А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих
П. А. Яськов

Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями)
Книга 1

МЦНМО

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
Ш64

Ширяев А. Н., Эрлих И. Г., Яськов П. А.
Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
648 с.
ISBN 978-5-4439-2082-5

Настоящая книга является «решебником» задач из первых двух глав учебника А. Н. Ширяева «Вероятность-1» и задачника «Задачи по теории вероятностей». Добавлено также много новых задач. Приводимые доказательства и решения будут полезны как студентам и аспирантам, так и преподавателям, демонстрируя как следует решать вероятностные задачи, доказывать вероятностные теоремы и как их излагать.

Подготовлено на основе книги: *Ширяев А. Н.*, *Эрлих И. Г.*, *Яськов П. А.* Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1. — М.: МЦНМО, 2013. — 648 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2082-5

Глава I

Элементарная теория вероятностей

§ 1. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов

1. Установить справедливость следующих свойств операций $\cap$ (пересечения) и $\cup$ (объединения):

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность),

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность),

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность),

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (идемпотентность).

Показать также, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Решение. Для доказательства равенства множеств необходимо и достаточно показать, что каждый элемент одного множества является элементом другого и наоборот. Например, равенство $A \cup B = B \cup A$ проверяется так: если $x \in A \cup B$, то либо $x \in A$, либо $x \in B$. В обоих случаях $x \in B \cup A$. Значит, $A \cup B \subseteq B \cup A$. Точно так же проверяется, что $B \cup A \subseteq A \cup B$. Остальные свойства проверяются аналогично. □

2. (*Разные интерпретации неполного факториала* $(N)_n \equiv \equiv N(N-1)\ldots(N-n+1)$ *— числа размещений из* N *по* n.) Показать, что

(a) число *упорядоченных* выборок $(\ldots)$ размера n (без повторений элементов — «выбор без возвращения»), составленных из элементов множества A с числом элементов $|A| = N$, равно $(N)_n$, $1 \leqslant n \leqslant N$;

(b) число слов длины n, составленных из различных букв, выбранных из алфавита, содержащего N букв, равно $(N)_n$, $1 \leqslant n \leqslant N$;

(c) число различных функций $y = f(x)$, определенных на множестве X с $|X| = n$, принимающих значения в множестве Y с $|Y| = N$, $n \leqslant N$, и таких, что если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ (т. е. $f\colon X \to Y$ является инъекцией), равно $(N)_n$.

Решение. (a) Поскольку выборки упорядоченные, у каждого элемента выборки есть номер. Есть N способов выбрать первый элемент. Когда первый элемент фиксирован, следующий можно выбрать $N-1$ способами, и т. д. Наконец, когда фиксированы $n-1$ первых элементов, последний можно выбрать $N-n+1$ способами. Отсюда следует, что общее число требуемых последовательностей есть $N(N-1)\ldots(N-n+1)$ $(\equiv (N)_n)$.

(b) Каждое интересующее нас слово есть упорядоченная выборка длины n. Выборка производится без возвращения элементов (буквы в слове различны) из множества (алфавита), состоящего из N элементов. Таким образом, задача сведена к предыдущей.

(c) Функция определена тогда, когда при каждом значении аргумента определено значение функции. Занумеруем значения аргумента числами от 1 до n, и тогда каждой функции взаимно однозначно ставится в соответствие упорядоченная выборка элементов из Y длины n (i-й элемент выборки есть значение функции при i-м значении аргумента). Задача сведена к п. (a) данной задачи. □

3. (*Разные интерпретации биномиальных коэффициентов* $C_N^n \equiv \dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}$.)

Показать, что

(a) число *неупорядоченных* выборок [...] размера n (без повторений элементов — «выбор без возвращения»), составленных из элементов множества A с $|A| = N$, равно C_N^n, $1 \leqslant n \leqslant N$;

(b) число *упорядоченных* последовательностей (...) длины N, состоящих из n «единиц» и $(N-n)$ «нулей», равно C_N^n, $1 \leqslant n \leqslant N$;

(c) число способов, которыми n *неразличимых* дробинок можно разместить по N различным ячейкам, причем так, чтобы в каждой ячейке было не больше одной дробинки («размещение с запретом»), равно C_N^n, $1 \leqslant n \leqslant N$;

(d) число *неубывающих* путей на двумерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i, j)\colon i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$, начинающихся в точке $(0, 0)$ и приходящих в точку $(n, N-n)$, равно C_N^n (неубывающий путь — это такой путь, у которого на каждом шаге сдвиг происходит либо вверх на единицу, либо вправо на единицу), $0 \leqslant n \leqslant N$, $C_N^0 = 1$;

(e) число *различных* подмножеств D множества A с $|A| = N$, состоящих из n элементов ($|D| = n$, $n \leqslant N$), равно C_N^n.

Решение. (a) Согласно задаче I.1.2(a) число упорядоченных выборок длины n из N элементов без повторений есть $(N)_n$. При этом каждая неупорядоченная выборка подсчитана $n!$ раз. (Действительно, неупорядоченная выборка есть множество из n элементов. Число упорядоченных выборок из него есть $(n)_n = n!$.) Таким образом, число требуемых в задаче выборок есть $\dfrac{(N)_n}{n!} = C_N^n$.

(b) Для задания упорядоченной последовательности из n единиц и $N-n$ нулей необходимо и достаточно задать номера позиций, на которых будут стоять единицы. Таким образом, число требуемых последовательностей есть число способов выбрать неупорядоченно n натуральных чисел (номеров позиций) из чисел от 1 до N. Это число подсчитано в п. (a) данной задачи.

(c) Каждому способу размещения дробинок можно однозначно поставить в соответствие упорядоченную последовательность из нулей и единиц: на i-й позиции последовательности стоит 1, если в i-й ячейке есть дробинка, и 0 иначе. Задача сведена к п. (b) данной задачи.

(d) Интересующий нас путь состоит из n отрезков, расположенных горизонтально, и $N-n$ отрезков, расположенных вертикально. Аналогично п. (c) строится взаимно однозначное соответствие между всеми последовательностями из n единиц и $N-n$ нулей и данными путями: на i-й позиции последовательности стоит 1, если i-й отрезок пути расположен горизонтально, и 0 иначе. Задача сведена к п. (b) данной задачи.

(e) Нумеруем элементы множества A числами от 1 до N. Аналогично предыдущим пунктам строится взаимно однозначное соответствие между всеми последовательностями из n единиц и $N-n$ нулей и всеми подмножествами множества A: на i-й позиции последовательности стоит 1, если i-й элемент множества A принадлежит выбранному подмножеству, и 0 иначе. Задача сведена к п. (b) данной задачи. □

4. Рассматриваются *неубывающие пути* на целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i, j): i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$, которые выходят из точки $(0, 0)$ и приходят в точку (n, n), при этом, однако, оставаясь ниже «диагонали» или касаясь ее (т. е. пути, проходящие через точки множества $\{(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2,\ 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$).

Показать, что число таких путей равно C_{n+1}, где

$$C_n = \frac{1}{n}\, C_{2(n-1)}^{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

— *числа Каталана*. (Иногда под числами Каталана понимают числа $c_n = C_{n+1}$, $n \geqslant 0$.)

