МАТЕМАТИКА

2016 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

ЗАДАЧА 12

С. А. Шестаков

ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

ЕГЭ 2016 МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧА 12 профильный уровень

ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.
ЕГЭ 2016. Математика. Производная и первообразная.
Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень).
Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
111 с.
ISBN 978-5-4439-2414-4

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2016. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2016 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2016.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Производная и первообразная. Исследование функций». Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги:
Шестаков С. А. ЕГЭ 2016. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0881-6

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-2414-4

Содержание

От редактора серии 3
Введение 4
§ 1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной 6
Диагностическая работа 6
Методические рекомендации 7
Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы . . 11
Тренировочная работа 1 12
Тренировочная работа 2 13
Тренировочная работа 3 14
Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 диагностической работы . 15
Тренировочная работа 4 16
Тренировочная работа 5 17
Тренировочная работа 6 18
Иррациональные функции. Решения задач 5 и 6 диагностической работы 20
Тренировочная работа 7 21
Тренировочная работа 8 22
Тренировочная работа 9 23
Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы . . 24
Тренировочная работа 10 25
Тренировочная работа 11 26
Тренировочная работа 12 28
Показательная функция. Решения задач 9 и 10 диагностической работы 30
Тренировочная работа 13 31
Тренировочная работа 14 32
Тренировочная работа 15 33
Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 диагностической работы 34
Тренировочная работа 16 35
Тренировочная работа 17 36
Тренировочная работа 18 37
Диагностическая работа 1 38
Диагностическая работа 2 40
Диагностическая работа 3 42
Диагностическая работа 4 44

Диагностическая работа 5 46
§ 2. Вычисление наибольших и наименьших значений функций без применения производной 48
Диагностическая работа 48
Методические рекомендации 49
Применение свойств функций. Решение задач 1—6 диагностической работы . . . 51
Монотонность и ограниченность 51
Замена переменной 53
Исследование множества значений функции 56
Тренировочная работа 1 58
Тренировочная работа 2 59
Применение стандартных неравенств. Решение задач 7—12 диагностической работы 60
Неравенство Коши для двух чисел 60
Неравенство $|a|+|b|\geqslant|a+b|$ 63
Неравенство $|a\sin t+b\cos t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ 64
Неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}+\vec{b}|$ 66
Неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ 68
Комбинирование приемов 71
Тренировочная работа 3 75
Тренировочная работа 4 76
Диагностическая работа 1 77
Диагностическая работа 2 78
§ 3. Первообразная 79
Диагностическая работа 79
Методические рекомендации 81
Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы . . 84
Тренировочная работа 1 85
Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 диагностической работы . 86
Тренировочная работа 2 87
Иррациональные функции. Решения задач 5 и 6 диагностической работы 89
Тренировочная работа 3 90
Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы . . 92
Тренировочная работа 4 93
Показательная функция. Решения задач 9 и 10 диагностической работы 95

Содержание

Тренировочная работа 5 96
Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 диагностической работы 97
Тренировочная работа 6 98
Диагностическая работа 1 100
Диагностическая работа 2 102
Ответы 104

Введение

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Производная и первообразная. Исследование функций» и, в частности, задачи 12 (профильного уровня) Единого государственного экзамена по математике.

Задача представляет собой традиционное для школьных учебников задание на вычисление первообразных или исследование функций: нахождение точек экстремума, экстремумов, наибольших и наименьших значений функций.

Для того чтобы подготовку к ЕГЭ сделать максимально эффективной, в пособие включены задания по указанным темам, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса:

- целые рациональные функции (многочлены),
- дробно-рациональные функции,
- иррациональные функции,
- тригонометрические функции,
- показательная функция,
- логарифмическая функция.

Здесь под иррациональными функциями понимаются функции, заданные формулой, в которой переменная находится под знаком корня n-й степени или имеет дробный показатель степени. Такое построение пособия позволит, с одной стороны, выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения задач базового уровня и несколько более сложных задач на вычисление производных и первообразных и исследование функций, а с другой — использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения. Кроме того, в пособие включен материал, связанный с вычислением наибольших и наименьших значений функций без применения производной, разбитый на два пункта: «Применение свойств функций» и «Применение стандартных неравенств». Материал второго пункта позволяет лучше подготовиться к решению задач 15, 17, 20 ЕГЭ по математике. Выпускники, для которых экзамен по математике в выбранных ими вузах не является профильным, могут пропустить этот пункт.

