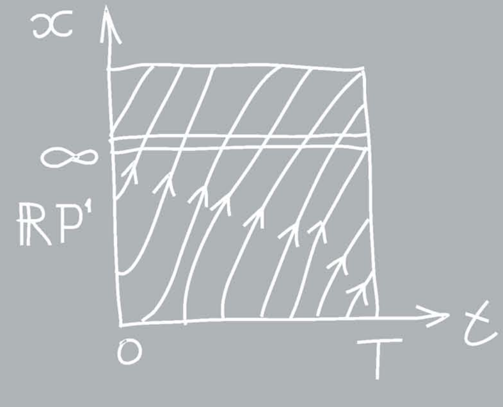
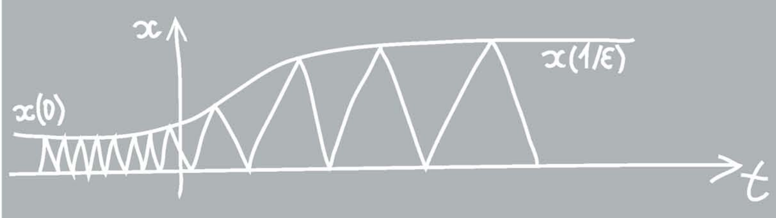
Классические

НАПРАВЛЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

В. И. АРНОЛЬД

Обыкновенные дифференциальные уравнения





УДК 517.9
ББК 22.161.6
А84

Арнольд В. И.
Обыкновенные дифференциальные уравнения
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
341 с.
ISBN 978-5-4439-2007-8

За сорок лет, прошедших со времени выхода первого издания, этот учебник успел стать классическим. Большое внимание уделяется геометрическому смыслу основных понятий. В книге прослеживается тесная связь предмета с приложениями, в особенности с механикой. При изложении делается упор не на формулы, а на геометрический смысл основных определений и теорем. Автор знакомит читателя с такими понятиями, как многообразия, однопараметрические группы диффеоморфизмов, касательные пространства и расслоения. В число рассматриваемых примеров из механики входит исследование фазовых портретов консервативных систем с одной степенью свободы, теория малых колебаний, параметрический резонанс.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике.

Подготовлено на основе книги: *В. И. Арнольд*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Новое издание, исправл. — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241 74 83.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-2007-8

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

§ 1. Фазовые пространства

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности*, *конечномерности* и *дифференцируемости*. Прежде чем дать точные математические определения, рассмотрим несколько примеров.

1. Примеры эволюционных процессов. Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящее время. Множество всевозможных состояний процесса называется *фазовым пространством*.

Так, например, классическая механика рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы. Фазовое пространство механической системы — это множество, элементом которого является набор положений и скоростей всех точек данной системы.

Движение частиц в квантовой механике не описывается детерминированным процессом. Распространение тепла — полудетерминированный процесс: будущее определяется настоящим, а прошлое — нет.

Процесс называется *конечномерным*, если его фазовое пространство конечномерно, т. е. если число параметров, нужных для описания его состояния, конечно. Так, например, ньютоновская механика систем из конечного числа материальных точек или твердых тел относится к этому классу. Размерность фазового пространства системы из n материальных точек равна $6n$, а системы из n твердых тел — $12n$. Движения жидкости, изучаемые в гидродинамике, процессы колебаний струны и мембраны, распространение волн в оптике и акустике — примеры процессов, которые нельзя описать с помощью конечномерного фазового пространства.

Процесс называется *дифференцируемым*, если его фазовое пространство имеет структуру дифференцируемого многообразия, а изменение состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями. Так, например, координаты и скорости точек механической системы меняются со временем дифференцируемым образом.

Движения, изучаемые в теории удара, свойством дифференцируемости не обладают.

Таким образом, движение системы в классической механике может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как квантовая механика, теория теплопроводности, гидродинамика, теория упругости, оптика, акустика и теория удара требуют иных средств.

Еще два примера детерминированных конечномерных и дифференцируемых процессов: процесс радиоактивного распада и процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества. В обоих случаях фазовое пространство одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества или количеством бактерий. В обоих случаях процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Заметим, что вид дифференциального уравнения процесса, а также самый факт детерминированности, конечномерности и дифференцируемости того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы не будем всякий раз подчеркивать это обстоятельство и будем говорить о реальных процессах так, как если бы они точно совпадали с нашими идеализированными математическими моделями.

2. Фазовые потоки. Точная формулировка изложенных выше общих принципов требует довольно абстрактных понятий: *фазового пространства* и *фазового потока*. Чтобы освоиться с этими понятиями, рассмотрим пример, где уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

Задача 1 (Н. Н. Константинов). Из города A в город B (рис. 1) ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза ра-

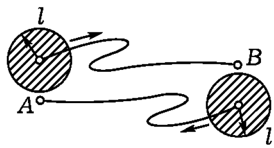


Рис. 1. Начальное положение возов

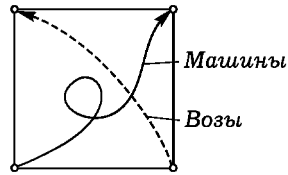


Рис. 2. Фазовое пространство пары экипажей

диуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Решение. Рассмотрим квадрат (рис. 2)

$$M = \{x_1, x_2 \colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}.$$

Положение двух экипажей (один на первой дороге, другой — на второй) можно характеризовать точкой квадрата M: достаточно обозначить через x_i долю расстояния от A до B по i-й дороге, заключенную между A и находящимся на этой дороге экипажем.

Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата M. Этот квадрат называется *фазовым пространством*, а его точки — *фазовыми точками*. Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве.

Например, начальное положение машин (в городе A) соответствует левому нижнему углу квадрата ($x_1 = x_2 = 0$), а движение машин из A в B изображается кривой, ведущей в противоположный угол.

Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата.

Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удается.