Решение. По утверждению I.1.3(d) при $N = 2n$ всего неубывающих путей, идущих из $(0, 0)$ в (n, n), ровно C_{2n}^n. Нас интересуют только те из них, которые не пересекаются и не касаются прямой $y = x + 1$. Подсчитаем число ломаных, имеющих общие точки с указанной прямой. Для этого каждой такой ломаной однозначно поставим в соответствие ломаную, идущую из точки $(0, 0)$ в точку $(n-1, n+1)$, по такому правилу — выбираем самую верхнюю вершину ломаной на указанной прямой и отражаем часть ломаной, расположенную правее этой точки, относительно нашей прямой. Обратное отображение строится аналогично (общая точка с прямой $y = x + 1$ будет существовать, так как начало ломаной лежит ниже прямой, а конец выше). Следовательно, в силу задачи I.1.3(d) число ломаных, имеющих с нашей прямой общие точки, есть C_{2n}^{n-1}. Искомое же число равно

$$C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n} = C_{n+1}. \ \square$$

5. Числа Каталана C_n, $n \geqslant 1$, допускают много интересных комбинаторных интерпретаций. Например, рассмотрим число N_n разных способов подсчета суммы n чисел a, b, c, d, …, при которых каждый раз складываются лишь *два* числа (изменение порядка следования слагаемых не допускается). Скажем, при $n = 3$ сумму $a + b + c$ можно подсчитывать, удовлетворяя сформулированному требованию «складывать по два числа», расставляя соответствующим образом скобки $(\cdot)$: $a + b + c = (a + (b + c)) = ((a + b) + c)$. (Здесь число разных способов $N_3 = 2$.) При $n = 4$ имеем уже пять возможностей ($N_4 = 5$):

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= ((a + b) + (c + d)) = (((a + b) + c) + d) = \\ &= ((a + (b + c)) + d) = (a + ((b + c) + d)) = \\ &= (a + (b + (c + d))). \end{aligned}$$

(a) Показать, что при любом $n \geqslant 3$ число N_n разных способов подсчета равно C_n.

(b) Рассматриваются *диагональные триангуляции* правильного n-угольника, $n \geqslant 4$, т. е. разбиения на треугольники с помощью непересекающихся диагоналей (выходящих из той или иной вершины; очевидно, что число таких диагоналей, выходящих из одной вершины, равно $n - 3$). Показать, что число N_n таких триангуляций равно C_{n-1}.

(c) Показать, что числа Каталана C_n, $n > 1$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$C_n^* = \sum_{i=1}^{n-1} C_i^* C_{n-i}^* \qquad (*)$$

(с $C_0^* = 0$ и $C_1^* = 1$).

(d) Установить, что производящая функция $F^*(x) = \sum_{n \geqslant 1} C_n^* x^n$ последовательности $(C_n^*)_{n \geqslant 1}$, определенной рекуррентными соотношениями $(*)$, удовлетворяет уравнению

$$F^*(x) = x + (F^*(x))^2.$$

(e) Показать, что (с учетом условия $F^*(0)=0$)

$$F^*(x) = \frac{1}{2}\,(1-(1-4x)^{1/2}), \quad |x| \leqslant \frac{1}{4},$$

и вывести отсюда, что коэффициенты C_n^* (при x^n) совпадают, как и следовало ожидать, с числами Каталана C_n:

$$C_n^* = -\frac{1}{2}\,C_{1/2}^n(-4)^n = \frac{1}{n}\,C_{2(n-1)}^{n-1} = C_n.$$

Решение. (a) Построим взаимно однозначное соответствие между ломаными из задачи I.1.4 и алгебраическими записями разных способов подсчета суммы n чисел. Будем двигаться по такой записи слева направо. Заменим каждую открывающуюся скобку на шаг вправо в нашей ломаной, а каждый плюс — на шаг вверх. Поскольку открывающихся скобок в выражении столько же, сколько и знаков суммирования, т. е. $n-1$, мы получим ломаную, идущую из точки $(0, 0)$ в точку $(n-1, n-1)$. Поскольку перед каждым плюсом должна идти своя открывающаяся скобка, в любой момент времени число сделанных шагов направо в ломаной не меньше, чем число шагов вверх, и ломаная действительно не поднимается выше прямой $y=x$.

Построим обратное отображение. Будем двигаться по ломаной из точки $(0, 0)$ в точку $(n-1, n-1)$. Шаг направо мы заменяем на открывающуюся скобку, шаг вверх — на плюс. В получившейся последовательности открывающихся скобок и знаков сложения расставляем буквы перед каждым знаком сложения и в конце получившегося выражения. Теперь расставляем закрывающиеся скобки так: выберем самую правую открывающуюся скобку, тогда следующие три символа будут — буква, плюс и еще буква (плюс будет, поскольку последний отрезок ломаной — шаг вверх, буква будет, поскольку буквы расставлялись так, чтобы выражение было правильным). Поставим после этих четырех символов закрывающуюся скобку и временно заменим это подвыражение на какую-нибудь букву. С точки зрения ломаной, мы убрали один «уголок», состоящий из шагов направо и вверх, поэтому ее свойство не пересекать прямую $y=x$ сохранилось. Продолжим эту операцию, пока не получим одну букву. Затем постепенно развернем все выражение, заменяя каждую новую букву обратно на подвыражение. Итак, доказано, что отображение взаимно однозначно, значит, число описанных способов действительно равно C_n.

(b) Сначала докажем по индукции, что число диагоналей при триангуляции равно $n-3$. Для четырехугольника это очевидно. Диагональ разбивает n-угольник на m-угольник и $(n-m+2)$-угольник, и тогда общее количество диагоналей будет равно сумме чисел 1, $m-3$ и $n-m-1$, т. е. $n-3$. Кроме того, при триангуляции образуется $n-2$ треугольника. Действительно, первая диагональ разбивает многоугольник на два, а каждая последующая увеличивает число многоугольников на 1.

Построим биективное отображение между триангуляциями и способами подсчета суммы $n-1$ числа. Для этого покрасим какую-нибудь сторону в красный цвет и напишем на каждой стороне, начиная со следующей и обходя их по часовой стрелке, буквы a, b, c, d, … — всего букв будет $n-1$. Поскольку всего треугольников $n-2$, существует хотя бы один треугольник, на сторонах которого написаны 2 буквы. Напишем на его третьей стороне сумму этих двух букв (в алфавитном порядке в скобках) и сотрем две стороны с этими буквами — останется триангуляция $(n-1)$-угольника, с которой мы будем поступать точно так же, только теперь вместо букв иногда будут выражения. В конце мы получим один отрезок, покрашенный в красный цвет, на стороне которого записан некоторый способ сложить $n-1$ число. Аналогично строится обратное отображение — мы сначала красным выделяем одну из сторон и пишем буквы на сторонах, как раньше. Выбираем последнее действие, которое нужно произвести при выбранном способе; ищем вершину, отделяющую стороны, соответствующие ближайшим буквам к выбранному действию; проводим отрезки, соединяющие концы стороны, покрашенной в красный цвет, и данную вершину. Если построенный отрезок совпал со стороной, то с ним ничего делать не надо, а если нет — нужно покрасить его в красный цвет и применить все действия к полученному многоугольнику и соответствующему способу суммирования, который есть подвыражение исходного. Тем самым, искомая биекция построена.

(c) Рассмотрим различные способы расстановки скобок в сумме из n слагаемых. Выберем знак того сложения, которое выполняется последним. Если слева от него i, а справа — $(n-i)$ слагаемых, то существует ровно C_iC_{n-i} способов подсчитать сумму. Поскольку i может быть любым от 1 до $n-1$, получаем, что $C_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} C_iC_{n-i}$.

(d) Имеем

$$|F^*(x)|^2 = \Big| \sum_{n\geqslant 1} C_n^* x^n \Big|^2 = \sum_{n\geqslant 2} \sum_{i=1}^{n-1} C_i^* C_{n-i}^* x^n = \sum_{n\geqslant 2} C_n^* x^n = F^*(x) - x,$$

что и требовалось доказать.

