М. М. Медынский

Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях

Книга 1: Числа

Москва
Эдитус 2014

УДК 51
ББК 22.1
М42

ISBN 978-5-00058-173-5

М.М.Медынский.
Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях. Книга 1: Числа.
- М.:Эдитус, 2015. - 552 с.

В книге изложены основные методы решения задач по разделу «Числа». Дан необходимый теоретический материал, приведены примеры с решениями, задания и упражнения для самостоятельной работы.

Книга адресована школьникам старших классов, абитуриентам, учителям, преподавателям подготовительных отделений вузов и всем, кто любит математику.

ISBN 978-5-00058-173-5

Моему учителю
Сергею Сергеевичу Яровому
посвящается

От автора

«Полный курс элементарной математики в задачах и упражнениях» состоит из одиннадцати книг:

1-я книга: Числа,
2-я книга: Числовые последовательности и прогрессии,
3-я книга: Тождественные преобразования выражений,
4-я книга: Функции и начала анализа,
5-я книга: Уравнения и системы уравнений,
6-я книга: Неравенства,
7-я книга: Тригонометрия,
8-я книга: Задачи с параметрами,
9-я книга: Комбинаторика и элементы теории вероятностей,
10-я книга: Планиметрия,
11-я книга: Стереометрия,

которые охватывают все разделы программы по математике для школ и классов с углубленным изучением математики.

Вместе с тем книги курса не являются учебниками по элементарной математике в классическом смысле.

Первое и главное отличие книг курса от учебников – это систематическое изложение *методов решения задач* школьного курса математики с разбором типовых (опорных) задач и анализом характерных ошибок, совершаемых при их решении. По сути – это учебное пособие по методам решения задач для средней школы, написанное на основе многолетнего опыта преподавания математики в период с 1993 по 2007 г.г. в классе углубленного изучения математики в средней школе №879 г. Москвы и в период с 2009 по 2012 г.г. в ННОУ «Интеграл».

Второе отличие состоит в следующем. В школьных учебниках, вследствие «постепенности» изучения материала в процессе взросления учащихся, изучаемый материал по многим разделам курса разбросан и рассматривается достаточно упрощенно. И хотя в последующих классах уровень изучения материала повышается, не всегда удается вернуться и углубить ранее выученные темы. Не случайно, например, задачи С6 Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по разделу «Арифметика» вызывают значительные трудности у выпускников школ. В предлагаемых книгах материал по каждому разделу школьного курса математики собран в одном месте и представлен достаточно полно, что позволит читателю увидеть его целиком.

Чем вызвана необходимость издания такого пособия? Каковы его цели?

Главная цель пособия - помочь тем, кто самостоятельно готовится к Единому Государственному Экзамену (ЕГЭ), конкурсным вступительным экзаменам и олимпиадам.

Решение любой математической задачи состоит из идейной и технической части. Идейная часть решения заключается в поиске ответа на вопрос, как решать задачу. Техническая часть представляет собой реализацию найденной идеи решения для получения правильного ответа.

Понятно, что именно отыскание идеи решения задачи вызывает значительные трудности, так как носит ярко выраженный творческий характер. Вместе с тем не секрет, что не всякий человек может в атмосфере экзамена, в условиях жесткого лимита времени и волнения, продемонстрировать все свои творческие способности. Поэтому лучше, если абитуриент, не рассчитывая на свои способности, все свои «экспромты» отработает заранее. И чем выше «математическая культура» по методам решения задач, тем больше шанс успешно справиться с барьером в виде ЕГЭ или конкурсного экзамена.

В чем отличие этого пособия от уже изданных пособий?

Главный недостаток всех существующих пособий по методам решения задач, по мнению автора, – неполнота изложения материала. Любая попытка «впихнуть» весь курс элементарной математики в одну книгу приводит к неизбежной «редакции» его содержания и исключению многих важных «мелочей», от которых зачастую зависит успех в решении задач.

Выход один: разбить весь курс на части по разделам и добиться наиболее полного изложения всех существующих методов и приемов решения задач.

Автор стремился сделать книги «Полного курса» полезными как начинающим самостоятельно изучать основы математики, так и учащимся, стремящемся выйти на уровень, необходимый для успешного участия в конкурсных экзаменах в ведущие вузы страны и математических олимпиадах разного уровня.

