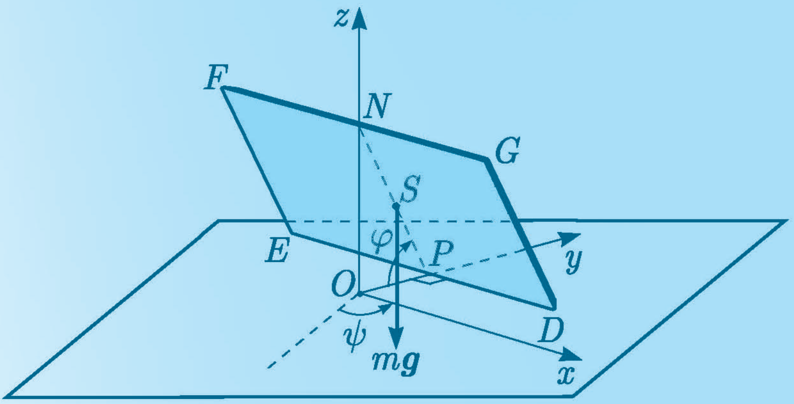
Т. Ф. Барбашова
Е. И. Кугушев
Т. В. Попова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЗАДАЧАХ



ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА
ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

УДК 531.39
ББК 22.2
Б24

Барбашова Т. Ф., Кугушев Е. И., Попова Т. В.
Теоретическая механика в задачах. Лагранжева механика. Гамильтонова механика
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
391 с.
ISBN 978-5-4439-2025-2

Данное издание продолжает серию учебных пособий по теоретической механике, выпускаемых кафедрой теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. В пособии приводятся подробные решения задач основных типов по курсу «Аналитическая механика». Издание предназначено для студентов и аспирантов естественно-научных факультетов университетов, а также преподавателей теоретической механики.

Подготовлено на основе книги: *Т. Ф. Барбашова, Е. И. Кугушев, Попова Т. В.* Теоретическая механика в задачах. Лагранжева механика. Гамильтонова механика. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2025-2

Оглавление

Основные обозначения

$Oxyz$ — декартова система координат с началом в точке O и осями Ox, Oy, Oz;

$\overline{z}$ — число, комплексно сопряженное z;

$\boldsymbol{a}$ — вектор $\boldsymbol{a}$;

$\boldsymbol{F}$ — вектор $\boldsymbol{F}$;

$\boldsymbol{e}$ — единичный вектор;

$\overrightarrow{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B;

$\mathbf{A}$ или $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ — матрица $\mathbf{A}$ или $\boldsymbol{\mathcal{A}}$;

$\mathbf{E}$ — единичная матрица;

$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}$;

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ab}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$;

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ — модуль (величина) вектора $\boldsymbol{a}$;

$|\overrightarrow{AB}|$ — модуль вектора $\overrightarrow{AB}$;

$\|\boldsymbol{a}\|$ — евклидова норма вектора $\boldsymbol{a}$;

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

$\alpha \wedge \beta$ — внешнее произведение дифференциальных форм α и β;

$\dot{a}(t) = \dfrac{da}{dt}$ — производная функции $a(t)$ по времени;

$\ddot{a}(t) = \dfrac{d^2a}{dt^2}$ — вторая производная функции $a(t)$ по времени;

$\dot{\boldsymbol{a}}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ — производная вектор-функции $\boldsymbol{a}(t)$ по времени;

$\ddot{\boldsymbol{a}}(t) = \dfrac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}$ — вторая производная вектор-функции $\boldsymbol{a}(t)$ по времени.

Греческий алфавит

A α — альфа	B β — бета
Γ γ — гамма	Δ δ — дельта
E ε — эпсилон	Z ζ — дзета
H η — эта	Θ θ — тета
I ι — йота	K κ — каппа
Λ λ — лямбда	M μ — мю (ми)
N ν — ню (ни)	Ξ ξ — кси
O o — омикрон	Π π — пи
P ρ — ро	Σ σ — сигма
T τ — тау	Υ υ — ипсилон
Φ φ — фи	X χ — хи
Ψ ψ — пси	Ω ω — омега

Любимым нашим родителям
и учителям посвящается

Предисловие

Данное издание продолжает серию учебных пособий по теоретической механике, выпускаемых кафедрой теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Пособие предназначено для обучения студентов и аспирантов решению задач по аналитической механике. В нем приводятся подробные решения более 100 задач основных типов по курсу "Аналитическая механика" и по второй части курса "Теоретическая механика", которые читаются на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

В книгу входят два раздела: Лагранжева механика и Гамильтонова механика. В каждом разделе даны теоретические понятия, теоремы и формулы, необходимые при решении задач. Представлены решения задач разного уровня сложности, иллюстрирующие общие методы и приемы, которые можно использовать при решении других задач механики. Отличительной чертой пособия является разбор целого ряда задач по темам "Переменные действие-угол" и "Преобразование Биркгофа".

Студентам перед решением задач рекомендуется внимательно разобраться в соответствующей части теоретического материала, приведенного в каждом разделе.

При изложении теоретической части авторы основывались на материалах изданий [1], [11], [17]–[20], [35], [46]. Около половины включенных в пособие задач взяты из сборников задач по теоретической и аналитической механике [9], [12], [14], [16], [36], [38], [39].

Издание предназначено для студентов и аспирантов естественно-научных факультетов университетов, а также преподавателей теоретической механики.

Авторы выражают благодарность И. Л. Антонову, В. Г. Вильке, О. Э. Зубелевичу, А. В. Карапетяну, В. А. Прошкину, В. В. Сазонову и Д. В. Трещеву, прочитавшим рукопись и сделавшим конструктивные замечания.

Формулы для вычисления кинетической энергии системы

1. Формула Кёнига для вычисления кинетической энергии системы N материальных точек

$$T = \frac{M\boldsymbol{v}_S^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2 = T_S + T_{\text{кен}}, \tag{Ф.1}$$

где m_i — масса i-й точки; $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ — масса системы; $\boldsymbol{v}_S$ — скорость центра масс S системы; $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ — скорость i-й точки в осях Кёнига; T_S — кинетическая энергия центра масс, если в него поместить массу всей системы; $T_{\text{кен}}$ — кинетическая энергия системы в осях Кёнига.

2. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки,

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right), \tag{Ф.2}$$

где J_1, J_2, J_3 — моменты инерции относительно главных осей инерции тела в неподвижной точке; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции угловой скорости тела на эти оси.

3. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$,

$$T = \frac{1}{2}J_z\boldsymbol{\omega}^2, \tag{Ф.3}$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси Oz.

4. Кинетическая энергия произвольно движущегося твердого тела

$$T = T_S + T_{\text{кен}} = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right), \tag{Ф.4}$$

где M — масса тела; $\boldsymbol{v}_S$ — скорость его центра масс; J_1, J_2, J_3 — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции тела; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции абсолютной угловой скорости тела на эти оси.

5. Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T = T_S + T_{\text{кен}} = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}J_z\boldsymbol{\omega}^2, \tag{Ф.5}$$

где M — масса тела; $\boldsymbol{v}_S$ — скорость его центра масс; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела; J_z — момент инерции тела относительно оси Sz, проходящей через его центр масс S перпендикулярно плоскости движения.