В рассмотренном примере не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание состояний процесса как точек подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Например, состояние процесса движения системы n материальных точек в классической механике описывается значениями координат и скоростей всех материальных точек. Следовательно, фазовое пространство такой системы имеет размерность $6n$ (по три координаты и три компоненты скорости на каждую материальную точку). Фазовое пространство системы трех точек (Солнце, Юпитер, Сатурн) 18-мерно. Фазовое пространство системы n твердых тел имеет размерность $12n$ (почему?).

Движение всей системы описывается движением точки по кривой в фазовом пространстве. Скорость движения фазовой точки по этой кривой определяется самой точкой. Таким образом, в каждой точке фазового пространства задан вектор — он называется вектором фазовой скорости. Все векторы фазовой скорости образуют векторное поле фазовой скорости в фазовом пространстве. Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение процесса (зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения).

Основная задача теории дифференциальных уравнений состоит в определении или исследовании движения системы по векторному полю фазовой скорости. Сюда относятся, например, вопросы о виде фазовых кривых (траекторий движения фазовой точки): уходят ли, скажем, фазовые кривые данного векторного поля в фазовом пространстве на бесконечность или остаются в ограниченной области?

В общем виде эта задача не поддается средствам современной математики и, видимо, в некотором смысле неразрешима (в частности это относится к упоминавшейся проблеме трех тел). В простейших частных случаях, с которых мы и начнем, задача решается явно при помощи операции интегрирования. Вычислительные машины позволяют приближенно находить решения дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени, но не дают ответа на качественные вопросы о поведении фазовых кривых в целом. В дальнейшем, наряду с методами явного решения специальных дифференциальных уравнений, мы приведем также некоторые методы качественного исследования.

Понятие фазового пространства сводит изучение эволюционных процессов к геометрическим задачам о кривых, определяемых векторными полями. Мы начнем исследование дифференциальных уравнений со следующей геометрической задачи.

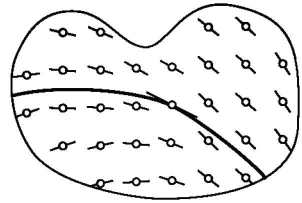


Рис. 3. Поле направлений и его интегральная кривая

3. Интегральные кривые поля направлений. Предположим, что в каждой точке некоторой области на плоскости выбрана проходящая через эту точку прямая. В таком случае говорят, что в области задано поле направлений (рис. 3).

Замечание 1. Две гладкие кривые, проходящие через одну точку, задают в ней одинаковое направление, если они касаются. Таким образом, прямые в определении поля направлений можно заменить произвольными гладкими кривыми: важна лишь касательная к кривой в точке. На рис. 3 изображена лишь маленькая часть прямой около каждой точки.

Замечание 2. Здесь и в дальнейшем все встречающиеся объекты (функции, отображения, ...) предполагаются гладкими, т. е. непрерывно дифференцируемыми нужное число раз, если не оговорено противное. Поле направлений называется непрерывным (гладким), если прямые поля непрерывно (гладко) зависят от точки приложения.

Замечание 3. Аналогичным образом определяется поле направлений (прямых) в n-мерном пространстве (а также на любом гладком многообразии).

Определение. Линия, которая в каждой своей точке касается имеющегося в этой точке направления поля, называется *интегральной кривой* поля направлений.

Название «интегральные кривые» объясняется тем, что в некоторых случаях эти кривые можно найти при помощи операции интегрирования.

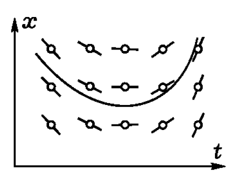


Рис. 4. Поле, инвариантное относительно вертикальных сдвигов

Пример. Предположим, что непрерывное поле направлений на плоскости переходит в себя при всех сдвигах вдоль некоторой прямой и не содержит параллельных ей направлений (рис. 4).

Теорема. *Задача отыскания интегральных кривых такого поля есть в точности задача интегрирования данной непрерывной функции.*

Доказательство. Выберем систему координат, в которой данная прямая — вертикальная ось ординат, а ось абсцисс горизонтальна. Интегральная кривая поля без вертикальных направлений является графиком функции. Производная этой функции равна тангенсу угла наклона графика к оси абсцисс. График — интегральная кривая тогда и только тогда, когда этот тангенс равен тангенсу угла наклона прямой данного поля к оси абсцисс. Но этот последний тангенс — известная функция абсциссы (поскольку поле переходит в себя при сдвигах вдоль оси ординат). Следовательно, функция, графиком которой является интегральная кривая, имеет производной известную функцию и, значит, является ее первообразной, что и требовалось доказать.

Обозначим абсциссу буквой t, ординату — буквой x, тангенс угла наклона прямой поля — известная функция $v(t)$, интегральная кривая — график неизвестной функции φ. Кривая $x=\varphi(t)$ интегральная, если и только если $\frac{d\varphi}{dt} \equiv v(t)$. По теореме Барроу[*)] $\varphi = \int v\,dt + C$.

В общем случае задача отыскания интегральных кривых не сводится к операции интегрирования: даже для очень просто задаваемых полей направлений на плоскости уравнения интегральных кривых нельзя представить конечными комбинациями элементарных функций и интегралов[**)].

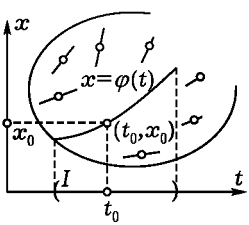


Рис. 5. График решения дифференциального уравнения

4. Дифференциальное уравнение и его решения. Геометрическая задача отыскания интегральных кривых аналитически записывается как задача отыскания решений дифференциального уравнения. Предположим, что поле на плоскости (t, x) не содержит вертикальных направлений (не параллельно оси ординат, x (рис. 5)). Тогда тангенс $v(t, x)$ угла наклона приложенной в точке (t, x) прямой поля к оси абсцисс конечен и интегральные кривые являются графиками функций $x=\varphi(t)$.