(e) Решая полученное в предыдущем пункте уравнение как квадратное относительно $F^*(x)$, получаем, что

$$F^*(x) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right).$$

Поскольку $F(0)=0$, мы выбираем решение со знаком минус. Раскладывая $\sqrt{1-4x}$ в ряд Маклорена, получаем

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{k\geqslant 0} C_{1/2}^k (-4x)^k,$$

а значит,

$$C_n^* = -\frac{1}{2}C_{1/2}^n(-4)^n = -\frac{1}{2n!}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(-4)^n = \\ = 2^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}.$$

Поскольку

$$1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3) = \frac{(2n-2)!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!},$$

получаем, что

$$C_n^* = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1} = C_n. \qquad \square$$

6. (*Разные интерпретации биномиальных коэффициентов* C_{N+n-1}^n.) Показать, что

(a) число *неупорядоченных* выборок $[\ldots]$ размера n при «выборе с возвращением», составленных из элементов множества A с $|A|=N$, равно C_{N+n-1}^n;

(b) число *упорядоченных* векторов $(n_1, \ldots, n_N)$ с неотрицательными целыми числами n_i, $i=1, \ldots, N$, удовлетворяющими условию $n_1+\ldots+n_N=n$, равно C_{N+n-1}^n, $n\geqslant 1$, $N\geqslant 1$;

(c) число способов, которыми n *неразличимых* дробинок можно разместить по N различным ячейкам (без ограничений на число дробинок в каждой ячейке — «размещение без запрета»), равно C_{N+n-1}^n, $n\geqslant 1$, $N\geqslant 1$.

Решение. (a) Построим взаимно однозначное соответствие между интересующими нас выборками и упорядоченными последовательностями из n единиц и $N-1$ нулей, которых в силу задачи I.1.3(b) ровно C_{N+n-1}^n. Для этого занумеруем элементы множества A числами от 1 до N и припишем к каждой последовательности перед первым элементом и после последнего элемента по нулю. Тогда выборке, в которой i-й элемент A встречается a_i раз, $i = 1, \ldots, N$, ставится в соответствие последовательность, в которой между i-м и $(i+1)$-м нулем стоит a_i единиц. Обратное отображение аналогично.

(b) Построим взаимно однозначное соответствие между описанными векторами и неупорядоченными выборками при выборе с возвращением из множества, элементы которого занумерованы числами от 1 до N. Для этого каждому числу n_i поставим в соответствие число элементов с номером i в выборке, и наоборот. Тогда размер выборки равен $n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n$, а число таких выборок подсчитано в п. (a) данной задачи.

(c) Каждому способу разложить дробинки по N ячейкам ставим в соответствие упорядоченный вектор $(n_1, \ldots, n_N)$, где n_i — число дробинок в i-й ячейке. Поскольку $n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n$, задача сведена к предыдущей. □

7. Рассматриваются *неупорядоченные* решения $[n_1, \ldots, n_N]$ системы $n_1 + \ldots + n_N = n$, $n \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, с неотрицательными целыми $n_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$. Чему равно число таких решений? Чему равно число таких решений, если допускаются лишь положительные решения ($n_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$)? Чему равно число *упорядоченных* решений $(n_1, \ldots, n_N)$ той же системы $n_1 + \ldots + n_N = n$, $n \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, с положительными n_i, $i = 1, \ldots, N$?

Решение. Обозначим число неупорядоченных неотрицательных решений уравнения $n_1 + \ldots + n_N = n$ за R_n^N. Тогда все решения делятся на содержащие хотя бы один нуль — число таких решений R_n^{N-1} — и не содержащие — число таких решений R_{n-N}^N (поскольку мы можем вычесть из всех слагаемых по 1 и получить решение системы с $n' = n - N$). Таким образом, $R_n^N = R_n^{N-1} + R_{n-N}^N$, что вкупе с граничными условиями $R_n^1 = 1$ при $n \geqslant 0$ и $R_n^N = 0$ при $n < 0$ дает возможность быстро находить R_n^N. Однако в явном виде формула для R_n^N, насколько мы знаем, неизвестна.

Число неупорядоченных положительных решений этого же уравнения равно R_{n-N}^N — это в точности те неотрицательные решения, которые не содержат 0.

Упорядоченных положительных решений указанного уравнения ровно столько же, сколько неотрицательных решений у уравнения $n_1 + \ldots + n_N = n - N$, — достаточно из каждого числа в каждом положительном решении вычесть 1. Таким образом, в этом случае ответ — C_{n-1}^{n-N} в силу задачи I.1.6(b). □

8. Рассматриваются *неравенства* $n_1 + \ldots + n_N \leqslant n$ с целыми неотрицательными или положительными n_i, $i = 1, \ldots, N$. Подсчитайте число упорядоченных векторов $(n_1, \ldots, n_N)$, удовлетворяющих неравенствам $n_1 + \ldots + n_N \leqslant n$, $n \geqslant 1$, $N \geqslant 1$.

Решение. Упорядоченных неотрицательных решений у неравенства $n_1 + \ldots + n_N \leqslant n$ столько же, сколько неотрицательных решений у уравнения $n_1 + \ldots + n_N + n_{N+1} = n$, поскольку задание первых N значений однозначно задает значение n_{N+1}. Итого имеем C_{N+n}^{n} решений. В случае поиска положительных решений действуем так же, как и раньше, — вычитая из каждого слагаемого в положительном решении по единице, получаем неотрицательное решение аналогичного неравенства с $n' = n - N$. Итого получаем C_{n}^{n-N} положительных решений данного неравенства. □

9. Найти максимальное число фигур (или тел), которые могут образоваться

(a) при размещении n прямых в $\mathbb{R}^2$;

(b) при размещении n плоскостей в $\mathbb{R}^3$;

(c) при размещении n окружностей в $\mathbb{R}^2$;

(d) при размещении n сфер в $\mathbb{R}^3$.

Решение. Пусть x_n — максимальное число фигур в пп. (a)—(d). Имеем $x_1 = 2$. Найдем рекуррентные уравнения для x_n, $n \geqslant 2$. Предположим, что уже имеется размещение A_{n-1}, дающее x_{n-1} фигур. Новый объект (т. е. прямая, плоскость, окружность или сфера) добавит столько фигур, на сколько частей этот объект делится объектами из A_{n-1}.

(a) Новая прямая, пересекающая прямые из A_{n-1} в $n-1$ различных точках, даст n фигур. Больше фигур появиться не может. Поэтому $x_n = x_{n-1} + n$ и, значит,

$$x_n = x_1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

(b) Согласно п. (a) новая плоскость даст не более $n(n-1)/2 + 1$ фигур. Можно показать, что плоскость, дающая ровно столько фигур, всегда найдется. Значит, $x_n = x_{n-1} + n(n-1)/2 + 1$, откуда находим $x_n = (n^3 + 5n)/6 + 1$.

(c) Новая окружность даст не более $2(n-1)$ фигур (две окружности пересекаются не более чем в 2 точках). Если проводить окружности так, чтобы все они имели общую внутреннюю окрестность, то новая окружность, проходящая через эту окрестность, будет пересекать каждую из них в 2 точках. Отсюда нетрудно вывести, что $x_n = x_{n-1} + 2(n-1)$ и, следовательно, $x_n = (n-1)n + 2$.

(d) Рассуждая так же, как в п. (c), можно показать, что максимальное число частей, на которые n окружностей на сфере в $\mathbb{R}^3$ делят эту сферу, есть $(n-1)n+2$. Поэтому аналогично п. (b) получаем $x_n = x_{n-1} + (n-2)(n-1) + 2$, или $x_n = n(n^2 - 3n + 8)/3$. $\square$

10. Показать, что алгебра $\alpha(A_1, \ldots, A_n)$, порожденная системой $\{A_1, \ldots, A_n\}$, где $A_i \subseteq \Omega$, $1 \leqslant i \leqslant n$, состоит не более чем из 2^{2^n} элементов.