В этой связи изучение всех книг «Полного курса» должно создать у читателя прочный фундамент математической подготовки и существенно пополнить арсенал освоенных методов решения задач, что, по мнению автора, позволит успешно справиться с Единым Государственным Экзаменом, конкурсными экзаменами по математике в высшие учебные заведения и задачами различных олимпиад.

Предисловие

Настоящая книга является 1-й книгой «Числа» готовящегося к изданию «Полного курса элементарной математики в задачах и упражнениях».

Книга содержит все разделы школьного курса математики о числах и предназначена для тех, кто уже прошел курс элементарной математики в объеме программы 9-летней школы.

Очевидно, что изложение такого повторительного курса должно быть несколько иным, чем в учебниках и учебных пособиях, написанных для 9 - летней школы. Поэтому в начальных главах допускаются ссылки на последующие.

Теоретический материал изложен достаточно подробно, с целью обратить внимание учащихся на целый ряд «тонкостей»,

Основные символы, обозначения и условные обозначения, встречающиеся в пособии

▼ – окончание замечания

☼ – историческая вставка

$\boldsymbol{N}$ – натуральный ряд чисел

$\boldsymbol{N_0}$ – расширенный натуральный ряд чисел

Z – множество целых чисел

Q – множество рациональных чисел

R – множество действительных чисел

$=$ – знак «равно»

$<$ – знак «меньше»

$>$ – знак «больше»

$\geq$ – знак «больше или равно»

$\leq$ – знак «меньше или равно»

$+$ – знак сложения

$\times, \cdot$ – знаки умножения

$!$ – знак факториала

$-$ – знак вычитания

$:$, — , / – знаки деления

a^n – символ n –ой степени числа a

$\sqrt[n]{b}$ – символ извлечения корня n –ой степени числа b

$|a|$ – абсолютная величина (модуль) числа a

$A \Rightarrow B$ – из A следует B

$A \Leftrightarrow B$ – из A следует B и обратно – из B следует A

$\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0}$ - позиционная запись натурального числа

Глава 1. Натуральные числа

1.1. Понятие натуральных чисел

«*Бог создал натуральные числа, все остальное – дело рук человеческих*» - говорил Леопольд Кронекер в 1886 году на съезде математиков в Берлине.

Леопольд Кронекер (*Leopold Kronecker*, 1823 – 1891) - немецкий математик.

Иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук, член Берлинской АН, профессор университета в Берлине. Основные труды по алгебре и теории чисел. Был сторонником «арифметизации» математики, считая, что только арифметика целых чисел обладает подлинной реальностью. Защищая свои взгляды, высказывал ядовитые замечания в адрес математиков, не разделявших его идеи.

Умение считать и различать разные количества предметов – способность человека, данная ему Богом.

Считая звезды на небе: «одна звездочка и еще одна звездочка составляют две звездочки; две звездочки и еще одна звездочка составляют три звездочки; три и еще одна составляют четыре звездочки» и т.д., древний человек, прибавлял их по одной, называл последовательно каждое количество своим именем и, таким образом, определил два основных для *арифметики* (науке о числах) понятия – *понятие числа* и *операции увеличения на единицу.*

Числа - один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, одиннадцать, двенадцать, …, используемые при счете отдельных предметов или для обозначения номера предмета в ряду однородных предметов, называют **натуральными числами.**

Таким образом, *натуральные числа* решают две главные задачи: задачу *счета* ("вижу пять звездочек на небе") и задачу *упорядочивания* ("третья звездочка светит ярче остальных").

Определение 1.1. Все натуральные числа, располагающиеся в порядке их возрастания, называют **натуральным рядом чисел** (обозначают буквой ***N***).

Наименьшее число в этом ряду – число *один* (*единица*); наибольшего числа нет, потому что ко всякому числу, как бы велико оно ни было, можно добавить еще единицу и получить число еще большее. Значит, натуральный ряд можно продолжить без конца, и говорят, что *натуральный ряд бесконечен*.

Как записывают натуральные числа?