*) И. Барроу, 1630—1677, учитель Ньютона, посвятивший книгу взаимной обратности задач о касательных и о площадях.

**) Пример: таково поле, в котором тангенс угла наклона прямой, приложенной в точке (t, x), с осью x равен $x^2 - t$ (Лиувилль).

Мы будем предполагать, что областью определения функции φ является интервал I оси t. Очевидна

Теорема. *Для того чтобы график функции φ был интегральной кривой, необходимо и достаточно, чтобы при всех t из I выполнялось соотношение*

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(t, \varphi(t)). \tag{1}$$

Определение. Функция φ называется *решением* дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t, x), \tag{2}$$

если она удовлетворяет соотношению (1) (т. е. если «при подстановке ее в уравнение вместо x уравнение обращается в тождество»).

Определение. Решение φ *удовлетворяет начальному условию* (t_0, x_0), если $\varphi(t_0) = x_0$.

Таким образом, решение — это заданная на интервале функция, график которой — интегральная кривая; решение удовлетворяет начальному условию (t_0, x_0), если интегральная кривая проходит через данную точку (рис. 5).

Пример. Решение простейшего уравнения $\dot{x} = v(t)$ с начальным условием (t_0, x_0) дается *формулой Барроу*:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau.$$

Всякое дифференциальное уравнение (2) определяет поле направлений на плоскости: приложенная в точке (t, x) прямая имеет тангенс угла наклона $v(t, x)$. Это поле короче называется *полем направлений v* или *полем направлений уравнения* (2).

5. Эволюционное уравнение с одномерным фазовым пространством. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение описывает эволюционный процесс с одномерным фазовым пространством. Правая часть задает *векторное поле фазовой скорости*: в точке x приложен вектор $v(x)$ (рис. 6, слева). Такое уравнение, правая часть которого не зависит от t, называется *автономным*. Скорость эволюции автономной системы, т. е. системы, не взаимодействующей с другими, определяется одним лишь состоянием этой системы: от времени законы природы не зависят.

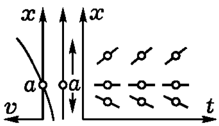


Рис. 6. Векторное поле и поле направлений для уравнения $x = v(t)$

Точки, где v обращается в 0, называются *положениями равновесия* (также *стационарными точками* или *особыми точками*) векторного поля. Если a — положение равновесия, то $\varphi(t) \equiv a$ — решение уравнения (процесс, начавшись в состоянии a, всегда в нем остается). На рис. 6 видно одно положение равновесия, a. Видно, что это положение равновесия неустойчиво: при малом отклонении начального условия от равновесного фазовая точка с течением времени удаляется от положения равновесия.

На рис. 6 изображено также поле направлений рассматриваемого уравнения. Поскольку v не зависит от t, поле переходит в себя при сдвигах вдоль оси t.

Согласно теореме п. 3, задача построения интегральных кривых этого поля решается одним интегрированием (в области, где поле не параллельно оси t, т. е. где нет равновесий, $v(x) \neq 0$). Предположим, что функция v непрерывна и нигде не обращается в 0. Выпишем явную формулу, определяющую интегральные кривые.

Тангенс угла наклона нашего поля к оси x равен $1/v(x)$. Следовательно, *поле направлений уравнения $dx/dt = v(x)$ совпадает с полем направлений уравнения $dt/dx = 1/v(x)$*. Значит, совпадают и интегральные кривые этих уравнений. Но интегральная кривая второго дается формулой Барроу; в данном случае она имеет вид

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)}. \tag{3}$$

Таким образом доказана

Теорема. *Решение $x = \varphi(t)$ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с непрерывной и не обращающейся в 0 правой частью, удовлетворяющее начальному условию (t_0, x_0), дается формулой* (3). *Обратно, функция $x = \varphi(t)$, определяемая формулой* (3)*, является решением и удовлетворяет начальному условию.*

Замечание. «Мнемонический» способ запоминания формулы (3) состоит в следующем. Запишем исходное уравнение в виде $dx/dt = v(x)$. Хотя в курсах анализа при введении производной учат, что dx/dt не дробь, а единый символ, будем обращаться с этим символом как с дробью и перепишем уравнение, собрав все x слева, а все t

справа, в виде $dx/v(x) = dt$. Интегрируя левую и правую части, получаем соотношение $t = \int dx/v(x)$, т. е. (3).

В действительности этот способ, конечно, больше, чем мнемоническое правило. Лейбниц не стал бы вводить сложное обозначение $\frac{dx}{dt}$, если бы не имел в виду самой настоящей дроби: *dx деленное на dt*. Дело в том, что dx и dt — вовсе не таинственные «бесконечно малые» величины, а вполне конечные числа, точнее — функции вектора.

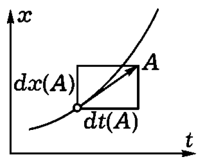


Рис. 7. Числитель и знаменатель дроби dx/dt

Рассмотрим (рис. 7) приложенный в какой-либо точке вектор $\boldsymbol{A}$ скорости движения на плоскости, на которой фиксированы координаты (t, x). Скорость изменения координаты t при этом движении является функцией этого вектора. Она линейна. Эта линейная функция вектора и обозначается dt. Например, значение этой функции на векторе $\boldsymbol{A}$ с компонентами $(10, 20)$ есть $dt(\boldsymbol{A}) = 10$. Точно так же определяется $dx(\boldsymbol{A}) = 20$ — скорость изменения координаты x при движении с вектором скорости $\boldsymbol{A}$, так что $\boldsymbol{A}$ имеет компоненты $dt(\boldsymbol{A})$, $dx(\boldsymbol{A})$. Очевидно

Предложение 1. *Для любого вектора $\boldsymbol{A}$, касающегося графика гладкой функции $x = \varphi(t)$, отношение $dx(\boldsymbol{A})/dt(\boldsymbol{A})$ равно производной dx/dt функции φ в соответствующей точке.*

Таким образом, уравнение $dx/v(x) = dt$ есть *соотношение между линейными функциями от вектора, касающегося интегральной кривой*.