Так, например, $\alpha(A, B)$, $A \triangle B \neq \varnothing$, состоит из 16 элементов вида

$$A,\ B,\ \bar{A},\ \bar{B}, A \cap B,\ \bar{A} \cap \bar{B},\ A \setminus B,\ B \setminus A,$$
$$A \cup B,\ A \cup \bar{B},\ \bar{A} \cup B,\ \bar{A} \cup \bar{B},\ A \triangle B,\ \overline{A \triangle B},\ \Omega,\ \varnothing,$$

где $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — «симметрическая разность» множеств A и B.

Решение. Полагая $A^1 = A$ и $A^0 = \bar{A}$, получаем

$$\mathscr{A} = \alpha(A_1, \ldots, A_n) = \alpha(A_\sigma, \sigma \in \{0, 1\}^n), \quad A_\sigma = A_1^{\sigma_1} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n},$$
$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Поэтому $\mathscr{A}$ состоит из всевозможных объединений множеств A_σ. Всего их $2^{|\{A_\sigma : \sigma \in \{0,1\}^n\}|} \leqslant 2^{2^n}$, где $|C|$ — мощность множества C. $\square$

11. Доказать *неравенство Буля*

(a) $\mathsf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^n A_i\Big) \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i), \quad \mathsf{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^n A_i\Big) \geqslant 1 - \sum\limits_{i=1}^n \mathsf{P}(\bar{A}_i).$

Показать также, что для любого $n \geqslant 1$ справедливы неравенство

(b) $\mathsf{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^n A_i\Big) \geqslant \sum\limits_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i) - (n-1)$

и *неравенство Куниаса*

(c) $\mathsf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^n A_i\Big) \leqslant \min\limits_k \Big\{ \sum\limits_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i) - \sum\limits_{i \neq k} \mathsf{P}(A_i \cap A_k) \Big\}.$

Доказать *взвешенное неравенство Чжуна–Эрдёша*

(d) $$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \geqslant \frac{\Big[\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \mathsf{P}(A_i)\Big]^2}{\sum\limits_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \mathsf{P}(A_i \cap A_j)}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

а также его частный случай

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \geqslant n^2 \Bigg[\sum_{i,j=1}^n \frac{\mathsf{P}(A_i \cap A_j)}{\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j)}\Bigg]^{-1}, \quad \mathsf{P}(A_i) > 0; \qquad (*)$$

неравенство Каена—Селлберга

$$\text{(e)} \qquad \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{P}(A_i)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A_i \cap A_j)}$$

и неравенство Хантера—Ворсли

$$\text{(f)} \qquad \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{\{i,j\}\in\Gamma} \mathsf{P}(A_i \cap A_j),$$

где суммирование во второй сумме ведется по всем ребрам $\{i, j\}$ произвольного дерева Γ с вершинами $\{1, \ldots, n\}$.

Решение. (a) и (b) Утверждения являются тривиальными следствиями *формулы включения-исключения* из задачи I.1.12 и того факта, что $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

(c) Из элементарных свойств вероятности находим, что

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathsf{P}\Big(A_k \cup \bigcup_{i\neq k}(A_i \setminus A_k)\Big) = \mathsf{P}(A_k) + \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\neq k}(A_i\setminus A_k)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}(A_k) + \sum_{i\neq k} \mathsf{P}(A_i \setminus A_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i\neq k} \mathsf{P}(A_i \cap A_k).$$

(d) Обозначим

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}.$$

Тогда $(\mathsf{E}\eta)^2 = (\mathsf{E}\eta I(\xi\neq 0))^2 \leqslant \mathsf{P}(\xi\neq 0)\mathsf{E}\eta^2$. Неравенство $(*)$ есть частный случай взвешенного неравенства Чжуна—Эрдёша при $\alpha_i = 1/\mathsf{P}(A_i)$.

(e) Определим разбиение $\mathscr{A}$ пространства исходов Ω всевозможными пересечениями событий $A_1, \bar{A}_1 \ldots, A_n, \bar{A}_n$. Пусть A — элемент разбиения $\mathscr{A}$. Имеет место равенство

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{\exists i\,:\, A\subset A_i} \mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{A\subset A_i} \frac{\mathsf{P}(A)}{d(A)}, \qquad d(A) = |\{i\colon A\subset A_i\}|.$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$\sum_{A\subset A_i} \frac{\mathsf{P}(A)}{d(A)} \cdot \sum_{A\subset A_i} \mathsf{P}(A)d(A) \geqslant \Bigl(\sum_{A\subset A_i} \mathsf{P}(A)\Bigr)^2 = \mathsf{P}(A_i)^2.$$

Осталось заметить, что $\sum\limits_{A\subset A_i} \mathsf{P}(A)d(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A_i \cap A_j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

(f) Для вывода искомой оценки нам понадобится равенство

$$\mathsf{P}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Bigr) = \mathsf{P}(A_{\pi(1)}) + \mathsf{P}(\bar{A}_{\pi(1)} \cap A_{\pi(2)}) + \ldots + \mathsf{P}(\bar{A}_{\pi(1)} \cap \bar{A}_{\pi(2)} \ldots \cap A_{\pi(n)}),$$

где π — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$.

Пусть, например, $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \ldots, \{1, n\}, \{2, 3\}$ — все ребра графа Γ. Тогда, полагая в последнем соотношении $\pi(1, \ldots, n) = (1, 3, 4, \ldots, n, 2)$, получаем

$$\mathsf{P}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Bigr) \leqslant \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(\bar{A}_1 \cap A_3) + \ldots + \mathsf{P}(\bar{A}_1 \cap A_n) + \mathsf{P}(\bar{A}_2 \cap A_3).$$

Левая часть данного неравенства равна $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum\limits_{\{i,j\}\in\Gamma} \mathsf{P}(A_i \cap A_j)$.

Случай произвольного графа Γ рассматривается аналогично. $\square$

12. Доказать следующие формулы «включения-исключения» (называемые *формулами Пуанкаре*, *теоремами Пуанкаре*, *тождествами Пуанкаре*) для вероятностей объединения и пересечения событий $A_1, \ldots, A_n$: для каждого $n \geqslant 1$ выполняются равенства

$$\text{(a)}\quad \mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

и

$$\text{(b)}\quad \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n).$$

Замечание. Формулы (a) и (b) кратко можно записать в виде

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} S_m, \quad \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \widetilde{S}_m,$$

где

$$S_m = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}), \quad \widetilde{S}_m = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}).$$

Решение. (a) Доказательство проведем по индукции.

База индукции: $n=2$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathsf{P}\ ((A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) \sqcup (A_2 \backslash (A_1 \cap A_2)) \sqcup (A_1 \cap A_2)) = \\ &= (\mathsf{P}(A_1) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2)) + (\mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathsf{P}(A_1 \cap A_2)) = \\ &= [\mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2)] - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2),\end{aligned}$$

где $\sqcup$ — объединение непересекающихся множеств.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для $n=k$. Докажем его для $n=k+1$. Применяя предположение индукции для $n=k$ и $n=2$, получаем

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}) = \\ &\quad = \mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) + \mathsf{P}(A_{k+1}) - \mathsf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1}) = \\ &\quad = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant k+1} \mathsf{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (-1)^{k+1} \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) - \mathsf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1}). \quad (*)\end{aligned}$$

Остается применить предположение индукции к последнему вычитаемому из формулы $(*)$:

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}((A_1 \cap A_{k+1}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k+1})) = \\ &\quad = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant k} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{k+1}) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{k+1}) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (-1)^{m+1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap A_{k+1}) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (-1)^{k+1} \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}).\end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в формулу $(*)$, получаем требуемое утверждение.

(b) Заметим, что

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathsf{P}\Big(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i}\Big) = 1 - \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i\Big).$$

Воспользуемся результатом п. (a), взяв вместо $A_1, \ldots, A_n$ множества $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$. Получим

$$1 - \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} [1 - \mathsf{P}(A_{i_1})] - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} [1 - \mathsf{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2})] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} [1 - \mathsf{P}(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m})] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} \, [1 - \mathsf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)] \; .$$

Для доказательства п. (b) остается показать, что все единицы взаимно уничтожаются. Это следует из п. (a), если взять $A_1 = \ldots$ $\ldots = A_n = \Omega$. □

13. Пусть B_m есть событие, состоящее в том, что одновременно произойдет *в точности m* событий из n событий $A_1, \ldots, A_n$, $0 \leqslant m \leqslant n$.