Пособие состоит из трех параграфов и включает 12 диагностических и 28 тренировочных работ, а также разбор задач начальной диагностической работы параграфа с необходимыми методическими рекомендациями. Диагностические работы состоят из 12 заданий (в параграфах 1 и 3 — по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса в соответствии с указанным выше порядком; в параграфе 2 задачи диагностических и тренировочных работ сгруппированы по методам решения). Тренировочные работы состоят из 10 задач для выработки или закрепления навыков решения по каждому типу заданий.

В начале работы с пособием целесообразно выполнить начальную диагностическую работу параграфа, определить, какие задачи вызывают затруднения, и обратиться при необходимости к разбору задач. После этого нужно потренироваться в решении задач каждого типа, выполнив тренировочные работы параграфа. Для завершения подготовки — сделать диагностические работы, размещенные в конце параграфа, постаравшись решить их без ошибок или с минимальным количеством ошибок. Желательно, чтобы время решения любой из диагностических и тренировочных работ не превышало одного часа.

Подчеркнем, что в пособии рассматриваются задания, в значительной части отвечающие по уровню сложности заданию 12 (профильного уровня) ЕГЭ по математике. Умение решать такие задачи является базовым: без него невозможно продвинуться в решении более сложных задач. Тем не менее, часть включенных в пособие задач несколько сложнее задачи 12 (профильного уровня) демоверсии: их решение позволит нарастить определенную «математическую мускулатуру» и чувствовать себя на экзамене застрахованным от неприятных неожиданностей.

При подготовке к решению задач Единого государственного экзамена с кратким ответом нужно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем, чтобы, например, 1 и 7, или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому если есть уверенность в задаче, за которую получен минус, нужно идти на апелляцию. Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. В этом смысле задание 14 не является исключением: если результатом вычислений явилась обыкновенная дробь, например, $\frac{3}{4}$, перед записью ответа в бланк ее нужно перевести в десятичную, т. е. в ответе написать 0,75. Каждый символ (в том числе запятая и знак «минус») записывается в отдельную клеточку, как это показано на полях пособия.

§ 1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной

Диагностическая работа

1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 27x \quad \text{на отрезке } [0;\, 4].$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x + \frac{9}{x} \quad \text{на отрезке } [-4;\, -1].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \quad \text{на отрезке } [1;\, 9].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4 \quad \text{на отрезке } \left[0;\, \frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x - 13)e^{x-12} \quad \text{на отрезке } [11;\, 13].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = x - 5\ln x.$$

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 5 - 7x + 7\ln(x + 3)$$
на отрезке $[-2{,}5;\, 0]$.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Методические рекомендации

Можно выделить следующие основные группы задач по теме, вынесенной в название параграфа:

• исследование функции на экстремумы;

• исследование функции на возрастание/убывание;

• исследование функции на наибольшие и наименьшие значения (в том числе на отрезке);

• исследование функции с помощью графика ее производной (чтение графика производной).

Разница между первыми тремя и последней группами задач заключается лишь в способе задания функции. В более традиционных для школьных учебников задачах (первые три группы задач) функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. Именно эти задачи и будут рассматриваться в пособии. В менее традиционных задачах, ставших очень популярными в последние годы (в том числе и благодаря ЕГЭ по математике), выводы о промежутках возрастания и убывания (т. е. промежутках монотонности), экстремумах функции, ее наименьших или наибольших значениях нужно сделать, исследуя заданный график производной этой функции.

Для успешного решения задач по теме необходимо уверенное владение навыками вычисления производных и решения неравенств. Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале (*достаточный признак возрастания функции*). *Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале* (*достаточный признак убывания функции*).

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; a)$, то x_0 — точка максимума функции f* (*упрощенная формулировка*: *если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*).

Признак минимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; a)$, то x_0 — точка минимума функции f* (*упрощенная формулировка*: *если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*).

Условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Хотя эта функция определена в точке $x=0$ и в этой точке производная $f'(x)=2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, иногда учащиеся называют, например, точку минимума функции $y=x^2+3$ не «точка 0», а «точка $(0;3)$», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется *минимумом* функции, а значение в точке максимума — *максимумом* функции.

Если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y=\operatorname{tg} x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает на всей области определения», «функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$». Если бы эти утверждения были верны, то из неравенства $2>1$ следовало бы, что $\operatorname{tg} 2>\operatorname{tg} 1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y=\frac{1}{x}$: вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $2>-3$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{2}<\frac{1}{-3}$, и, следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств. Впрочем, это совет скорее на будущее, на случай, если задача на исследование функций когда-нибудь попадет во вторую часть ЕГЭ по математике и будет требовать полного решения.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно наименьшим) значением функции на отрезке. Для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y=\operatorname{tg} x$ на интервале $(0;1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0)=x_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1\in(x_0;1)$ значение функции окажется больше, чем x_0, поскольку функция $y=\operatorname{tg} x$ является возрастающей.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ обычно обозначаются символами $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ соответственно.

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что если наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны числам m и M соответственно, то множеством значений функции на данном отрезке является отрезок $[m; M]$. Поэтому к решению задачи на отыскание множества значений функции, непрерывной на отрезке, также применим алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty; 1]$, на котором функция убывает, и $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак. Напротив, при исследовании функции $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y = x^3 - 3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5; 2]$ является вовсе не $y(1) = -2$ (значение в точке минимума), а $y(-5) = -110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точек максимума.

Для решения задачи 14 может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: *если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке*. Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке $(a; b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т. е. функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом. Например, пусть требуется найти наибольшее значение функции

$$y = 6\sqrt{2}\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$$

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

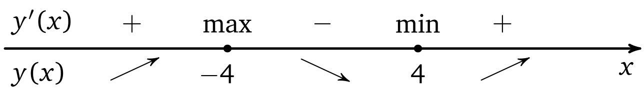
Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 48.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители:

$$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4).$$

В точке $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.



Ответ: -4.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдем производную функции

$$y = x^3 - 27x$$

и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$y' = 3x^2 - 27, \quad y' = 3(x-3)(x+3).$$

Производная меняет знак в точках $x = -3$ и $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только точка $x = 3$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x = 3$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Ответы:

T1.1

T1.2

T1.3

T1.4

T1.5

T1.6

T1.7

T1.8

T1.9

T1.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 1

T1.1. Найдите $f'(0)$, если

$$f(x) = 3x^4 - 15x^2 - 4x + 16.$$

T1.2. Найдите $f'(-1)$, если

$$f(x) = x^5 + x^7 + x^{12}.$$

T1.3. Найдите $f'(1)$, если

$$f(x) = x^3 x^4 x^7.$$

T1.4. Найдите $f'(4)$, если

$$f(x) = (x-5)^{14}.$$

T1.5. Найдите $f'(-3)$, если

$$f(x) = 3(x+4)^5.$$

T1.6. Найдите $f'(4)$, если

$$f(x) = (3x-11)^8.$$

T1.7. Найдите $f'(-5)$, если

$$f(x) = (x+4)^6 + (x+6)^4.$$

T1.8. Найдите $f'(-4)$, если

$$f(x) = (x-5)(x+5)^4.$$

T1.9. Найдите $y'(-4)$, если

$$y = (x+3)^7(x+7)^3.$$

T1.10. Найдите $f'(-3)$, если

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3).$$

Ответы:

Тренировочная работа 2

Т2.1. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Т2.2. Найдите точку максимума функции
$$y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3.$$

Т2.3. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x - 3.$$

Т2.4. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + x^2 - 8x - 7.$$

Т2.5. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 12.$$

Т2.6. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 8x^2 + 16x + 3.$$

Т2.7. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 + x^2 - 16x + 5.$$

Т2.8. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 4x^2 + 4x + 4.$$

Т2.9. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 8x + 8.$$

Т2.10. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2.$$

Т2.1

Т2.2

Т2.3

Т2.4

Т2.5

Т2.6

Т2.7

Т2.8

Т2.9

Т2.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,