Функции приложенного вектора, линейные при фиксированной точке приложения, называются *дифференциальными* 1*-формами*.

Всякая дифференциальная 1-форма на плоскости (t, x) может быть записана в виде $\omega = a\,dt + b\,dx$, где a и b — функции на плоскости.

Дифференциальные формы можно интегрировать вдоль ориентированных отрезков кривых. Выберем на отрезке Γ кривой на плоскости ориентирующий параметр u, т. е. представим Γ в виде образа гладкого отображения $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ (рис. 8) отрезка оси u в плоскость. Интеграл формы ω вдоль Γ определяется как число

$$\int_\Gamma \omega = \int_I \omega(\gamma')\,du, \quad \text{где} \quad \gamma' = d\gamma/du.$$

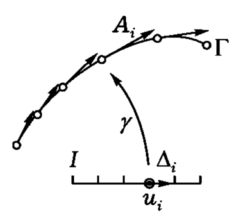


Рис. 8. Определение интеграла 1-формы

Иными словами, интеграл — это предел интегральных сумм $\sum \omega(\boldsymbol{A}_i)$, где $\boldsymbol{A}_i = \gamma'(u_i)\Delta_i$; здесь u_i — точки деления отрезка I на отрезки длин $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$. Вектор $\boldsymbol{A}_i$ касается Γ и лишь малыми высшего порядка относительно Δ_i отличается от вектора хорды, соединяющей последовательные точки деления на Γ (рис. 8).

Из теоремы о замене переменной в определенном интеграле*) вытекает

Предложение 2. *Интеграл 1-формы по ориентированному отрезку кривой не зависит от выбора параметра, согласованного с ориентацией (при изменении ориентации интеграл меняет знак).*

Очевидно

Предложение 3. *Интеграл 1-формы $f(x)\,dx$ по отрезку кривой, на котором x можно принять за параметр, совпадает с обычным определенным интегралом функции f.*

Вернемся к доказательству формулы (3).

Значения дифференциальных форм $dx/v(x)$ и dt на векторах, касающихся интегральной кривой, совпадают. Значит, их интегралы вдоль отрезка кривой равны. Согласно предложению 3, интеграл первой формы равен правой, а второй — левой части формулы (3).

6. Пример: уравнение нормального размножения. Предположим, что величина биологической популяции (например, количество бактерий в чашке Петри или рыб в пруду) равна x и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

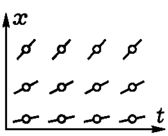


Рис. 9. Уравнение размножения $\dot{x}=kx$

Наше предположение выражается *дифференциальным уравнением нормального размножения*

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0.$$

По смыслу задачи $x > 0$, так что поле направлений задано в полуплоскости; оно изображено на рис. 9. Из вида поля направлений ясно, что x растет с ростом t, но неясно, будут ли бесконечные значения x достигнуты за конечное время (вертикальная асимптота у интегральной кривой) или же решение остается конечным при всех t? Наряду с будущим неясно также и прошлое: будет ли интегральная кривая стремиться к оси $x = 0$ при стремлении t к конечному отрицательному пределу или к бесконечному?

К счастью, уравнение размножения решается явно по предыдущей теореме: согласно формуле (3),

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{k\xi}, \quad k(t-t_0) = \ln(x/x_0), \quad x = e^{k(t-t_0)}x_0.$$

*) Эта теорема открыта Барроу именно при решении простейших дифференциальных уравнений, теперь называемых уравнениями с разделяющимися переменными.

Следовательно, решения уравнения нормального размножения экспоненциально растут при $t \to +\infty$ и экспоненциально убывают при $t \to -\infty$; *ни бесконечные, ни нулевые значения x при конечных t не достигаются*. Для удвоения количества населения согласно уравнению нормального размножения требуется, таким образом, всегда одно и то же время, независимо от его количества (период удвоения населения Земли сейчас порядка 40 лет). Наука до середины XX века также росла экспоненциально (рис. 10).

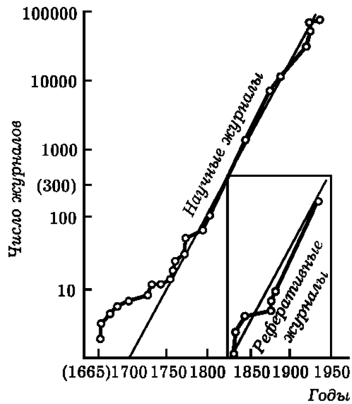


Рис. 10. Рост числа оригинальных и реферативных научных журналов (по книге В. В. Налимова и З. М. Мульченко «Наукометрия» (М.: Наука, 1969))

То же самое дифференциальное уравнение с отрицательным k описывает радиоактивный распад. Для уменьшения количества радиоактивного вещества вдвое требуется время $T = k^{-1} \ln 2$, независимо от начального количества вещества. Это время называется *периодом полураспада*. Период полураспада широко известного изотопа радия-226 — 1620 лет, а наиболее распространенного изотопа урана-238 — $4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

То же уравнение встречается и в большом числе других задач (в дальнейшем мы увидим, что это не случайность, а проявление закона природы, по которому «всякая» функция локально приближенно линейна).

Задача 1. На какой высоте плотность воздуха вдвое меньше, чем на поверхности Земли? Температуру считать постоянной, кубометр воздуха на поверхности Земли весит 1250 г.

Ответ. $8 \ln 2$ км $\approx 5{,}6$ км — высота Эльбруса.