Показать, что

$$\mathsf{P}(B_m) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} C_k^m S_k,$$

или, в развернутом виде,

$$\mathsf{P}(B_m) = S_m - C_{m+1}^1 S_{m+1} + \ldots + (-1)^{n-m} C_n^{n-m} S_n.$$

Вывести отсюда, что вероятность $\mathsf{P}(B_{\geqslant m})$ события $B_{\geqslant m}$, состоящего в том, что одновременно произойдет *по крайней мере m* событий из n событий $A_1, \ldots, A_n$, определяется формулой

$$\mathsf{P}(B_{\geqslant m}) \; (= \mathsf{P}(B_m) + \ldots + \mathsf{P}(B_n)) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} C_{k-1}^{m-1} S_k,$$

или, эквивалентно,

$$\mathsf{P}(B_{\geqslant m}) = S_m - C_m^1 S_{m+1} + \ldots + (-1)^{n-m} C_{n-1}^{n-m} S_n.$$

Решение. Воспользуемся понятием математического ожидания (см. B1.I.4).

Пусть X_i — индикатор события A_i. Рассмотрим случайную величину

$$\xi_m = \sum X_{i_1} \ldots X_{i_m} (1 - X_{i_{m+1}}) \ldots (1 - X_{i_n}), \qquad (*)$$

где суммирование ведется по всем таким упорядоченным наборам $(i_1, \ldots, i_n)$, что $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$.

Заметим, что $\xi_m(\omega)$ обращается в нуль, если при данном ω произошло более или менее, чем m событий. Если произошло в точности m событий, то в сумме $(*)$ ровно $m!(n-m)!$ слагаемых не равны нулю, а значит, $\xi_m(\omega)=m!(n-m)!$. Поскольку ξ_m принимает ровно два значения, получаем, что $\mathsf{E}\xi_m=m!(n-m)!\mathsf{P}(B_m)$. Далее,

$$(1-X_{i_{m+1}})\ldots(1-X_{i_n}) = \sum_{t=0}^{n-m}\left((-1)^t \sum_{m+1\leqslant j_1<\ldots<j_t\leqslant n} X_{i_{j_1}}\ldots X_{i_{j_t}}\right).$$

Подставляя последнее выражение в формулу $(*)$, получаем

$$\xi_m = \sum \sum_{t=0}^{n-m}(-1)^t\left(X_{i_1}\ldots X_{i_m} \sum_{m+1\leqslant j_1<\ldots<j_t\leqslant n} X_{i_{j_1}}\ldots X_{i_{j_t}}\right).$$

За счет внутренней суммы каждое слагаемое (после раскрытия скобок) будет встречаться в большой сумме C_{n-m}^t раз, значит,

$$\xi_m = \sum_{t=0}^{n-m}(-1)^t C_{n-m}^t \sum X_{i_1}\ldots X_{i_{m+t}},$$

где суммирование ведется по всем таким упорядоченным наборам $(i_1, \ldots, i_n)$, что $\{i_1, \ldots, i_n\}=\{1, \ldots, n\}$. Поскольку последние $n-(m+k)$ индексов не задействованы, данная сумма равна

$$(n-(m+t))! \sum X_{i_1}\ldots X_{i_{m+t}},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам чисел от 1 до n длины $m+t$. В данной сумме каждое слагаемое повторялось $(m+t)!$ раз, поэтому она равна

$$(n-(m+t))!\,(m+t)! \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{m+t}\leqslant n} X_{i_1}\ldots X_{i_{m+t}}.$$

Используя то, что $\mathsf{E}X_{i_1}\ldots X_{i_t}=\mathsf{P}(A_{i_1}\ldots A_{i_t})$, получаем

$$\mathsf{E}\xi_m = \sum_{t=0}^{n-m}(-1)^t C_{n-m}^t (n-m-t)!\,(m+t)!\,S_{m+t} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-m}(-1)^t \frac{(n-m)!\,(m+t)!}{t!} S_{m+t}.$$

Сделав замену переменной $k=m+t$, получим

$$\mathsf{P}(B_m) = \frac{\mathsf{E}\xi_m}{m!\,(n-m)!} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m} C_k^m S_k.$$

Формулу для $\mathsf{P}(B_{\geqslant m})$ докажем по индукции.

База индукции: $m=n$, тогда

$$\mathsf{P}(B_{\geqslant n}) = \mathsf{P}(B_n) = S_n = C_{n-1}^{n-1} S_n.$$

Шаг индукции: пусть формула для $\mathsf{P}(B_{\geqslant m})$ верна для $m=t+1$. Докажем ее для $m=t$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B_{\geqslant t}) &= \mathsf{P}(B_t) + \mathsf{P}(B_{\geqslant t+1}) = \\ &= \sum_{k=t}^{n} (-1)^{k-t} C_k^t S_k + \sum_{k=t+1}^{n} (-1)^{k-t-1} C_{k-1}^t S_k = \\ &= \sum_{k=t+1}^{n} (-1)^{k-t} \left(C_k^t - C_{k-1}^t\right) S_k + S_t. \qquad (**)\end{aligned}$$

Поскольку $C_k^t - C_{k-1}^t = C_{k-1}^{t-1}$ в силу задачи I.2.2(b) и $C_{t-1}^{t-1} = 1$, выражение $(**)$ равно

$$\sum_{k=t}^{n} (-1)^{k-t} C_{k-1}^{t-1} S_k. \qquad \square$$

14. Вывести из формул для $\mathsf{P}(B_m)$ и $\mathsf{P}(B_{\geqslant m})$ из задачи I.1.13, что для всякого четного r справедливы *формулы Бонферрони*

$$S_m + \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k C_{m+k}^k S_{m+k} \leqslant \mathsf{P}(B_m) \leqslant S_m + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k C_{m+k}^k S_{m+k},$$

$$S_m + \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k C_{m+k-1}^k S_{m+k} \leqslant \mathsf{P}(B_{\geqslant m}) \leqslant S_m + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k C_{m+k-1}^k S_{m+k}.$$

Решение. Докажем вспомогательные формулы

$$S_m = \sum_{r=m}^{n} C_r^m \mathsf{P}(B_r), \quad S_m = \sum_{r=m}^{n} C_{r-1}^{m-1} \mathsf{P}(B_{\geqslant r}).$$

Рассмотрим все возможные пересечения m множеств A_i. Пусть при элементарном исходе ω произошло ровно t $(n \geqslant t \geqslant m)$ событий A_i. При подсчете S_m этот элементарный исход учитывался C_t^m раз. Таким образом, при подсчете S_m мы C_m^m раз посчитали исходы из B_m, …, C_n^m раз посчитали исходы из B_n. Значит, $S_m = \sum\limits_{r=m}^{n} C_r^m \mathsf{P}(B_r)$.

Поскольку $\mathsf{P}(B_r) = \mathsf{P}(B_{\geqslant r}) - \mathsf{P}(B_{\geqslant r+1})$, получаем, что

$$S_m = \sum_{r=m}^{n} C_r^m \mathsf{P}(B_r) = \sum_{r=m}^{n} C_r^m \mathsf{P}(B_{\geqslant r}) - \sum_{r=m}^{n-1} C_r^m \mathsf{P}(B_{\geqslant r+1}) =$$

$$= \sum_{r=m}^{n} C_r^m \mathsf{P}(B_{\geqslant r}) - \sum_{r=m+1}^{n} C_{r-1}^m \mathsf{P}(B_{\geqslant r}) =$$

$$= \sum_{r=m+1}^{n} \left(C_r^m - C_{r-1}^m\right) \mathsf{P}(B_{\geqslant r}) + \mathsf{P}(B_{\geqslant m}) = \sum_{r=m}^{n} C_{r-1}^{m-1} \mathsf{P}(B_{\geqslant m}).$$

Последнее равенство верно в силу задачи I.2.2(b): $C_r^m - C_{r-1}^m = C_{r-1}^{m-1}$ и $C_{m-1}^{m-1} = 1$. Таким образом, вспомогательные формулы доказаны.