Глава 1

Лагранжева механика

1.1. Уравнения Лагранжа

1.1.1. Уравнения Лагранжа системы с обобщенными силами. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$. Радиус-векторы точек в абсолютной системе координат $Oxyz$ обозначим через $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$. Пусть на систему наложены *удерживающие*, *голономные* (другое название — геометрические) связи, заданные системой уравнений

$$f_j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \qquad j = 1, \dots, k. \tag{1.1}$$

Здесь и далее предполагается, что все функции непрерывно дифференцируемы нужное число раз. Множество положений, которые может занимать в $\mathbb{R}^{3N}$ система точек при наложенных связях, называется *конфигурационным пространством* системы. Пусть существуют вектор-функции переменных $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ и t

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t) = \big(x_i(\boldsymbol{q}, t), y_i(\boldsymbol{q}, t), z_i(\boldsymbol{q}, t)\big), \tag{1.2}$$
$$(\boldsymbol{q}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^3, \qquad i = 1, \dots, N,$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1) уравнения связей (1.1) выполняются тождественно при подстановке в них вектор-функций (1.2)

$$f_j\big(\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q}, t), \dots, \boldsymbol{r}_N(\boldsymbol{q}, t), t\big) \equiv 0, \qquad j = 1, \dots, k;$$

2) для любых $\boldsymbol{q}, t$ функции (1.2) независимы по $\boldsymbol{q}$. Это означает, что матрица $\dfrac{\partial(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N)}{\partial \boldsymbol{q}}$ размером $3N \times n$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N)}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial z_N}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z_N}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

имеет ранг n.

Тогда переменные $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ называются *обобщенными координатами* в конфигурационном пространстве системы. Эти координаты однозначно задают положение системы.

Пусть функции (1.1) функционально независимы по $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$, то есть ранг матрицы Якоби $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}$ равен k, тогда $n = 3N - k$.

Если в точке $(\boldsymbol{q}, t)$ ранг матрицы $\dfrac{\partial(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}{\partial \boldsymbol{q}}$ меньше n, то в этой точке координаты $\boldsymbol{q}$ вырождаются. Для изучения движения системы в окрестности такой точки нужно использовать другие обобщенные координаты.

Предположим, что положения точек системы определяются вектор-функциями (1.2), для которых выполнено условие 2). Тогда на систему наложены голономные связи вида (1.1) и $\boldsymbol{q}$ — обобщенные координаты системы. Поэтому голономные связи можно задавать соотношениями (1.2). Система, на которую наложены голономные связи, называется *голономной*.

Пусть введены обобщенные координаты. Тогда в любой момент времени t каждому положению $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ точек системы однозначно отвечает некоторый вектор обобщенных координат $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ такой, что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}, t)$. Соответственно каждому закону движения $\boldsymbol{r}(t) = \big(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)\big)$ точек системы отвечает некоторая кривая $\boldsymbol{q}(t) = \big(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)\big)$ в пространстве обобщенных координат такая, что

$$\boldsymbol{r}_i(t) = \boldsymbol{r}_i\big(\boldsymbol{q}(t), t\big), \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

Вектор $\dfrac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \dot{\boldsymbol{q}}(t) = \big(\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_n(t)\big)$ называется вектором *обобщенных скоростей*. Дифференцируя (1.3) по времени, для абсолютных скоростей точек системы получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{r}_i\big(\boldsymbol{q}(t), t\big)\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}.$$

В любой момент времени t обобщенные координаты $\boldsymbol{q}$ и обобщенные скорости $\dot{\boldsymbol{q}}$ однозначно определяют положения и скорости точек системы в абсолютном пространстве:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t), \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.4}$$

Пусть t^* — некоторый момент времени. Освободим систему от связей (1.1) и наложим на нее связи при зафиксированном времени

$$f_j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t^*) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Такие связи будем называть *зафиксированными связями*. В качестве обобщенных координат выберем те же координаты $\boldsymbol{q}$, причем вместо функций (1.2) перехода от обобщенных координат к абсолютным возмем следующие

$$\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}) = \big(x_i(\boldsymbol{q}, t^*), y_i(\boldsymbol{q}, t^*), z_i(\boldsymbol{q}, t^*)\big), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в точке $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}\big(\boldsymbol{q}^*\big)$. Введем некоторую гладкую кривую $\boldsymbol{q}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, такую, что $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}^*$. Переменную τ будем рассматривать как время для системы с зафиксированными связями. Тогда движению системы по кривой $\boldsymbol{q}(\tau)$ соответствует движение по гладкой кривой $\boldsymbol{r}(\tau) = \boldsymbol{r}\big(\boldsymbol{q}(\tau)\big)$, причем $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}^*$.

Скорости точек системы при зафиксированных связях называются *виртуальными скоростями*. Виртуальная скорость $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ системы в точке $\boldsymbol{r}^*$ (при $\tau = 0$) — это вектор

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}'(0). \tag{1.5}$$

Виртуальным перемещением системы в точке $\boldsymbol{r}^*$ называется дифференциал функции $\boldsymbol{r}(\tau)$, то есть линейная часть ее приращения

$$\delta\boldsymbol{r} = (\delta\boldsymbol{r}_1, \ldots, \delta\boldsymbol{r}_N) = \widetilde{\boldsymbol{v}}\,\delta\tau = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau.$$

Виртуальным перемещением i-й точки системы в положении $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^*$ называется дифференциал

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\,\delta\tau = \left.\frac{d\boldsymbol{r}_i}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau. \tag{1.6}$$

В обобщенных координатах имеем

$$\delta\boldsymbol{r} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\,\delta\boldsymbol{q}, \qquad \text{где} \;\; \delta\boldsymbol{q} = \left.\frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau. \tag{1.7}$$

Обозначение δf для дифференциала функции f вместо стандартного df используется для того, чтобы отметить, что дифференцирование производится при зафиксированном времени. Виртуальные перемещения имеют физическую размерность перемещения, а физическая размерность виртуальной скорости зависит от физической размерности переменной τ.

> *Действительным перемещением* системы называется дифференциал вектор-функции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}, t)$
>
> $$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\,d\boldsymbol{q} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\,dt.$$
>
> *Виртуальным перемещением* системы называется дифференциал вектор-функции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}, t)$ при з а ф и к с и р о в а н н о м времени
>
> $$\delta\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}\,\delta\boldsymbol{q}. \tag{1.8}$$

Размерность пространства виртуальных перемещений называется *числом степеней свободы* системы. В случае голономных связей размерность пространства виртуальных перемещений совпадает с размерностью пространства обобщенных координат. Поэтому *число степеней свободы голономной системы* равно числу обобщенных координат.

Виртуальные перемещения точек твердого тела. Пусть механическая система представляет собой твердое тело, содержащее три точки, не лежащие на одной прямой. В этом случае положение любой точки тела в пространстве определяется положением некоторой его точки P и ориентацией жестко связанного с телом репера. Скорость $\boldsymbol{v}_B$ любой точки B тела по формуле Эйлера полностью определяется скоростью $\boldsymbol{v}_P$ точки P тела (полюса) и вектором $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PB}, \qquad \overrightarrow{PB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_P, \tag{1.9}$$

где $\boldsymbol{r}_B$ и $\boldsymbol{r}_P$ — радиус-векторы точек B и P соответственно.