7. Пример: уравнение взрыва. Предположим теперь, что скорость прироста пропорциональна не количеству особей, а количеству пар:

$$\dot{x} = kx^2. \tag{4}$$

В этом случае при больших x прирост идет гораздо быстрее нормального, а при малых — гораздо медленнее (эта ситуация встречается скорее в физико-химических задачах, где скорость реакции пропорциональна концентрациям обоих реагентов; впрочем, в настоящее время китам некоторых видов так трудно найти себе пару, что размножение китов подчиняется уравнению (4), причем x мало).

Поле направлений на вид мало отличается от такового для случая обычного размножения (рис. 9), но вычисления показывают, что интегральные кривые ведут себя совершенно по-другому. Предположим для простоты, что $k = 1$. По формуле Барроу находим решение $t = \int \frac{dx}{x^2} + C$, т. е. $x = -\frac{1}{t - C}$ при $t < C$. Интегральные кривые — половины гипербол (рис. 11). Гипербола имеет вертикальную асимптоту.

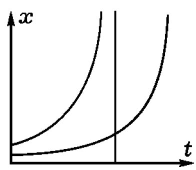


Рис. 11. Уравнение взрыва $\dot{x} = x^2$

Итак, *если прирост населения пропорционален числу пар, то количество населения становится бесконечно большим за конечное время*. Физически этот вывод соответствует взрывообразному характеру процесса. (Разумеется, при t, слишком близком к C, идеализация, принятая при описании процесса дифференциальным уравнением, неприменима, так что реальное количество населения за конечное время бесконечных значений не достигает.)

Интересно отметить, что вторая половина гиперболы $x = (C - t)^{-1}$ также является интегральной кривой нашего уравнения (если продолжить его с полуоси $x > 0$ на всю ось x). Решения, соответствующие обеим половинам гиперболы, даются одной и той же формулой, но никак не связаны между собой. Связь между этими решениями восстанавливается, если считать время комплексным или если компактифицировать аффинную ось x до проективной прямой (см. гл. 5).

Задача 1*. Какие из дифференциальных уравнений $\dot{x} = x^n$ определяют на аффинной прямой поле фазовой скорости, продолжающееся без особенностей на проективную прямую?

Ответ. $n = 0, 1$ или 2.

8. Пример: логистическая кривая. Уравнение обычного размножения $\dot{x} = kx$ пригодно, лишь пока число особей не слишком велико. С увеличением числа особей конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от x как линейная неоднородная функция (при не слишком больших x всякую гладкую функцию можно аппроксимировать линейной неоднородной): $k = a - bx$.

Мы приходим таким образом к *уравнению размножения с учетом конкуренции* $\dot{x} = (a - bx)x$. Коэффициенты a и b можно превратить в единицу выбором масштабов t и x. Мы получаем так называемое *логистическое уравнение*

$$\dot{x} = (1 - x)x.$$

Векторное поле фазовой скорости v и поле направлений на плоскости (t, x) изображены на рис. 12.

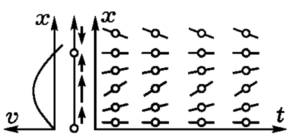


Рис. 12. Векторное поле и поле направлений уравнения $\dot{x} = (1 - x)x$

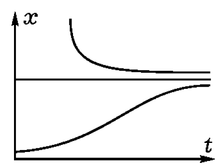


Рис. 13. Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = (1 - x)x$

Мы заключаем отсюда, что интегральные кривые выглядят, как изображено на рис. 13. Точнее говоря, мы видим, что

1) процесс имеет два положения равновесия: $x = 0$ и $x = 1$;

2) между точками 0 и 1 поле направлено от 0 к 1, а при $x > 1$ — к точке 1.

Таким образом, положение равновесия 0 неустойчиво (раз появившееся население начинает расти), а положение равновесия 1 устойчиво (меньшее население растет, а большее — убывает).

Каким бы ни было начальное состояние $x > 0$*, с течением времени процесс выходит к устойчивому состоянию равновесия* $x = 1$.

Из этих соображений неясно, однако, происходит ли этот выход за конечное или за бесконечное время, т. е. имеют ли интегральные кривые, начавшиеся в области $0 < x < 1$, общие точки с прямой $x = 1$?

Можно показать, что таких общих точек нет и что эти интегральные кривые асимптотически стремятся к прямой $x=1$ при $t\to+\infty$ и к прямой $x=0$ при $t\to-\infty$. Эти кривые называются *логистическими кривыми*. Таким образом, логистическая кривая имеет две горизонтальные асимптоты ($x=0$ и 1) и описывает переход от одного состояния (0) к другому (1) за бесконечное время.

Задача 1. Найти уравнение логистической кривой.

Решение. По формуле (3) $t=\int dx/(x(1-x))=\ln(x/(1-x))$, или $x=$ $=e^t/(1+e^t)$.

Эта формула доказывает указанное выше асимптотическое свойство логистической кривой.

Задача 2. Доказать, что интегральные кривые уравнения $\dot{x}=(1-x)x$ в области $x>1$ асимптотически стремятся к прямой $x=1$ при $t\to+\infty$ и имеют вертикальные асимптоты $t=\text{const}$.

При малых x логистическая кривая практически неотличима от экспоненциальной, т. е. конкуренция мало влияет на рост. Однако по мере увеличения x рост становится неэкспоненциальным и вблизи $x=1/2$ экспоненциальная кривая резко уходит вверх от логистической; в дальнейшем логистический рост описывает насыщение системы, т. е. установление в ней равновесного режима ($x=1$).

До середины XX века наука росла экспоненциально (см. рис. 10). Если такой рост будет продолжаться, то к XXI веку все население Земли будет заниматься наукой, а для печатания научных статей не хватит всех лесов планеты. Следовательно, раньше должно наступить насыщение: мы находимся вблизи того места, где логистическая кривая начинает отставать от экспоненциальной. Например, число математических статей в научных журналах после Второй мировой войны до 70-х годов увеличивалось каждый год на 7 %, а последние несколько лет — медленнее.