В силу задачи I.1.13 имеем

$$\mathsf{P}(B_m) = S_m + \sum_{k=1}^{n-m} (-1)^k C_{k+m}^k S_{k+m}.$$

Если обозначить $\xi_r = \sum\limits_{k=r}^{n-m} (-1)^k C_{k+m}^k S_{k+m}$, то для доказательства первого неравенства из формулировки достаточно показать, что при допустимых четных r верны неравенства $\xi_{r+2} \geqslant 0$ и $\xi_{r+1} \leqslant 0$, т. е. для любого r, $0 \leqslant r \leqslant n-m$, верно, что $(-1)^r \xi_r \geqslant 0$. Далее,

$$(-1)^r \xi_r = \sum_{k=r}^{n-m} (-1)^{k-r} C_{k+m}^m S_{k+m} = \sum_{k=r+m}^{n} (-1)^{k+m-r} C_k^m S_k.$$

Неотрицательность $(-1)^r \xi_r$ для любого r, $1 \leqslant r \leqslant n-m$, эквивалентна неотрицательности $\eta_h := \sum\limits_{k=h}^{n} (-1)^{k-h} C_k^m S_k$ для любого h, $m \leqslant h \leqslant n$.

Пользуясь первой вспомогательной формулой для S_k, находим, что

$$\eta_h = \sum_{k=h}^{n} (-1)^{k-h} C_k^m \sum_{r=k}^{n} C_r^k \mathsf{P}(B_r) =$$

$$= \sum_{k=h}^{n} \sum_{r=k}^{n} (-1)^{k-h} C_k^m C_r^k \mathsf{P}(B_r) = \sum_{r=h}^{n} \mathsf{P}(B_r) \sum_{k=h}^{r} (-1)^{k-h} C_k^m C_r^k.$$

Для доказательства того, что $\eta_h \geqslant 0$ для всех h, $m \leqslant h \leqslant n$, достаточно доказать, что $\zeta_{r,h} := \sum\limits_{k=h}^{r} (-1)^{k-h} C_k^m C_r^k \geqslant 0$ для всех h, $m \leqslant h \leqslant n$, и всех

r, $h \leqslant r \leqslant n$. Заметим, что

$$C_k^m C_r^k = \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{(r-m)!}{(r-k)!(k-m)!} = C_r^m C_{r-m}^{k-m}.$$

Таким образом, $\zeta_{r,h} = C_r^m \sum\limits_{k=h}^{r} (-1)^{k-h} C_{r-m}^{k-m}$. Докажем по индукции, что $\sum\limits_{k=h}^{r} (-1)^{k-h} C_{r-m}^{k-m} = C_{r-m-1}^{h-m-1}$ (считаем, что $C_{-1}^{-1} = C_{-1}^{0} = C_0^0 = 1$). Отсюда будет следовать неотрицательность $\zeta_{r,h}$.

При $h = r$ утверждение очевидно. Если утверждение доказано при $h = t+1$, то при $h = t$ к сумме добавляется еще одно слагаемое и по предположению индукции сумма будет иметь вид $C_{r-m}^{t-m} - C_{r-m-1}^{t-m-1}$. Тем самым первое неравенство Бонферрони доказано. Второе доказывается аналогично с соответствующими заменами в индексах числа сочетаний. □

15. Используя определение чисел S_m и $\widetilde{S}_m$ из задачи I.1.12, доказать

(a) *неравенства Бонферрони* (частный случай формул из предыдущей задачи)

$$S_1 - S_2 + \ldots - S_{2k} \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant S_1 - S_2 + \ldots + S_{2k-1},$$

где $k \geqslant 1$ таково, что $2k \leqslant n$;

(b) *неравенство Гумбеля*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \frac{\widetilde{S}_m}{C_{n-1}^{m-1}}, \quad m = 1, \ldots, n;$$

(c) *неравенство Фреше*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \frac{\widetilde{S}_{m+1}}{C_{n-1}^{m}} \leqslant \frac{\widetilde{S}_m}{C_{n-1}^{m-1}}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1;$$

Решение. (a) Заметим, что $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathsf{P}(B_{\leqslant 1})$. Утверждение задачи следует из второго неравенства Бонферрони из задачи I.1.14.

(b) Каждое ω из множества $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ принадлежит какому-то A_k (может быть, нескольким). В $\widetilde{S}_m$ событие A_k участвует в C_{n-1}^{m-1} слагаемых, т. е. при подсчете $\widetilde{S}_m$ исход ω учтен по меньшей мере C_{n-1}^{m-1} раз, откуда следует, что $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \widetilde{S}_m / C_{n-1}^{m-1}$.

(c) Заметим, что вторая часть неравенства означает невозрастание $\widetilde{S}_m/C_{n-1}^{m-1}$, когда m убывает от n до 1, причем $\widetilde{S}_1/C_{m-1}^0 = \mathsf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big)$, так что первая часть неравенства следует из второй. Далее, $\widetilde{S}_m = C_n^m - \bar{S}_m$, где $\bar{S}_m = \sum \mathsf{P}(\bar{A}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{A}_{i_m})$, суммирование ведется по множеству $\mathrm{I}_m := \{(i_1, \ldots, i_m) \colon 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n\}$. Следовательно, доказываемое неравенство имеет вид

$$\frac{C_n^{m+1} - \bar{S}_{m+1}}{C_{n-1}^m} \leqslant \frac{C_n^m - \bar{S}_m}{C_{n-1}^{m-1}}. \tag{$*$}$$

Пусть $\bar{X}_i$ — индикатор множества $\bar{A}_i$. Тогда $\bar{S}_m = \sum\limits_{\mathrm{I}_m} \mathsf{E}\bar{X}_{i_1}\ldots\bar{X}_{i_m}$. В силу свойств математического ожидания неравенство ($*$) будет верно, если для каждого ω выполнено неравенство

$$\frac{C_n^{m+1} - \sum\limits_{\mathrm{I}_{m+1}} \bar{X}_{i_1}\ldots\bar{X}_{i_{m+1}}}{C_{n-1}^m} \leqslant \frac{C_n^m - \sum\limits_{\mathrm{I}_m} \bar{X}_{i_1}\ldots\bar{X}_{i_m}}{C_{n-1}^{m-1}}. \tag{$**$}$$

Пусть при данном ω произошло менее m событий из $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$. Тогда неравенство ($**$) имеет вид $C_n^{m+1}/C_{n-1}^m \leqslant C_n^m/C_{n-1}^{m-1}$, что равносильно неравенству $\dfrac{n}{m+1} \leqslant \dfrac{n}{m}$, которое, очевидно, выполнено.