Предположим, что в момент времени t^* точки тела находятся в положении $\boldsymbol{r}^* = (\boldsymbol{r}_1^*, \ldots, \boldsymbol{r}_N^*)$. Для связей при зафиксированном времени $t = t^*$ рассмотрим некоторое движение твердого тела из точки $\boldsymbol{r}^*$. Пусть этому движению соответствует гладкая кривая $\boldsymbol{r}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, такая, что $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}^*$. Переменную τ будем рассматривать как время для системы с зафиксированными связями. Согласно (1.5) $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \left.\dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{d\tau}\right|_{\tau=0}$ — виртуальная скорость i-й точки тела при $\tau = 0$. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{v}}_P$ — виртуальная скорость полюса P, а $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ — угловая скорость тела в момент $\tau = 0$. Используя (1.6) и (1.9), найдем виртуальное перемещение i-й точки в момент $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{r}_i &= \widetilde{\boldsymbol{v}}_i \, \delta\tau = \big(\widetilde{\boldsymbol{v}}_P + \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{r}_i^* - \boldsymbol{r}_P^*)\big)\, \delta\tau = \\ &= \widetilde{\boldsymbol{v}}_P \, \delta\tau + \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \, \delta\tau \times (\boldsymbol{r}_i^* - \boldsymbol{r}_P^*), \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Первое слагаемое в (1.10) согласно (1.6) — это виртуальное перемещение точки P:

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_P \, \delta\tau = \delta \boldsymbol{r}_P.$$

Рассмотрим вектор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\delta\tau$, входящий в (1.10). Положение и скорость любой точки твердого тела есть вектор-функции обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени (см. (1.4)). При этом скорости точек линейно зависят от обобщенных скоростей. Из формулы Эйлера (1.9) следует, что угловая скорость твердого тела тоже является вектор-функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, причем зависимость от обобщенных скоростей линейная:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_k + \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{q}, t). \tag{1.11}$$

Здесь $\boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{q},t)$, $\boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{q},t)$ — некоторые вектор-функции. Для тела с зафиксированными связями виртуальные скорости его точек согласно (1.5) являются линейными формами от $\boldsymbol{q}'$. Поэтому из (1.10) следует, что $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ также является линейной формой от $\boldsymbol{q}'$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{q}^*,t^*)\boldsymbol{q}'(0) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{q}^*,t^*)\left.\frac{dq_k}{d\tau}\right|_{\tau=0}. \qquad (1.12)$$

Вектор $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\delta\tau$ обозначим через $\boldsymbol{\Omega}_\delta$. В соответствии с (1.7)

$$\left.\frac{dq_k}{d\tau}\right|_{\tau=0}\delta\tau = \delta q_k,$$

тогда из (1.12) находим

$$\boldsymbol{\Omega}_\delta = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\delta\tau = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k\,\delta q_k. \qquad (1.13)$$

Для получения $\boldsymbol{\Omega}_\delta$ нужно в выражении (1.11) для угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ оставить только слагаемые, содержащие обобщенные скорости $\dot{q}_k$, и заменить $\dot{q}_k$ на δq_k:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_k + \boldsymbol{w}_0(\boldsymbol{q},t) \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\Omega}_\delta = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k\,\delta q_k. \qquad (1.14)$$

Итак, в любой момент времени согласно (1.10) имеем

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \delta\boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{\Omega}_\delta \times \big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P\big), \qquad i = 1,\ldots,N. \qquad (1.15)$$

Дифференциальную форму $\boldsymbol{\Omega}_\delta$ будем называть *виртуальным поворотом* тела, а $\boldsymbol{\Omega}_\delta \times (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P)$ — *перемещением i-й точки тела на виртуальном повороте* $\boldsymbol{\Omega}_\delta$ вокруг полюса P.

Виртуальное перемещение i-й точки твердого тела есть сумма виртуального перемещения некоторой точки тела (полюса) и перемещения i-й точки тела на виртуальном повороте вокруг полюса.

Пример. Получим выражение для виртуального поворота твердого тела с неподвижной точкой, если в качестве обобщенных координат выбраны углы Эйлера. Пусть тело вращается вокруг точки O абсолютной системы координат $Oxyz$ с направляющими векторами $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$. Свяжем с телом подвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ с направляющими векторами $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\zeta$. Введем ось $O\boldsymbol{e}$ с направляющим вектором $\boldsymbol{e} = \dfrac{\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\zeta}{|\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\zeta|}$. Эта ось лежит на пересечении плоскостей Oxy и $O\xi\eta$ и называется *линией узлов*. Обозначим углы Эйлера через ψ, θ, φ. *Угол прецессии* ψ — угол между осью Ox и линией узлов; *угол нутации* θ — угол между осями Oz и $O\zeta$; *угол собственного вращения* φ — угол между линией узлов и осью $O\xi$.

По теореме сложения угловых скоростей угловая скорость твердого тела равна (см. задачу 1.7)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z + \dot{\theta}\boldsymbol{e} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta .$$

Тогда виртуальный поворот тела согласно (1.14) имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega}_\delta = \boldsymbol{e}_z\,\delta\psi + \boldsymbol{e}\,\delta\theta + \boldsymbol{e}_\zeta\,\delta\varphi. \tag{1.16}$$

■

Вычислим в обобщенных координатах основные динамические характеристики системы — кинетическую энергию системы и элементарную работу сил, приложенных к точкам системы, на виртуальном перемещении.

Кинетическая энергия системы. *Кинетическая энергия* системы по определению равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2. \tag{1.17}$$

Пусть известен закон движения $\boldsymbol{q}(t)$ точек системы в обобщенных координатах. Подставив (1.4) в (1.17), получим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\,\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2. \tag{1.18}$$

Следовательно, T — это функция обобщенных координат $\boldsymbol{q}$, обобщенных скоростей $\dot{\boldsymbol{q}}$ и времени t: $T = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$. Раскрыв скобки в выражении (1.18), представим кинетическую энергию в виде суммы трех слагаемых

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Слагаемое T_2 — квадратичная форма от обобщенных скоростей:

$$T_2(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\,\dot{\boldsymbol{q}}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_k\dot{q}_l = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{q}, t)\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}\Big),$$

где $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{q}, t) = \big(a_{kl}(\boldsymbol{q}, t)\big)$ — симметрическая $(n \times n)$-матрица, элементы которой имеют вид

$$a_{kl}(\boldsymbol{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}\right).$$

Функция T_2 неотрицательна. Ранг матрицы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}}$ равен n, поэтому для $\dot{\boldsymbol{q}} \neq 0$ функция T_2 отлична от нуля и, следовательно, положительна. Значит, матрица $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ невырожденная и положительно определенная. Эта матрица называется *матрицей кинетической энергии.*

Слагаемое T_1 — линейная форма от обобщенных скоростей:

$$T_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right) = \big(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}, t), \dot{\boldsymbol{q}}\big) = \sum_{k=1}^{n} d_k(\boldsymbol{q}, t) \dot{q}_k,$$

где $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}, t) = (d_1, \ldots, d_n)$ — вектор с компонентами

$$d_k(\boldsymbol{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right).$$

Слагаемое T_0 не зависит от обобщенных скоростей и является функцией обобщенных координат и времени:

$$T_0(\boldsymbol{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Замечание. Пусть связи (1.1) не зависят явно от времени. В этом случае обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы функции (1.2), задающие связь абсолютных координат точек системы с обобщенными координатами, тоже не зависели явно от времени. Тогда $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0$, $T_1 = T_0 = 0$ и кинетическая энергия является квадратичной формой от обобщенных скоростей: $T = T_2$. ■

Элементарная работа. По определению *элементарная работа сил*, приложенных к точкам системы, *на виртуальном перемещении* системы равна

$$A_\delta = \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_i, \delta \boldsymbol{r}_i\big). \tag{1.19}$$

Пример. Пусть система материальных точек с массами m_i, $i = 1, \ldots, N$, находится в поле силы тяжести. На точки системы действуют силы $\boldsymbol{F}_i = m_i \boldsymbol{g}$, $i = 1, \ldots, N$. Из (1.19) имеем

$$\begin{aligned} A_\delta &= \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_i, \delta \boldsymbol{r}_i\big) = \sum_{i=1}^{N} \big(m_i \boldsymbol{g}, \delta \boldsymbol{r}_i\big) = \big(\boldsymbol{g}, \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta \boldsymbol{r}_i\big) = \\ &= \Big(\boldsymbol{g}, \delta\big(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i\big)\Big) = \big(\boldsymbol{g}, \delta(m \boldsymbol{r}_S)\big) = \big(\boldsymbol{g}, m\, \delta \boldsymbol{r}_S\big) = \big(m \boldsymbol{g}, \delta \boldsymbol{r}_S\big), \end{aligned} \tag{1.20}$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ — масса системы, $\boldsymbol{r}_S$ — радиус-вектор центра масс S системы, $\delta \boldsymbol{r}_S$ — виртуальное перемещение центра масс. ■

Элементарная работа A_δ линейно зависит от дифференциалов функций $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t)$ при зафиксированном времени, но может не быть дифференциалом какой-либо функции при зафиксированном времени.