9. Пример: квоты отлова. До сих пор мы рассматривали свободную популяцию, развивающуюся по своим внутренним законам. Предположим теперь, что мы отлавливаем часть популяции (скажем, ловим рыбу в пруду или в океане). Предположим, что скорость вылова постоянна. Мы приходим к дифференциальному уравнению отлова

$$\dot{x}=(1-x)x-c.$$

Величина c характеризует скорость вылова и называется *квотой*. Вид векторного поля и поля фазовой скорости при различных значениях скорости вылова c показан на рис. 14.

Мы видим, что при не слишком большой скорости вылова ($0<c<$ $<1/4$) существуют два положения равновесия (A и B на рис. 14).

Нижнее положение равновесия ($x = A$) неустойчиво. Если по каким-либо причинам (перелов, болезни) в некоторый момент величина популяции x опустится ниже A, то в дальнейшем вся популяция за конечное время вымрет.

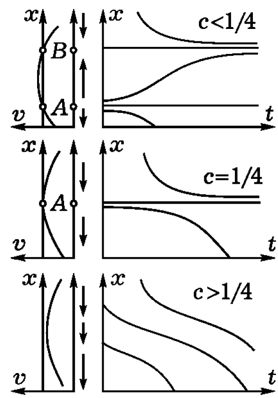


Рис. 14. Уравнение отлова $\dot{x} = (1 - x)x - c$

Верхнее положение равновесия B устойчиво — это стационарный режим, на который выходит популяция при постоянном отлове c.

Если $c > 1/4$, то равновесий нет и вся популяция будет отловлена за конечное время (стеллерова корова и т. п.).

При $c = 1/4$ имеется одно неустойчивое состояние равновесия ($A = B = 1/2$). Отлов с такой скоростью при достаточно большой начальной численности популяции математически возможен в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание численности установившейся равновесной популяции вниз приводит к полному вылову популяции за конечное время.

Итак, хотя теоретически допустимы любые квоты, вплоть до максимальной ($c \leqslant 1/4$), *максимальная квота* $c = 1/4$ *приводит к неустойчивости и недопустима*. Более того, *практически недопустимы и близкие к* $1/4$ *квоты*, так как при них опасный порог A близок к установившемуся режиму B (небольшие случайные отклонения отбрасывают популяцию ниже порога A, после чего она погибает).

Оказывается, однако, что можно организовать отлов так, чтобы устойчиво получать улов со скоростью $1/4$ за единицу времени (большего получить нельзя, так как $1/4$ — это максимальная скорость размножения необлавливаемой популяции).

10. Пример: отлов с относительной квотой. Фиксируем вместо абсолютной скорости отлова относительную, т. е. фиксируем отлавливаемую за единицу времени долю наличной популяции: $\dot{x} = (1 - x)x - px$. Вид векторного поля и интегральные кривые (при $p < 1$) изображены на рис. 15.

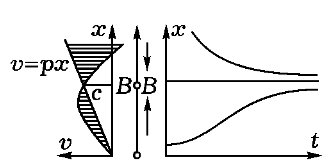


Рис. 15. Уравнение отлова $\dot{x} = (1 - x)x - px$

Нижнее, неустойчивое положение равновесия теперь в точке $x = 0$, второе положение равновесия B устойчиво при любом p, $0 < p < 1$.

После некоторого периода установления популяция выходит на стационарный режим $x = B$. Абсолютная скорость отлова устанавливается при этом равной $c = pB$. Это — ордината точки пересечения графиков функций $v = (1 - x)x$ и $v = px$ (рис. 15, слева). Исследуем поведение этой величины c при изменении p. При малых относительных выловах (малых p) установившаяся скорость отлова также мала; при $p \to 1$ она тоже стремится к нулю (перелов). Наибольшее значение абсолютной скорости c равно наибольшей ординате графика функции $v = (1 - x)x$. Оно достигается, когда прямая $v = px$ проходит через вершину параболы (т. е. при $p = 1/2$), и равно $c = 1/4$.

Выберем $p = 1/2$ (т. е. назначим относительную квоту так, чтобы установившаяся популяция составляла половину необлавливаемой). Мы достигли максимально возможной стационарной скорости облавливания $c = 1/4$, причем система остается устойчивой (возвращается к установившемуся состоянию при малых отклонениях начальной популяции от установившейся).

11. Уравнения с многомерным фазовым пространством. В рассматривавшихся выше примерах фазовое пространство было одномерным. В более сложных случаях (например, при учете взаимодействия между несколькими популяциями) точка фазового пространства определяется несколькими числами (двумя для двух популяций и т. д.). Определения дифференциального уравнения, решений и т. д. в этом случае аналогичны введенным выше. Повторим эти определения.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — векторное поле в области U n-мерного фазового пространства. *Автономное дифференциальное уравнение, заданное полем* $\boldsymbol{v}$, — это уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

Решением такого уравнения называется гладкое отображение $\boldsymbol{\varphi}: I \to U$ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $d\boldsymbol{\varphi}/dt = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(t))$ при всех t из I.

Образ отображения $\boldsymbol{\varphi}$ называется *фазовой кривой*, а график*) отображения $\boldsymbol{\varphi}$ — *интегральной кривой*. Интегральная кривая ле-

*) График отображения $f: X \to Y$ есть подмножество прямого произведения $X \times Y$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in X$; *прямое произведение* $X \times Y$ есть множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$.

жит в прямом произведении оси времени на фазовое пространство. Это прямое произведение называется *расширенным фазовым пространством*. Расширенное фазовое пространство имеет размерность $n+1$.