Пусть при данном ω произошло t событий из $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ $(t \geqslant m)$. Тогда неравенство ($**$) будет иметь вид

$$\frac{C_n^{m+1} - C_t^{m+1}}{C_{n-1}^m} \leqslant \frac{C_n^m - C_t^m}{C_{n-1}^{m-1}}.$$

После сокращения общих множителей и приведения подобных слагаемых данное неравенство приводится к виду

$$C_t^m(nm - tm + n - m) \leqslant C_n^m(n - m). \tag{$***$}$$

При $t = n$ это неравенство обращается в равенство, и для его доказательства достаточно показать невозрастание $C_t^m(nm - tm + n - m)$, когда t убывает от n до m, т. е. проверить, что

$$C_{t+1}^m(nm - (t+1)m + n - m) \geqslant C_t^m(nm - tm + n - m)$$

при $m \leqslant t \leqslant n-1$. Расписав C_{t+1}^m и C_t^m по определению, домножив неравенство на знаменатели, сократив общие множители, перенеся все слагаемые в правую часть и приведя подобные слагаемые, получаем неравенство $nm + n - m - mt - t - 1 \geqslant 0$, или, что равносильно, $(m+1)((n-1)-t) \geqslant 0$. Последнее неравенство выполнено при $m \leqslant t \leqslant n-1$. $\square$

16. (*«Задача о беспорядках».*) Пусть $(i_1, \ldots, i_n)$ — случайная перестановка (с вероятностью $1/n!$) чисел $1, \ldots, n$. Показать, что

(a) вероятность $P_{(m)}$ того, что при перестановках чисел $1, \ldots, n$ *в точности* m чисел останутся на своих местах, равна

$$\frac{1}{m!}\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}\Big) \quad \Big(\sim \frac{e^{-1}}{m!}, \text{ при } n \to \infty\Big);$$

(b) вероятность $P_{(\geqslant 1)}$ того, что в результате перестановок *по крайней мере* одно из чисел $1, \ldots, n$ останется на своем месте, равна

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \quad (\sim 1 - e^{-1}, \ n \to \infty),$$

и, следовательно, вероятность полного «беспорядка» (когда ни одно из чисел не остается на своем месте) равна $1 - P_{(\geqslant 1)} = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ $(\sim e^{-1}$ при $n \to \infty)$.

Решение. (a) Пусть $A_i = \{i\text{-е число на своем месте}\}$. Тогда $P_{(m)} = \mathsf{P}(B_m)$, где B_m определено в задаче I.1.13. Утверждение будет следовать из задачи I.1.13, если показать, что $S_k = \frac{1}{k!}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Поскольку все перестановки равновероятны,

$$S_k = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (n-k)! = \frac{(n-k)!}{n!} C_n^k = \frac{1}{k!},$$

где $|C|$ — мощность множества C.

(b) Утверждение задачи напрямую следует из формулы для $\mathsf{P}(B_{\geqslant 1}) = P_{(\geqslant 1)}$ из задачи I.1.13 и формулы для S_k, полученной в п. (a) данной задачи. $\square$

17. (*«Задача о совпадениях».*) Пусть имеется n писем и n конвертов. Письма по конвертам раскладываются «случайным образом», иначе говоря, предполагается, что приписывание соответствующих вероятностей осуществляется в соответствии с «классическим» способом задания вероятностей. Пусть $P_{(m)}$ — вероятность того, что в точности m писем попадут в «свои» конверты.

Показать, что

$$P_{(m)} = \frac{1}{m!}\left(1 + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{(-1)^j}{j!}\right).$$

Решение. Естественно прежде всего задаться вопросом о том, что следует понимать под словами «письма раскладываются по конвертам случайным образом». Если считать, что письмо с номером 1 помещается наугад в один из n конвертов, письмо с номером 2 — наугад в любой из $n-1$ конвертов и т. д., то такая процедура может рассматриваться как «выбор без возвращения», ставящий в соответствие номерам $(1, \ldots, n)$ раскладываемых писем упорядоченный набор $(a_1, \ldots, a_n)$ номеров конвертов. Таких разных наборов будет $(n)_n = n!$, и в соответствии с классическим принципом «равновозможности» вероятность получения конкретного набора $(a_1, \ldots, a_n)$ считается равной $1/n!$.

Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i-е письмо попадет в i-й конверт. Тогда (в обозначениях задачи I.1.13) $P_{(m)} = \mathsf{P}(B_m)$ и, следовательно,

$$P_{(m)} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} C_k^m S_k. \qquad (*)$$

По аналогии с решением задачи I.1.16(a) находим, что $S_k = \dfrac{1}{k!}$. Подставляя значение S_k в формулу $(*)$, получаем требуемое утверждение. □

18. Уходя из детского сада, каждый из n детей «случайным образом» берет один левый и один правый ботинок. Показать, что

(a) вероятность P_a того, что все они уйдут не в своих парах ботинок, равна

$$P_a = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\,n!};$$

(b) вероятность P_b того, что каждый из них возьмет не свой левый и не свой правый ботинок, равна

$$P_b = \left(\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}\right)^2.$$

Решение. Придадим смысл словам «случайным образом». Пусть сначала дети берут левые ботинки с вероятностью получения каждого набора, как и в предыдущих задачах, $\frac{1}{n!}$, потом так же правые, причем выбор правого ботинка не зависит от выбора левого, т. е. вероятность каждого набора $\left(\frac{1}{n!}\right)^2$. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i-й ребенок возьмет свою пару ботинок.

(a) Нас интересует вероятность того, что не произойдет ни одно из событий A_i. В обозначениях задачи I.1.12 она равна $1 - \mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - S_1 + \ldots + (-1)^n S_n$. Вычислим S_k. В силу симметрии вероятность пересечения k различных событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ не зависит от набора $(i_1, \ldots, i_k)$. Каждая такая вероятность равна отношению числа «удачных» исходов $((n-k)!)^2$ к числу всех исходов $(n!)^2$. Таким образом, $S_k = C_n^k \frac{((n-k)!)^2}{(n!)^2} = \frac{(n-k)!}{n!k!}$. Отсюда получаем формулу для искомой вероятности:

$$P_a = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{k!n!}.$$

(b) Пусть C_{0l} есть событие, состоящее в том, что каждый ребенок взял не свой левый ботинок, C_{0r} — не свой правый. В силу симметрии и независимости выбора правого и левого ботинка $\mathsf{P}\,(C_{0l} \cap C_{0r}) = \mathsf{P}^2\,(C_{0l})$. С учетом задачи I.1.17 получаем, что

$$\mathsf{P}\,(C_{0l}) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Тем самым $\mathsf{P}\,(C_{0l} \cap C_{0r}) = \left(\sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}\right)^2$. □

19. Рассматриваются n частиц, размещаемых по M ячейкам в соответствии со статистикой *Максвелла–Больцмана* («различимые частицы, размещение без запрета»). Придерживаясь классического способа Лапласа задания вероятностей по формуле (10) из В1.I.1 (что соответствует, как говорят, «случайному» характеру размещения частиц), показать, что вероятность $P_k(n; M)$ того, что в фиксированной ячейке содержится k частиц, определяется формулой

$$P_k(n; M) = C_n^k \frac{(M-1)^{n-k}}{M^n}.$$

Вывести отсюда, что если $n \to \infty$, $M \to \infty$, но так, что $n/M \to \lambda > 0$, то

$$P_k(n; M) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Решение. Найдем число элементарных событий, составляющих событие A — «в фиксированной ячейке содержится k частиц». Число различных упорядоченных наборов из k различных частиц есть C_n^k, каждому набору соответствует еще $(M-1)^{n-k}$ способов размещения остальных $n-k$ частиц по $M-1$ ячейкам. Всего элементарных событий M^n, так что искомая вероятность действительно равна $C_n^k \dfrac{(M-1)^{n-k}}{M^n}$. Предположим, что $n \to \infty$, $M \to \infty$, причем $\dfrac{n}{M} \to \lambda > 0$. Тогда

$$C_n^k = \frac{1}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1) \quad \text{и} \quad \frac{C_n^k}{n^k} \to \frac{1}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_k(n;\, M) \sim \frac{1}{k!} \frac{n^k}{M^k} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{\lambda M},$$

что, в свою очередь, стремится к $e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$. □

20. (Продолжение задачи I.1.19.) Пусть $R_m(n;\, M)$ означает вероятность того, что в точности m ячеек останутся пустыми. Показать, что

$$R_m(n;\, M) = C_M^n \sum_{k=0}^{M-m} (-1)^k C_{M-m}^k \left(1 - \frac{m+k}{M}\right)^n.$$