Если силы потенциальны, то есть $\boldsymbol{F}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}$, где $V(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N, t)$ — потенциальная энергия системы, то элементарная работа — это дифференциал функции $-V$ при зафиксированном времени. Действительно, в этом случае согласно (1.19) получаем

$$A_\delta = \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_i, \delta \boldsymbol{r}_i\big) = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \delta \boldsymbol{r}_i\right) = -\delta V. \tag{1.21}$$

Подставив (1.8) в (1.19), находим

$$A_\delta = \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{F}_i, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\, \delta \boldsymbol{q}\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{F}_i, \delta \boldsymbol{q}\right).$$

Вектор

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{F}_i$$

называется *вектором обобщенных сил*. Обозначим через Q_k его компоненты: $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$. Они имеют вид

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}, \boldsymbol{F}_i\right), \qquad k = 1, \dots, n. \tag{1.22}$$

Компонента Q_k называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате q_k. Итак,

$$A_\delta = (\boldsymbol{Q}, \delta \boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{n} Q_k\, \delta q_k. \tag{1.23}$$

В общем случае заданные силы зависят от положения точек системы, их скоростей и времени: $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, t)$, $i = 1, \dots, N$. Поэтому обобщенные силы зависят от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

Замечание 1. Обобщенную силу Q_k можно найти, вычислив элементарную работу сил, действующих на точки системы, на таком виртуальном перемещении, что $\delta q_j = 0$ при всех $j \neq k$. Элементарная работа на этом перемещении имеет вид $A_\delta = Q_k\, \delta q_k$, а Q_k — это коэффициент при δq_k в выражении для A_δ. ■

Замечание 2. Если силы потенциальны и V — потенциальная энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и время, то из (1.22) получаем

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{1.24}$$

■

Внутренние и внешние силы. Силы, приложенные к точкам системы, могут быть внутренними и внешними. *Внутренними силами* называются силы попарного взаимодействия точек системы, подчиняющиеся третьему закону Ньютона (они равны по величине и противоположно направлены вдоль прямой, соединяющей точки пары):

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} = F_{ij}\,\frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}, \qquad i \neq j, \tag{1.25}$$

где $\boldsymbol{F}_{ij}$ — сила, действующая на i-ю точку системы со стороны j-й точки. Если $F_{ij} > 0$, то i-я и j-я точки притягиваются друг к другу, а если $F_{ij} < 0$, то отталкиваются. Со стороны точек системы на i-ю точку действует суммарная внутренняя сила

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}.$$

Здесь и далее считается, что $\boldsymbol{F}_{ii} = 0$.

Внешними силами называются силы, не являющиеся внутренними. Как правило, эти силы вызываются действием на точки системы объектов, не входящих в эту систему.

Свойства внутренних сил.

1. Сумма внутренних сил равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\big(\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji}\big) = 0.$$

2. Суммарный момент внутренних сил относительно любой точки P равен нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{mom}_P \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P\big) \times \boldsymbol{F}_i = 0.$$

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{N}\big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P\big) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F}_i.$$

Вычислим первое слагаемое

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \Big(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\big(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}\big).$$

Воспользовавшись (1.25), получаем

$$\sum_{i,j=1}^{N}\big(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}\big) = \sum_{i,j=1}^{N}\big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\big) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0.$$

Для второго слагаемого имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_P \times \Big(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i\Big) = 0.$$

Элементарная работа для твердого тела. Вычислим элементарную работу сил, приложенных к точкам твердого тела, на его виртуальном перемещении. Пусть P — некоторая точка тела. Исходя из (1.15), имеем

$$A_\delta = \sum_{i=1}^{N} \Big(\boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\boldsymbol{F}_i, \big(\delta\boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{\Omega}_\delta \times (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P)\big)\Big),$$

откуда

$$A_\delta = \Big(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_P\Big) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\Omega}_\delta \times \big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P\big)\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_P\Big) + \Big(\boldsymbol{\Omega}_\delta, \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P\big) \times \boldsymbol{F}_i\Big).$$

Вектор $\mathrm{mom}_P \boldsymbol{F}_i = \big(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P\big) \times \boldsymbol{F}_i$ является моментом силы $\boldsymbol{F}_i$, приложенной в i-й точке, относительно точки P. Следовательно,

$$A_\delta = \Big(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_P\Big) + \Big(\boldsymbol{\Omega}_\delta, \sum_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_P \boldsymbol{F}_i\Big).$$

Введем следующие обозначения

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i, \qquad \boldsymbol{M}_P = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{mom}_P \boldsymbol{F}_i.$$

Скалярное произведение $\big(\boldsymbol{M}_P, \boldsymbol{\Omega}_\delta\big)$ назовем *элементарной работой момента* $\boldsymbol{M}_P$ сил относительно точки P *на виртуальном повороте* $\boldsymbol{\Omega}_\delta$ твердого тела.

> Элементарная работа сил, приложенных к точкам твердого тела, на его виртуальном перемещении равна элементарной работе суммы этих сил на виртуальном перемещении любой точки P твердого тела, сложенной с элементарной работой суммарного момента $\boldsymbol{M}_P$ этих сил относительно точки P на виртуальном повороте тела:
>
> $$A_\delta = \big(\boldsymbol{F}, \delta\boldsymbol{r}_P\big) + \big(\boldsymbol{M}_P, \boldsymbol{\Omega}_\delta\big). \tag{1.26}$$

В обобщенных координатах согласно (1.8) и (1.13) имеем

$$A_\delta = \sum_{k=1}^{n} \Big(\boldsymbol{F}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_P}{\partial q_k}\Big) \delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \Big(\boldsymbol{M}_P, \boldsymbol{w}_k\Big) \delta q_k. \tag{1.27}$$

Элементарная работа в н у т р е н н и х сил на любом виртуальном перемещении твердого тела равна нулю, поскольку для внутренних сил $\boldsymbol{F} = 0$ и $\boldsymbol{M}_P = 0$.

Пусть к некоторым точкам P_1 и P_2 твердого тела приложены равные по модулю и противоположно направленные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ $\big(\boldsymbol{F}_1 = -\,\boldsymbol{F}_2\big)$. Такая система сил называется *парой сил.* Момент пары сил относительно произвольной точки O равен

$$\boldsymbol{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \times \boldsymbol{F}_1 + \overrightarrow{OP_2} \times \boldsymbol{F}_2 = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \times \boldsymbol{F}_1 = \overrightarrow{P_2P_1} \times \boldsymbol{F}_1.$$

Значит, момент $\boldsymbol{M} = \overrightarrow{P_2P_1} \times \boldsymbol{F}_1$ не зависит от точки, относительно которой вычисляется. Он называется *моментом пары.* Элементарная работа пары сил на виртуальном перемещении твердого тела согласно (1.26) равна $A_\delta = \big(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}_\delta\big)$.