Пусть $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ — точка расширенного фазового пространства. Решение $\boldsymbol{\varphi}$ *удовлетворяет начальному условию* $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, если $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, т. е. если интегральная кривая проходит через точку $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

Как и в случае одномерного фазового пространства, интегральные кривые можно описать при помощи поля направлений в расширенном фазовом пространстве. Тангенс угла наклона к оси абсцисс заменяется следующей конструкцией.

Предположим, что дано поле направлений в области V прямого произведения $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и что направление поля нигде не вертикально (не параллельно $\mathbb{R}^n$). Пусть t — координата в $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ — в $\mathbb{R}^n$. Тогда в каждой точке существует (и единствен) вектор приложенного в этой точке направления, имеющий горизонтальную координату (t-компоненту), равную 1. Таким образом, указанный вектор имеет вид $(1, \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}))$, где $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ — вектор в $\mathbb{R}^n$, зависящий от точки расширенного фазового пространства. Иными словами, невертикальное поле направлений в расширенном фазовом пространстве определяет зависящее от времени векторное поле в фазовом пространстве.

Каждая интегральная кривая данного поля направлений очевидно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}),$$

т. е. является графиком отображения φ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $d\boldsymbol{\varphi}/dt=\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ при всех t. Обратно, график всякого решения — интегральная кривая этого поля.

Решение удовлетворяет начальному условию $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, если и только если интегральная кривая проходит через эту точку.

Замечание. В координатной записи векторное поле в n-мерном пространстве задается n функциями n переменных. Наше дифференциальное уравнение принимает поэтому вид «системы n уравнений первого порядка»:

$$\dot{x}_1 = v_1(t; x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = v_n(t; x_1, \ldots, x_n).$$

Решение задается вектор-функцией $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ переменной t, для которой $d\varphi_k/dt=v_k(t; \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $k=1, \ldots, n$, при всех t. Начальное условие задается $n+1$ числом $(t_0; x_{01}, \ldots, x_{0n})$.

12. Пример: дифференциальное уравнение системы хищник — жертва. Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы, — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов, скажем караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x}=kx$, пропорциональной их количеству x (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если y — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук; тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x}=kx-axy$.

Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y}=-ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y}=-ly+bxy$.

Мы приходим таким образом к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник — жертва:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx-axy, \\ \dot{y} = -ly+bxy. \end{cases}$$

Эта модель называется *моделью Лотки—Вольтерра* по имени авторов. Правая часть определяет векторное поле на плоскости: приложенный в точке (x,y) вектор имеет компоненты $(kx-axy, -ly+bxy)$. Это — поле фазовой скорости.

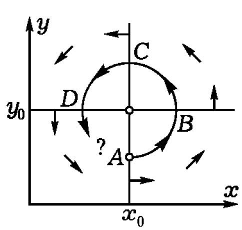


Рис. 16. Поле фазовой скорости модели хищник — жертва

Фазовым пространством является угол $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Векторное поле фазовой скорости нетрудно нарисовать, проследив за изменением знаков компонент (рис. 16). Особая точка поля ($x_0=l/b$, $y_0=k/a$) отвечает равновесному количеству карасей и щук, когда прирост карасей уравновешивается деятельностью щук, а прирост щук — их естественной смертностью.

Если начальное число щук меньше y_0 (точка A на рисунке), то числа карасей и щук растут, пока размножившиеся щуки не начнут съедать больше карасей, чем их прирост (точка B), затем число карасей начнет убывать, а число щук будет расти, пока нехватка пищи не приведет и щук к вымиранию (точка C); затем число щук уменьшится настолько, что караси снова начнут размножаться (точка D);

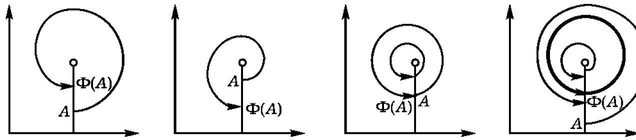


Рис. 17. Функция последования

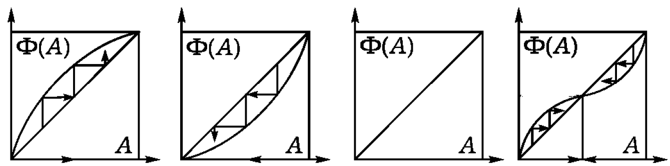


Рис. 18. Диаграммы Ламерея

начавшееся размножение карасей приведет к тому, что со временем и щуки начнут размножаться. Таким образом будут происходить колебания численности карасей и щук вблизи равновесного числа тех и других.

Возникает, однако, вопрос, будут ли эти колебания периодическими или же нет. Наша приближенная картина поля фазовой скорости не позволяет ответить на этот вопрос, можно вообразить различные случаи, например, изображенные на рис. 17.

Чтобы разобраться в этих случаях, рассмотрим отрезок, соединяющий особую точку с осью x. Каждая точка A этого отрезка (не лежащая на оси x) определяет фазовую кривую, которая снова пересекает отрезок в некоторой точке $\Phi(A)$. Функция Φ называется *функцией последования* (или *отображением Пуанкаре*, а также *монодромией* или *голономией*).

Рассмотрим график функции последования. Он называется *диаграммой Ламерея*. Диаграммы Ламерея для четырех случаев рис. 17 изображены на рис. 18.

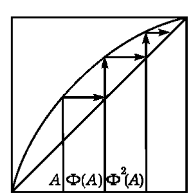


Рис. 19. Лестница Ламерея

По диаграмме Ламерея легко построить последовательность образов точки A при повторении преобразования Φ. Для этого следует построить так называемую *лестницу Ламерея* (рис. 19), абсциссы и ординаты вершин которой суть A, $\Phi(A)$, $\Phi^2(A) = \Phi(\Phi(A))$, …

Точки пересечения графика функции последования с диагональю (графиком $\Phi \equiv A$) соответствуют замкнутым фазовым кривым (*циклам*) на фазовой плоскости.

