однако

$$Q_1(\{a\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} = Q_2(\{a\}).$$

Несовпадение  $Q_1$  и  $Q_2$  также имеет место для каждого из остальных элементов  $\{b\}$ ,  $\{c\}$  и  $\{d\}$ , принадлежащих  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ .

Итак,  $Q_1 = Q_2$  на классе  $\mathcal{C}$ , но  $Q_1 \neq Q_2$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ . Причина этого — незамкнутость класса  $\mathcal{C}$  относительно операции пересечения.

### 2.3. Теорема Колмогорова о продолжении меры в пространстве $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$

Вероятностные меры в измеримом пространстве  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ,  $n \geq 1$ , строятся сначала для элементарных множеств (прямоугольников или параллелепипедов вида  $(a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ), потом для множеств вида  $A = \sum_i (a_i, b_i]$  и, наконец, с помощью теоремы Каратеодори, для множеств из  $\mathcal{B}^n$ . Подобную конструкцию можно использовать и для построения вероятностей в пространстве  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ .

Пусть  $C_n(B) = \{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$ ,  $B \in \mathcal{B}^n$ , обозначает цилиндрическое множество в  $\mathbb{R}^\infty$  с основанием  $B \in \mathcal{B}^n$ . Естественно рассматривать цилиндрические множества как элементарные множества в  $\mathbb{R}^\infty$ . Вероятностную меру множеств  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}^\infty$  можно определить через вероятности элементарных множеств.

Пусть  $P$  — вероятностная мера на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ . Положим

$$P_n(B) = P(C_n(B)), \quad B \in \mathcal{B}^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом мы получаем последовательность вероятностных мер  $P_1, P_2, \dots$ , определенных соответственно на измеримых пространствах  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2), \dots$ . Для каждого  $n = 1, 2, \dots$  и любого  $B \in \mathcal{B}^n$  имеет место равенство

$$P_{n+1}(B \times \mathbb{R}^1) = P_n(B), \quad (1)$$

называемое *свойством согласованности*. Фундаментальным является следующий обратный результат (теорема Колмогорова о продолжении меры на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ ).

*Пусть  $P_1, P_2, \dots$  — последовательность вероятностных мер на  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2), \dots$ , обладающих свойством согласованности (1). Тогда на  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$  существует такая единственная, вероятностная мера  $P$ , что  $P(C_n(B)) = P_n(B)$  для любого множества  $B \in \mathcal{B}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$*

Доказательство этой теоремы может быть найдено, например, в книгах [22, 60, 116, 117, 145, 330, 345, 404]. Заметим, что оно использует некоторые специфические свойства евклидовых пространств. Оказывается, что в общем случае, без предположений о топологической структуре измеримых пространств и о структуре семейства мер  $\{P_n\}$ , эта теорема неверна. Вот конкретный пример.

Рассмотрим пространство  $\Omega = (0, 1]$ , которое, очевидно, не является полным. В этом пространстве построим последовательность  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$  и последовательность вероятностных мер  $P_1, P_2, \dots$ , где  $P_n$  определена на  $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ . Затем мы введем  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$ , являющуюся наименьшей  $\sigma$ -алгеброй, содержащей все  $\mathcal{F}_n$ , и покажем, что



не существует такой вероятностной меры  $P$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , что ее сужение  $P|_{\mathcal{F}_n}$  на  $\mathcal{F}_n$  совпадало бы с  $P_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Действительно, для  $n = 1, 2, \dots$  определим функцию  $h_n(\omega) = 1$ , если  $0 < \omega < \frac{1}{n}$ , и  $h_n(\omega) = 0$ , если  $\frac{1}{n} \leq \omega \leq 1$ . Пусть

$$\mathcal{C}_n = \{A \subset \Omega: A = [\omega: h_n(\omega) \in B], B \in \mathcal{B}^1\}$$

и  $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все классы множеств  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ . Ясно, что  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ . Введем  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$ , содержащую все  $\mathcal{F}_n$ . На измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}_n)$  определим вероятностную меру  $P_n$  следующим образом:

$$P_n\{\omega: (h_1(\omega), \dots, h_n(\omega)) \in B^n\} = \begin{cases} 1, & \text{если } (1, \dots, 1) \in B^n, B^n \in \mathcal{B}^n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что  $\mathcal{C}_n$  содержит лишь множества  $(0, \frac{1}{n})$ ,  $[\frac{1}{n}, 1]$ ,  $\emptyset$  и  $\Omega$ , и легко описать структуру  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$ . Кроме того, мера  $P_n$  сосредоточена на  $(0, \frac{1}{n})$ . Тогда семейство мер  $\{P_n\}$  удовлетворяет свойству согласованности (1), т. е.  $P_{n+1}(A) = P_n(A)$  для всех  $A \in \mathcal{F}_n$ .

Допустим теперь, что на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$  существует такая вероятностная мера  $P$ , что  $P|_{\mathcal{F}_n} = P_n$ . Тогда для любого  $n = 1, 2, \dots$  имело бы место соотношение

$$P\{\omega: h_1(\omega) = \dots = h_n(\omega) = 1\} = P_n\{\omega: h_1(\omega) = \dots = h_n(\omega) = 1\} = 1. \quad (2)$$

Заметим, однако, что монотонное убывание последовательности

$$\{\omega: h_1(\omega) = \dots = h_n(\omega) = 1\} = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

противоречит равенствам (2) и требованию счетной аддитивности функции  $P$ , а значит, и непрерывности этой функции в «нуле»  $\emptyset$ .

#### 2.4. О регулярных условных вероятностях

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и  $\mathcal{F}$  — такая  $\sigma$ -алгебра, что  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ . Напомним, что условная вероятность  $P(A|\mathcal{F}_1)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , определена  $P$ -п. н. как такая  $\mathcal{F}_1$ -измеримая функция  $\omega$ , что

$$P(AB) = \int_B P(A|\mathcal{F}_1)dP(\omega) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{F}_1.$$