Пример. Найдем выражение элементарной работы для твердого тела с неподвижной точкой, если в качестве обобщенных координат выбраны углы Эйлера: $q_1 = \psi$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$. В этом случае виртуальный поворот тела имеет вид (1.16). В качестве точки P выберем неподвижную точку O тела. Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_O}{\partial q_k} \equiv 0, \qquad k = 1, 2, 3,$$

и поэтому из (1.27) получаем

$$A_\delta = \big(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{e}_z\big)\,\delta\psi + \big(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{e}\big)\,\delta\theta + \big(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{e}_\zeta\big)\,\delta\varphi.$$

Здесь $\boldsymbol{M}_O$ — суммарный момент действующих на тело сил относительно неподвижной точки O.

Вектор обобщенных сил $\boldsymbol{Q} = \big(Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi\big)$ имеет компоненты

$$Q_\psi = \big(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{e}_z\big), \qquad Q_\theta = \big(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{e}\big), \qquad Q_\varphi = \big(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{e}_\zeta\big),$$

где координаты векторов $\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_\zeta$ нужно выразить через обобщенные координаты ψ, θ, φ, а $\boldsymbol{M}_O$ — через ψ, θ, φ и $\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$. ■

Идеальные связи. Силы $\boldsymbol{F}_i$, которые действовали бы на точки системы, если бы связей не было, называются *заданными* силами. Выполнение уравнений связей, наложенных на систему, обеспечивается дополнительными (заранее неизвестными) силами $\boldsymbol{R}_i$, $i = 1, \ldots, N$, приложенными к точкам системы. Эти силы называются *реакциями связей.* Таким образом, при наличии связей уравнения движения точек системы имеют вид

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Связи называются *идеальными*, если элементарная работа A_δ реакций связей $\boldsymbol{R} = \big(\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_N\big)$ на любом виртуальном перемещении $\delta\boldsymbol{r} = \big(\delta\boldsymbol{r}_1, \ldots, \delta\boldsymbol{r}_N\big)$ равна нулю:

$$A_\delta = \big(\boldsymbol{R}, \delta\boldsymbol{r}\big) = \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{R}_i, \delta\boldsymbol{r}_i\big) = 0.$$

Если на механическую систему наложены идеальные связи, то при вычислении элементарной работы сил, действующих на точки системы, на ее виртуальном перемещении нужно учитывать только заданные силы.

Принцип Даламбера–Лагранжа. *Пусть связи, наложенные на систему, идеальны. Вектор-функция* $\bigl(\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)\bigr)$*, удовлетворяющая связям, задает действительное движение системы тогда и только тогда, когда в каждый момент времени t для любого виртуального перемещения $\delta\boldsymbol{r} = (\delta\boldsymbol{r}_1, \ldots, \delta\boldsymbol{r}_N)$ выполнено*

$$\sum_{i=1}^{N}\bigl((m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i), \delta\boldsymbol{r}_i\bigr) = 0. \tag{1.28}$$

Идеальность связей в твердом теле. Пусть механическая система представляет собой твердое тело. Значит, на систему наложены голономные связи, заключающиеся в том, что расстояния между точками системы неизменны. Пусть реакции связей, обеспечивающие постоянство расстояний, являются внутренними силами. Тогда элементарная работа реакций связей на любом виртуальном перемещении твердого тела равна нулю, так как элементарная работа внутренних сил на любом виртуальном перемещении твердого тела равна нулю (см. стр. 16). Стало быть, эти связи идеальны. В дальнейшем предполагается, что тело остается твердым за счет внутренних сил.

Если на твердое тело наложены идеальные связи, то при вычислении элементарной работы сил на виртуальном перемещении тела нужно учитывать только заданные внешние силы, приложенные к точкам тела.

Идеальность связей при качении твердых тел без проскальзывания. Пусть твердое тело ограничено поверхностью $\Sigma_{\text{т}}$ и в каждый момент времени поверхность $\Sigma_{\text{т}}$ соприкасается с некоторой поверхностью Σ. Будем говорить, что тело *катится без проскальзывания* по поверхности Σ, если скорости каждой пары точек поверхностей $\Sigma_{\text{т}}$ и Σ, которыми они соприкасаются, равны.

Качение без проскальзывания можно рассматривать как наложенную на систему связь. Рассмотрим два случая.

1) Пусть движение поверхности Σ задано. Тогда виртуальное перемещение точки P, которой тело соприкасается с поверхностью Σ, равно нулю. Значит, элементарная работа реакций связей, действующих на точки тела, на любом его виртуальном перемещении согласно (1.26) имеет вид

$$A_\delta = \bigl(\boldsymbol{M}_P, \boldsymbol{\Omega}_\delta\bigr),$$

где $\boldsymbol{\Omega}_\delta$ — виртуальный поворот тела, $\boldsymbol{M}_P$ — суммарный момент реакций связей относительно точки P. Если $\boldsymbol{M}_P$ равен нулю, то связи идеальны.

2) Пусть твердое тело катится без проскальзывания по другому твердому телу. Будем считать, что система состоит из этих двух тел и они остаются твердыми за счет внутренних сил. Найдем элементарную работу реакций связей, обеспечивающих качение без проскальзывания, на любом виртуальном перемещении системы

$$A_\delta = \big(\boldsymbol{R}_1, \delta\boldsymbol{r}_{P_1}\big) + \big(\boldsymbol{M}_{P_1}, \boldsymbol{\Omega}_{\delta 1}\big) + \big(\boldsymbol{R}_2, \delta\boldsymbol{r}_{P_2}\big) + \big(\boldsymbol{M}_{P_2}, \boldsymbol{\Omega}_{\delta 2}\big).$$

Здесь $\delta\boldsymbol{r}_{P_1}$, $\delta\boldsymbol{r}_{P_2}$ — виртуальные перемещения точек P_1 и P_2, которыми тела соприкасаются; $\boldsymbol{\Omega}_{\delta 1}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\delta 2}$ — виртуальные повороты тел; $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{M}_{P_1}$, $\boldsymbol{M}_{P_2}$ — суммарные реакции и суммарные моменты реакций связей. При качении без проскальзывания $\delta\boldsymbol{r}_{P_1} = \delta\boldsymbol{r}_{P_2}$. Будем считать, что реакции связей подчиняются третьему закону Ньютона, то есть $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{R}_2$. Тогда

$$A_\delta = \big(\boldsymbol{M}_{P_1}, \boldsymbol{\Omega}_{\delta 1}\big) + \big(\boldsymbol{M}_{P_2}, \boldsymbol{\Omega}_{\delta 2}\big).$$

Значит, если суммарные моменты реакций связей относительно точки соприкосновения $P_1 = P_2$ равны нулю, то связи идеальны.

Далее считается, что качение тела по поверхности без проскальзывания является идеальной связью.