Цикл заведомо устойчив (неустойчив), если в соответствующей точке A имеем $\Phi'(A) < 1$ (> 1). Для наших четырех диаграмм Ламерея (рис. 18) в первом случае фазовые кривые — спирали, наматывающиеся на особую точку, во втором — сматывающиеся с нее, в третьем — замкнутые. В четвертом случае фазовые кривые наматываются на устойчивый цикл изнутри и снаружи.

Соответственно, в первом случае с течением времени устанавливается равновесное население пруда, колебания затухают. Во втором случае равновесное состояние неустойчиво, колебания нарастают. При этом наступит момент времени, когда число карасей (щук) будет меньше 1; к этому моменту наша модель становится неприемлемой, и *население пруда вымирает*.

В третьем случае наблюдаются периодические колебания численности карасей и щук вокруг равновесного состояния; амплитуда колебаний определяется начальными условиями.

В четвертом случае тоже наблюдаются периодические колебания численности карасей и щук, но *амплитуда установившихся колебаний не зависит от начальных условий*: любая фазовая спираль наматывается на предельный цикл. В таком случае говорят, что в системе устанавливается *автоколебательный режим*.

Какой же из случаев имеет место для системы Лотки—Вольтерра? Мы пока не можем ответить на этот вопрос (решение его см. в § 2).

13. Пример: свободная частица на прямой. Согласно «первому закону» Ньютона, ускорение материальной точки, не подверженной действию внешних сил, равно 0: $\ddot{x} = 0$. Если точка x принадлежит $\mathbb{R}$, то говорят о *свободной частице на прямой* (можно представлять себе бусинку на спице).

Фазовое пространство имеет размерность 2, так как все движение определяется начальным положением и начальной скоростью. На фазовой плоскости с координатами $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ возникает векторное поле фазовой скорости:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

следовательно, компоненты поля равны $(x_2, 0)$ (рис. 20).

Все точки оси x_1 являются положениями равновесия. Равновесие такого вида в физике называется *безразличным*, а в математике

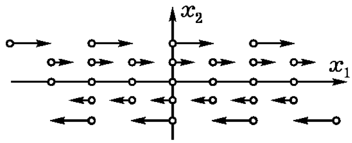


Рис. 20. Поле фазовой скорости свободной частицы

неустойчивым (подходящее сколь угодно малое изменение начальной фазовой точки вызывает через достаточно большое время не малое изменение состояния).

Фазовые кривые — горизонтальные прямые $x_2 = \text{const}$ и все точки оси x_1.

Задача 1. Найти решение с начальным условием (a, b) при $t_0 = 0$.
Ответ. $\varphi_1(t) = a + bt$, $\varphi_2(t) = b$.

14. Пример: свободное падение. Согласно Галилею, ускорение g падающих вблизи поверхности Земли тел постоянно. Если x — высота, то $\ddot{x} = -g$. Вводя координаты на фазовой плоскости, как в предыдущем примере, получаем систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g.$$

Векторное поле, заданное правой частью, изображено на рис. 21.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые — параболы.

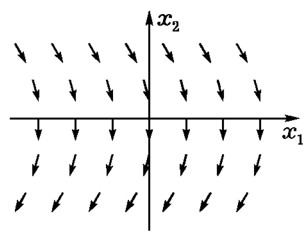


Рис. 21. Поле фазовой скорости падающей частицы

15. Пример: малые колебания. Во многих случаях сила, возвращающая систему в положение равновесия, с большей или меньшей точностью пропорциональна отклонению от положения равновесия (закон Гука и т. п.; сущность дела в том, что в положении равновесия сила 0, а в малом всякая функция приближенно линейна). Мы приходим к *уравнению малых колебаний*

$$\ddot{x} = -kx.$$

Коэффициент $k > 0$ можно сделать равным 1 выбором масштаба времени. Уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -x.$$

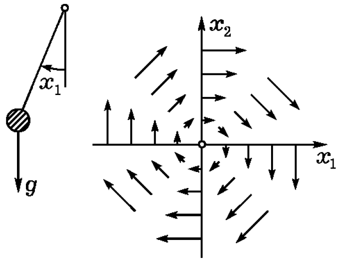


Рис. 22. Поле фазовой скорости малых колебаний

Вводя по-прежнему координаты $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ на фазовой плоскости, переписываем это уравнение в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Правая часть задает векторное поле на фазовой плоскости. Это поле изображено на рис. 22.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые — окружности и их центр.

Решение. Вектор фазовой скорости перпендикулярен радиус-вектору.

Задача 2. Доказать, что фазовая точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью 1.

Решение. Длина вектора фазовой скорости равна длине радиус-вектора.

Задача 3. Найти решение с начальным условием $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

Решение. Согласно предыдущим двум задачам, нужно повернуть вектор начального условия на угол t. Получаем

$$x_1(t) = a\cos t + b\sin t, \quad x_2(t) = -a\sin t + b\cos t.$$

Замечание. Таким образом, мы доказали, что x совершает гармонические колебания, и установили «закон сохранения энергии»: величина $x_1^2/2 + x_2^2/2$ вдоль фазовой кривой постоянна.

Задача 4. Доказать закон сохранения энергии $\frac{x_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$ для системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -kx_1$.

Замечание. Величина $\frac{x_2^2}{2}$ называется кинетической энергией, а $\frac{kx_1^2}{2}$ — потенциальной.

Задача 5. Доказать, что интегральные кривые системы (с $k = 1$) — винтовые линии.

16. Пример: математический маятник. Рассмотрим невесомый стержень длины l, закрепленный в одном конце и несущий на другом точечную массу m. Обозначим через θ угол отклонения маятника от вертикали. Согласно законам механики, угловое ускорение маятника $\ddot{\theta}$ пропорционально моменту силы веса (рис. 23):

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta,$$

где $I = ml^2$ — момент инерции (знак минус объясняется тем, что момент стремится уменьшить отклонение).