Решение. Пусть A_i — событие «i-я ячейка осталась пустой». В обозначениях задачи I.1.12 нас интересует вероятность $\mathsf{P}(B_m)$. Найдем S_k. Из симметрии все вероятности пересечений k событий A_i равны. Каждому пересечению соответствует $(M-k)^n$ исходов, таким образом, $S_k = C_M^k \dfrac{(M-k)^n}{M^n}$ и

$$R_m(n;\, M) = \sum_{k=m}^{M} (-1)^{k-m} C_k^m C_M^k \frac{(M-k)^n}{M^n} = \\ = C_M^m \sum_{k=m}^{M} (-1)^{k-m} C_{M-m}^{k-m} \frac{(M-k)^n}{M^n}.$$

В последнем переходе мы преобразовали произведение биномиальных коэффициентов аналогично тому, как делалось в задаче I.1.14. Теперь сделаем замену переменной, обозначив $k-m$ за k. Получим

$$R_m(n;\, M) = C_M^n \sum_{k=0}^{M-m} (-1)^k C_{M-m}^k \left(1 - \frac{m+k}{M}\right)^n. \qquad \square$$

21. Рассматривается «случайное» размещение n частиц по M ячейкам в соответствии со статистикой *Бозе—Эйнштейна* («неразличимые частицы, размещение без запрета»). Пусть $Q_k(n;\,M)$ — вероятность того, что в фиксированной ячейке содержится k частиц.

Показать, что

$$Q_k(n;\,M) = \frac{C_{M+n-k-2}^{n-k}}{C_{M+n-1}^{n}}$$

и если $n \to \infty$, $M \to \infty$, но так, что $n/M \to \lambda > 0$, то

$$Q_k(n;\,M) \to p(1-p)^k, \quad \text{где } p = \frac{1}{1+\lambda}.$$

Решение. Заметим, что согласно задаче I.1.6 всего различных размещений C_{M+n-1}^{n}, а удовлетворяющих указанному свойству столько же, сколько всего размещений $n-k$ частиц по $M-1$ ячейке. Значит, искомая вероятность равна

$$Q_k(n;\,M) = \frac{C_{M+n-k-2}^{n-k}}{C_{M+n-1}^{n}} = \frac{(M+n-k-2)!\,n!\,(M-1)!}{(n-k)!\,(M-2)!\,(M+n-1)!} = \\ = (M-1)\frac{(M+n-k-2)!}{(M+n-1)!}\,\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Первая дробь есть единица, деленная на произведение $k+1$ чисел, асимптотически эквивалентных $(M+n) \sim (1+\lambda)M$, вторая эквивалентна $\lambda^k M^k$. Таким образом, все выражение асимптотически эквивалентно

$$\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}} = \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k = p(1-p)^k, \quad \text{где } p = \frac{1}{1+\lambda}. \qquad \square$$

22. Из урны, содержащей M шаров с номерами $1, \ldots, M$, «случайным» образом n раз осуществляется выбор с возвращением. Рассматривается событие A_k, состоящее в том, что максимальный номер у извлеченных шаров равен k. Показать, что

$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

Показать также, что если осуществляется выбор без возвращения, то

$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^k}, \quad n \leqslant k \leqslant N.$$

Решение. Рассмотрим события D_m, состоящие в том, что номера всех вытащенных шаров не превосходят m. Тогда $\mathsf{P}(D_m) = \dfrac{m^n}{N^n}$, поскольку вероятность того, что каждый из n шаров будет из первых m, есть $\frac{m}{n}$. Но тогда $D_{k-1} \subset D_k$ и $D_k \setminus D_{k-1} = A_k$, а значит, $\mathsf{P}(A_k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$.

При выборе без возвращения есть всего C_N^n всевозможных способов выбора и из них нам нужно выбрать те, в которых присутствует шар с номером k, а остальные $n-1$ шаров содержатся среди первых $k-1$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}$. □

23. Доказать *формулу Лейбница* дифференцирования произведения двух функций f и g:

$$D^N(fg) = \sum_{n=0}^{N} C_N^n \,(D^n f)(D^{N-n} g).$$

Решение. Проведем доказательство по индукции. В случае $N=1$ утверждение имеет вид $(fg)' = fg' + f'g$, что верно в силу свойства дифференцирования. Пусть утверждение доказано для N-й производной, тогда

$$\begin{aligned}
D^{N+1}(fg) &= \left(\sum_{n=0}^{N} C_N^n \,(D^n f)(D^{N-n} g)\right)' = \\
&= \sum_{n=0}^{N} C_N^n (D^n f)(D^{N-n+1} g) + \sum_{n=0}^{N} C_N^n (D^{n+1} f)(D^{N-n} g) = \\
&= \sum_{n=0}^{N} C_N^n (D^n f)(D^{N-n+1} g) + \sum_{n=1}^{N+1} C_N^{n-1} (D^n f)(D^{N-n+1} g) = \\
&= \sum_{n=1}^{N} (C_N^n + C_N^{n-1})(D^n f)(D^{N-n+1} g) + \\
&\qquad + C_N^0 (D^0 f)(D^{N+1} g) + C_N^N (D^{N+1} f)(D^0 g). \qquad (*)
\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $C_N^n + C_N^{n-1} = C_{N+1}^n$ и что $C_n^0 = C_{N+1}^0 = 1 = C_{N+1}^{N+1} = C_N^N$. С учетом этого из формулы $(*)$ непосредственно получаем, что

$$D^{N+1}(fg) = \sum_{n=0}^{N+1} C_N^n \,(D^n f)(D^{N-n+1} g),$$

что и требовалось доказать. □

§ 2. Некоторые классические задачи и распределения

1. Показать, что

$$\text{(a)}\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k\, y^{n-k} \qquad \textit{(биномиальное тождество)},$$

$$\text{(b)}\ (x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (x)_k\, (y)_{n-k} \qquad \textit{(тождество Вандермонда)},$$

$$\text{(c)}\ [x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, [x]_k\, [y]_{n-k} \qquad \textit{(тождество Нёрлунда)},$$

где

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1),$$
$$[x]_n = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

Решение. (a) Если раскрыть все скобки в $(x+y)^n$ без приведения подобных слагаемых, получится 2^n слагаемых вида $x^k y^{n-k}$, $k=0, \ldots, n$. Слагаемое $x^k y^{n-k}$ получается, если от k скобок в $(x+y)^n$ взять слагаемое x, а от оставшихся — y. В произведении $(x+y)^n$ ровно k скобок можно выбрать C_n^k способами, значит, и слагаемых $x^k y^{n-k}$ при раскрытии скобок в $(x+y)^n$ будет столько же.

(b) Пусть $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geqslant n$, $y \geqslant n$. Рассмотрим множество X, состоящее из x различных элементов, и множество Y, состоящее из y различных элементов, отличных от элементов множества X. Найдем число упорядоченных наборов элементов из $X \cup Y$ длины n.

С одной стороны, это есть число размещений из $x+y$ по n. С другой стороны, все наборы можно разбить на классы по числу в них элементов из X, обозначив число этих элементов за k. Число упорядоченных наборов элементов из X длины k есть $(x)_k$, а из Y длины $n-k$ есть $(y)_{n-k}$. Число способов перемешать эти наборы с сохранением порядка среди элементов из X и среди элементов из Y есть C_n^k. Таким образом, число наборов в каждом классе есть $C_n^k (x)_k (y)_{n-k}$, что и доказывает требуемую формулу для $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geqslant n$, $y \geqslant n$.

В случае, когда $x, y \in \mathbb{R}$, получаем, что левая и правая части тождества Вандермонда суть многочлены по x и y, значения которых совпадают в счетном числе точек. Значит, многочлены тождественно равны.

Оглавление