Уравнения Лагранжа. Пусть на систему наложены идеальные, голономные связи. Тогда ее движение описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.29}$$

Здесь кинетическая энергия T системы и обобщенные силы Q_i, $i = 1, \ldots, n$, являются функциями обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени. Уравнения (1.29) называются *уравнениями Лагранжа* второго рода системы с обобщенными силами. Механические системы, движение которых описывается уравнениями Лагранжа, будем называть *лагранжевыми системами.*

Частное дифференцирование $\dfrac{\partial T}{\partial q_i}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_i}$ подразумевает, что кинетическая энергия T рассматривается как функция независимых переменных $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ и t. Полное дифференцирование по времени $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)$ означает, что частную производную $\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_i} = G_i\big(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t\big)$ нужно дифференцировать как сложную функцию времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{dG_i\big(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t\big)}{dt} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}\right) + \left(\frac{\partial G_i}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}, \ddot{\boldsymbol{q}}\right) + \frac{\partial G_i}{\partial t}.$$

Пример. Пусть $T = \dot q_1^2 + q_1^3 \dot q_2^2 + \dot q_1 \sin(q_2 + t)$, тогда

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 3q_1^2\dot q_2^2, \ \frac{\partial T}{\partial q_2} = \dot q_1 \cos(q_2 + t), \ \frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = 2\dot q_1 + \sin(q_2 + t), \ \frac{\partial T}{\partial \dot q_2} = 2q_1^3 \dot q_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}\right) = \frac{d}{dt}\big(2\dot q_1 + \sin(q_2+t)\big) = 2\ddot q_1 + \cos(q_2+t)\dot q_2 + \cos(q_2+t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(2q_1^3\dot q_2\right) = 6q_1^2\dot q_1\dot q_2 + 2q_1^3\ddot q_2. \qquad \blacksquare$$

Чтобы выписать уравнения Лагранжа, нужно:

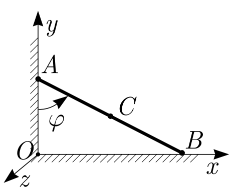
1) Ввести обобщенные координаты.

2) Найти кинетическую энергию системы как функцию обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

3) Выразить элементарную работу заданных сил на виртуальном перемещении системы через обобщенные координаты, обобщенные скорости, время и виртуальные перемещения. Затем найти обобщенные силы как функции обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

Замечание. При вычислении элементарной работы можно использовать свойства аддитивности. Если систему заданных сил $\{\boldsymbol{F}_i\}$, $i=1,\ldots,N$, разбить на две подсистемы сил $\{\boldsymbol{F}_i^{(1)}\}$ и $\{\boldsymbol{F}_i^{(2)}\}$ так, чтобы $\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_i^{(1)}+\boldsymbol{F}_i^{(2)}$, то элементарная работа исходной системы сил равна сумме элементарных работ сил обеих частей системы.

Если систему точек разбить на непересекающиеся подсистемы, то элементарная работа заданных сил, приложенных к точкам системы, будет равна сумме элементарных работ заданных сил, приложенных к точкам подсистем. $\blacksquare$



К задаче 1.1.

Задача 1.1. Однородный стержень AB массы m и длины $2l$ скользит своими концами по сторонам прямого угла, образованного осями Ox и Oy неподвижной системы координат Oxy. Ось Oy направлена вертикально вверх. Движение происходит в поле силы тяжести. В точке A на стержень действует сила $\boldsymbol{F}_A=F(t)\boldsymbol{e}_y$ ($\boldsymbol{e}_y$ — направляющий вектор оси Oy), а в точке B — сила вязкого трения $\boldsymbol{F}_B=-c\boldsymbol{v}_B$, где $\boldsymbol{v}_B$ — скорость точки B. Написать уравнение Лагранжа движения стержня.

Решение. Положение любой точки стержня однозначно определяется углом φ отклонения стержня от вертикали. Выберем этот угол в качестве обобщенной координаты.

Кинетическую энергию стержня, движущегося в плоскости Oxy, найдем по формуле (Ф.5)

$$T=\frac{m\boldsymbol{v}_C^2}{2}+\frac{J_C\boldsymbol{\omega}^2}{2},$$

где $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс C стержня (скорость середины стержня); $J_C = ml^2/3$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости Oxy; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость стержня. Координаты центра масс стержня в плоскости Oxy равны $x_C = l\sin\varphi$, $y_C = l\cos\varphi$, поэтому

$$\boldsymbol{v}_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = l^2\dot{\varphi}^2.$$

Пусть неподвижная ось Oz перпендикулярна плоскости движения стержня и направлена так, что если смотреть на плоскость Oxy из точки на положительной части оси Oz, то поворот стержня происходит против часовой стрелки при увеличении угла φ. Обозначим через $\boldsymbol{e}_z$ направляющий вектор этой оси. Тогда угловая скорость стержня равна $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$. В результате

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{6} = \frac{2ml^2\dot{\varphi}^2}{3}.$$

Найдем обобщенную силу Q_φ, вычислив элементарную работу сил на виртуальном перемещении системы. На точки стержня действует система заданных сил: сила $\boldsymbol{F}_A = F(t)\boldsymbol{e}_y$ приложена к точке A, сила $\boldsymbol{F}_B = -\,c\boldsymbol{v}_B$ приложена к точке B, действие поля силы тяжести на точки стержня эквивалентно действию силы $m\boldsymbol{g} = -\,mg\boldsymbol{e}_y$, приложенной к центру масс C. По определению элементарная работа сил на виртуальном перемещении системы равна

$$A_\delta = \big(\boldsymbol{F}_A, \delta\boldsymbol{r}_A\big) + \big(\boldsymbol{F}_B, \delta\boldsymbol{r}_B\big) + \big(m\boldsymbol{g}, \delta\boldsymbol{r}_C\big).$$

Здесь $\delta\boldsymbol{r}_A$, $\delta\boldsymbol{r}_B$, $\delta\boldsymbol{r}_C$ — виртуальные перемещения точек A, B и C.

Замечание. Элементарную работу сил тяжести, приложенных к точкам стержня, можно вычислить по формуле (1.20). ■

Для радиус-векторов точек A, B и C имеем

$$\boldsymbol{r}_A = 2l\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{r}_B = 2l\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{r}_C = l\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + l\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y,$$

поэтому согласно (1.8)

$$\delta\boldsymbol{r}_A = -\,2l\sin\varphi\,\delta\varphi\boldsymbol{e}_y, \qquad \delta\boldsymbol{r}_B = 2l\cos\varphi\,\delta\varphi\boldsymbol{e}_x,$$
$$\delta\boldsymbol{r}_C = l\cos\varphi\,\delta\varphi\boldsymbol{e}_x - l\sin\varphi\,\delta\varphi\boldsymbol{e}_y.$$

С учетом того, что $\boldsymbol{v}_B = \dot{\boldsymbol{r}}_B = 2l\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x$, находим

$$A_\delta = \big(-2F(t)l\sin\varphi - 4cl^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + mgl\sin\varphi\big)\,\delta\varphi = Q_\varphi\,\delta\varphi.$$

Отсюда $Q_\varphi = -\,2F(t)l\sin\varphi - 4cl^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + mgl\sin\varphi$.

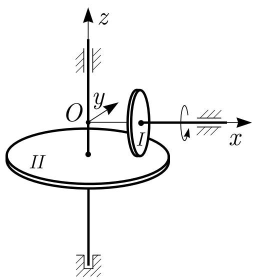
Поскольку

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{4ml^2\dot{\varphi}}{3}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{4ml^2\ddot{\varphi}}{3}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0,$$

то уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{4ml^2\ddot{\varphi}}{3} = -\,2F(t)l\sin\varphi - 4cl^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + mgl\sin\varphi.$$

Задача 1.2. Колесо I вращается вокруг своей неподвижной горизонтальной оси Ox и касается колеса II, вращающегося вокруг своей неподвижной вертикальной оси Oz. Колеса катятся одно по другому без проскальзывания. К колесу I приложена пара сил с постоянным моментом $\boldsymbol{M}_1 = M_1\boldsymbol{e}_x$, а к колесу II — пара сил с постоянным моментом $\boldsymbol{M}_2 = M_2\boldsymbol{e}_z$ ($\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_z$ — направляющие векторы осей Ox и Oz). Система находится в поле силы тяжести. Центры масс колес расположены в центрах колес. Радиус колеса I равен r, а его момент инерции относительно оси Ox равен J_1. Момент инерции колеса II относительно оси Oz равен J_2, а расстояние от его центра до точки касания колес равно r_0. Найти закон движения колеса II, если в начальный момент $t = 0$ система покоится.



К задаче 1.2.

Решение. Обозначим через ψ угол поворота колеса I вокруг оси Ox (если смотреть из точки на положительной части этой оси, то поворот колеса I происходит против часовой стрелки при увеличении угла ψ). Угловая скорость колеса I равна $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_x$. Пусть φ — угол поворота колеса II вокруг оси Oz (если смотреть из точки на положительной части этой оси, то поворот колеса II происходит против часовой стрелки при увеличении угла φ). Угловая скорость колеса II равна $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$.

Колеса движутся без проскальзывания, поэтому равны скорости $\boldsymbol{v}_{K_1}$ и $\boldsymbol{v}_{K_2}$ точек K_1 и K_2 колес I и II, которыми они соприкасаются. По формуле Эйлера имеем

$$\boldsymbol{v}_{K_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{C_1K_1} = r\dot{\psi}\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{v}_{K_2} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{C_2K_2} = r_0\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_y,$$

где C_1, C_2 — неподвижные центры колес (C_1 лежит на оси вращения Ox колеса I, а C_2 — на оси вращения Oz колеса II); $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x$. Так как $\boldsymbol{v}_{K_1} = \boldsymbol{v}_{K_2}$, то углы φ и ψ связаны соотношением

$$r\dot{\psi} = r_0\dot{\varphi}, \qquad \text{откуда} \qquad r\psi = r_0\varphi + \mathrm{const}\,. \tag{1.30}$$

Значит, положение любой точки системы однозначно задается либо углом φ, либо углом ψ, и связи, наложенные на систему, голономны. Примем угол φ за обобщенную координату.

Запишем уравнение Лагранжа. Кинетическая энергия T системы складывается из кинетических энергий T_i колес ($i = 1, 2$). Так как каждое колесо вращается вокруг своей оси, то по формуле (Ф.3) имеем $T_i = \dfrac{1}{2}J_i\boldsymbol{\omega}_i^2$, где J_i — момент инерции i-го колеса относительно его оси вращения, $\boldsymbol{\omega}_i$ — угловая скорость i-го колеса. Тогда

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\psi}^2 + J_2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}\left(J_1\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + J_2\right)\dot{\varphi}^2.$$

Найдем обобщенную силу Q_φ. К колесу I приложена пара сил с постоянным моментом $\boldsymbol{M}_1 = M_1\boldsymbol{e}_x$, а к колесу II — пара сил с постоянным моментом $\boldsymbol{M}_2 = M_2\boldsymbol{e}_z$. Действие поля силы тяжести на колеса эквивалентно действию сил $\boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{g}$, приложенных к неподвижным центрам масс C_1 и C_2 колес (m_1, m_2 — массы колес). Элементарную работу сил на виртуальном перемещении системы вычислим, используя (1.26) и свойства аддитивности элементарной работы (см. стр. 20),

$$A_\delta = (\boldsymbol{F}_1, \delta\boldsymbol{r}_{C_1}) + (\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{\Omega}_{\delta 1}) + (\boldsymbol{F}_2, \delta\boldsymbol{r}_{C_2}) + (\boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{\Omega}_{\delta 2}).$$

Здесь $\delta\boldsymbol{r}_{C_1} = 0$, $\delta\boldsymbol{r}_{C_2} = 0$ — виртуальные перемещения точек C_1 и C_2; $\boldsymbol{\Omega}_{\delta 1}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\delta 2}$ — виртуальные повороты колес. С учетом (1.30) $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot\psi\boldsymbol{e}_x = \dfrac{r_0}{r}\dot\varphi\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot\varphi\boldsymbol{e}_z$, поэтому согласно (1.14) получаем

$$\boldsymbol{\Omega}_{\delta 1} = \frac{r_0}{r}\,\delta\varphi\boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{\Omega}_{\delta 2} = \delta\varphi\boldsymbol{e}_z.$$

Тогда

$$A_\delta = \left(M_1\boldsymbol{e}_x, \frac{r_0}{r}\,\delta\varphi\boldsymbol{e}_x\right) + (M_2\boldsymbol{e}_z, \delta\varphi\boldsymbol{e}_z) = \left(M_1\frac{r_0}{r} + M_2\right)\delta\varphi = Q_\varphi\,\delta\varphi.$$

Отсюда $Q_\varphi = M_1 r_0/r + M_2$. Поскольку

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \left(J_1\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + J_2\right)\dot\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \left(J_1\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + J_2\right)\ddot\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0,$$

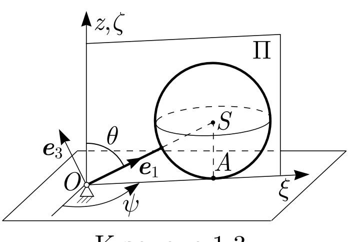
то уравнение Лагранжа имеет вид

$$\left(J_1\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + J_2\right)\ddot\varphi = M_1\frac{r_0}{r} + M_2.$$

По условию $\dot\varphi(0) = 0$. Интегрируя уравнение Лагранжа, получим

$$\varphi(t) = \frac{(M_1 r_0 + M_2 r)rt^2}{2(J_1 r_0^2 + J_2 r^2)} + \varphi_0, \qquad \varphi_0 = \varphi(0).$$

Задача 1.3. Твердое тело состоит из однородного шара массы m радиуса r и невесомого стержня длины $l-r$, одним концом жестко и ортогонально закрепленного на поверхности шара. Другой конец стержня закреплен с помощью сферического шарнира в точке O неподвижной горизонтальной плоскости. Тело катится без проскальзывания по этой плоскости. В шарнире действует момент вязкого трения $\boldsymbol{M} = -c\boldsymbol{\omega}$ $(c > 0)$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Система находится в поле силы тяжести. В начальный момент $t = 0$ величина угловой скорости тела равна ω_0. Найти закон движения тела.



К задаче 1.3.

Решение. Определим число степеней свободы системы. Точка O твердого тела неподвижна, поэтому положение любой точки тела однозначно задается ориентацией репера, жестко с ним связанного. Поскольку тело катится по неподвижной плоскости без проскальзывания, то скорость точки A тела, которой оно в данный момент касается плоскости, равна нулю. Таким образом, в каждый момент времени скорости двух точек O и A тела равны нулю. Поэтому OA является мгновенной осью вращения тела и его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль OA.

Свяжем подвижную систему координат $O\xi\eta z$ с вертикальной плоскостью П, в которой находится стержень. Эта система координат вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz. Пусть ψ — угол ее поворота. Направление отсчета угла ψ зададим так, чтобы угловая скорость подвижной системы координат равнялась $\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z$ ($\boldsymbol{e}_z$ — направляющий вектор оси Oz). Выберем оси подвижной системы координат, как показано на рисунке к задаче: ось Oz направлена вертикально вверх, ось $O\xi$ направлена по OA, ось $O\eta$ дополняет Oz и $O\xi$ до правой тройки. Угловая скорость тела имеет вид $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_\xi$ ($\boldsymbol{e}_\xi$ — направляющий вектор оси $O\xi$).

Угол θ между стержнем и осью Oz постоянен, поэтому в подвижной системе координат (относительная) скорость центра S шара равна нулю, а твердое тело вращается вокруг оси OS. Пусть φ — угол поворота тела в подвижной системе координат вокруг оси OS. Тогда относительная угловая скорость тела равна $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = \dot{\varphi}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\xi + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z)$. По теореме сложения угловых скоростей $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_\xi = \dot{\varphi}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\xi + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z) + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z,$$

откуда

$$\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = 0, \qquad \omega = \dot{\varphi}\sin\theta. \tag{1.31}$$

Поскольку $\cos\theta = r/l$, то углы ψ и φ связаны соотношением $r\varphi + l\psi = \text{const}$, где значение константы определяется только выбором начала отсчета каждого из углов. Значит, система голономна и имеет одну степень свободы. Примем угол ψ за обобщенную координату.

Кинетическую энергию тела с неподвижной точкой O найдем по формуле (Ф.2)

$$T = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2),$$

где J_1, J_2, J_3 — моменты инерции тела относительно его главных осей инерции $O\boldsymbol{e}_1$, $O\boldsymbol{e}_2$, $O\boldsymbol{e}_3$ в точке O; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции угловой скорости тела на эти оси. Используя свойства симметрии, введем главные оси инерции в точке O: ось $O\boldsymbol{e}_1$ направлена по стержню, ось $O\boldsymbol{e}_2$ совпадает с осью $O\eta$, ось $O\boldsymbol{e}_3$ лежит в плоскости П и дополняет $O\boldsymbol{e}_1$ и $O\boldsymbol{e}_2$

до правой тройки. По условию массой стержня можно пренебречь, поэтому по формуле Гюйгенса—Штейнера

$$J_1 = \frac{2mr^2}{5}, \qquad J_2 = J_3 = \frac{2mr^2}{5} + ml^2.$$

Так как $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_\xi = \omega(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_3)$, то

$$\omega_1 = \omega \sin\theta, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = -\omega\cos\theta.$$

Из (1.31) следует

$$\omega = -\dot\psi \operatorname{tg}\theta = -\frac{\dot\psi\sqrt{l^2 - r^2}}{r}. \tag{1.32}$$

Стало быть,

$$T = \frac{1}{2}(J_1\sin^2\theta + J_3\cos^2\theta)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2mr^2}{5} + ml^2\cos^2\theta\right)\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2mr^2}{5} + ml^2\frac{r^2}{l^2}\right)\frac{(l^2 - r^2)\dot\psi^2}{r^2} = \frac{7m(l^2 - r^2)}{10}\,\dot\psi^2.$$

Замечание. По условию массой стержня можно пренебречь, поэтому кинетическая энергия тела равна кинетической энергии шара. По формуле (Ф.4)

$$T = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}\left(J_1'{\omega_1'}^2 + J_2'{\omega_2'}^2 + J_3'{\omega_3'}^2\right), \tag{1.33}$$

где $\boldsymbol{v}_S$ — скорость центра шара; J_1', J_2', J_3' — моменты инерции шара относительно его главных центральных осей инерции $S\boldsymbol{e}_1'$, $S\boldsymbol{e}_2'$, $S\boldsymbol{e}_3'$; а $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ — проекции угловой скорости шара (тела) на эти оси. Точка S движется по окружности с центром на оси Oz и радиусом, равным OA. Угол ψ задает положение точки S на этой окружности. Значит, $\boldsymbol{v}_S^2 = (l^2 - r^2)\dot\psi^2$. Любая ось, проходящая через центр однородного шара, является его главной центральной осью инерции и $J_1' = J_2' = J_3' = 2mr^2/5$. Тогда (1.33) имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}J_1'\left({\omega_1'}^2 + {\omega_2'}^2 + {\omega_3'}^2\right) = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}\,J_1'\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,m(l^2 - r^2)\dot\psi^2 + \frac{1}{5}\,m(l^2 - r^2)\dot\psi^2 = \frac{7m(l^2 - r^2)}{10}\,\dot\psi^2. \qquad \blacksquare$$

Найдем обобщенную силу Q_ψ. В шарнире O действует момент вязкого трения $\boldsymbol{M} = -c\boldsymbol{\omega}$, действие поля силы тяжести эквивалентно действию силы $m\boldsymbol{g} = -mg\boldsymbol{e}_z$, приложенной к центру масс S тела. Элементарную работу сил на виртуальном перемещении тела вычислим, используя (1.26) и свойство аддитивности элементарной работы (см. стр. 20),

$$A_\delta = (-mg\boldsymbol{e}_z, \delta\boldsymbol{r}_S) + (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}_\delta).$$

Здесь $\delta\boldsymbol{r}_S$ — виртуальное перемещение точки S; $\boldsymbol{\Omega}_\delta$ — виртуальный поворот тела. Поскольку z-координата центра масс S тела не меняется, то $(-mg\boldsymbol{e}_z, \delta\boldsymbol{r}_S) = 0$. Так как $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{\dot\psi\sqrt{l^2-r^2}}{r}\,\boldsymbol{e}_\xi$, то согласно (1.14) получим $\boldsymbol{\Omega}_\delta = -\dfrac{\sqrt{l^2-r^2}}{r}\,\delta\psi\boldsymbol{e}_\xi$. Тогда

$$A_\delta = -\left(\boldsymbol{M}, \frac{\sqrt{l^2-r^2}}{r}\,\delta\psi\boldsymbol{e}_\xi\right) = -\frac{c(l^2-r^2)\dot\psi}{r^2}\,\delta\psi = Q_\psi\,\delta\psi,$$

откуда $Q_\psi = -\dfrac{c(l^2-r^2)\dot\psi}{r^2}$.

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{7m(l^2-r^2)}{5}\ddot\psi = -\frac{c(l^2-r^2)}{r^2}\dot\psi. \tag{1.34}$$

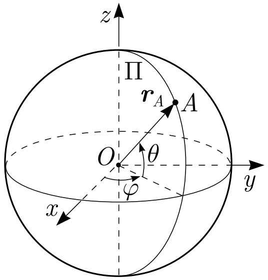
Интегрируя это уравнение, получаем

$$\psi(t) = C_1e^{-\lambda t} + C_2, \qquad \lambda = \frac{5c}{7mr^2},$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые начальными условиями. По условию при $t = 0$ модуль вектора угловой скорости тела равен ω_0, поэтому $\left|\dot\psi(0)\right| = \dfrac{r\omega_0}{\sqrt{l^2-r^2}}$ (см. (1.32)). Для определенности будем считать, что $\dot\psi(0) > 0$. Полагая $\psi(0) = 0$, находим

$$\psi(t) = \frac{7mr^3\omega_0}{5c\sqrt{l^2-r^2}}\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

При $c \neq 0$ имеем $\dot\psi(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dot\psi(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t) = \dfrac{7mr^3\omega_0}{5c\sqrt{l^2-r^2}}$. Значит, во все время движения угол ψ растет, стремясь к предельному значению. Если $c \to 0$, т. е. трение в шарнире мало́, то $\lim\limits_{c\to0}\psi(t) = \dfrac{r\omega_0 t}{\sqrt{l^2-r^2}}$. Эта предельная зависимость совпадает с решением уравнения (1.34) при $c = 0$.



К задаче 1.4.

Задача 1.4. Точка A массы m движется по неподвижной сфере радиуса r. На точку действует сила вязкого трения $\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{v}_A$ $(c > 0)$, пропорциональная скорости $\boldsymbol{v}_A$ точки. Используя сферические координаты, найти закон движения точки.

Решение. Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом O в центре сферы. Положение точки A на сфере зададим координатами φ, θ, где φ — угол между осью Ox и плоскостью П, проходящей через ось Oz и точку A, а θ — угол между радиус-вектором точки A и плоскостью Oxy. При $\theta = \pm\pi/2$ обобщенные координаты вырождены.