Любое натуральное число в десятичной позиционной системе счисления записывается символами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые называются «арабскими цифрами».

Замечание. Заметим, что символы 0, 1, 2, …. 9 называются «арабскими цифрами», хотя арабы передали в Европу индийскую десятичную систему счисления с ее цифрами. ▼

С помощью этих десяти цифр можно записать любое натуральное число. Например:

– символ 5789 означает, что рассматриваемое число содержит 5 тысяч, 7 сотен, 8 десятков и 9 единиц (5 – цифра тысяч, 7 – цифра сотен, 8 – цифра десятков, 9 – цифра единиц);

– символ 2070 означает, что число содержит 2 тысячи и 7 десятков, а сотни и единицы в этом числе отсутствуют.

Такой счет единицами, затем десятками, затем сотнями - десятками десятков, затем тысячами - десятками сотен и т.д. положен в основу **десятичной системы счисления.**

Цифра на первом месте справа – *цифра первого разряда* обозначает число *единиц*, цифра на втором месте справа – *цифра второго разряда* обозначает число *десятков*, цифра на третьем месте справа – *цифра третьего разряда* обозначает число *сотен*, цифра на четвертом месте справа – *цифра четвертого разряда* обозначает число *тысяч* и т.д.

Запись чисел, где позиция цифры определяет ее значение в числе, называется *позиционной*, а *десятичная позиционная система счисления*, возникшая уже в глубокой древности, является одним из наиболее значительных достижений человека в математике (раздел 1.10.).

Натуральные числа, записанные в таком виде удобно складывать и сравнивать между собой: *наибольшее число имеет наибольшую цифру старшего разряда.*

Например:

– число 35 больше числа 25, так как цифра его старшего разряда 3 (цифра десятков) больше 2 - цифры десятков числа 25;

– число 37948906 больше числа 37948899, так как цифры пяти старших разрядов совпадают, а шестая цифра первого числа – 9 (цифра сотен) больше соответствующей шестой цифры второго числа – 8 (какие при этом цифры меньших разрядов – неважно);

– число 101 больше числа 99, так как число 101 имеет три разряда (трехзначное число), а число 99 только два разряда (двузначное число).

Число 101 состоит из 10 десятков (сотни) и 1 единицы, тогда как число 99 состоит из 9 десятков и 9 единиц. (Заметим, что число разрядов можно уравнять, поставив 0 слева: 099, но так обычно числа не пишут).

Ноль (нуль) - не является натуральным числом и считается числом, предшествующим всем натуральным числам.

Замечание. Ноль (от лат. nullus – никакой) как число появился значительно позднее натуральных чисел. Ноль означает - «ничего», символ пустоты. Видимо человеку, не сразу пришла мысль, что отсутствие количества чего-либо – это тоже число! Даже великий Фибоначчи (Леонардо Пизанский) не осмелился рассматривать цифру 0 в качестве самостоятельного числа, как остальные цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При упоминании нуля, он употреблял слово «знак», тогда как остальные символы он называет числами.

Леонардо Пизанский (*Leonardo Pisano*, 1170 –1250) – первый крупный математик Средневековой Европы.

Более известен под прозвищем Фибоначчи (Fibonacci). Родился в городе Пиза (Италия). По арабским переводам изучил достижения античных и индийских математиков, а затем систематизировал их в своей «Книге абака», написанной в 1202 г. Именно по этой книге европейцы познакомились с арабскими цифрами и убедились в огромных преимуществах десятичной системы счисления при вычислениях. Здесь же он описал знаменитые «числа Фибоначчи».

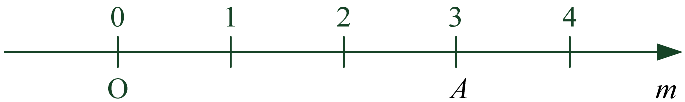
Однако, именно изобретение и признание числа «ноль» существенным образом изменило методы математических вычислений и обеспечило дальнейшее развитие математики как «царицы наук». ▼

<u>Определение 1.2.</u> Числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... называются **<u>целыми числами</u>**, а ряд натуральных чисел вместе с числом 0 – **<u>расширенным натуральным рядом</u>** (обозначают буквой $\boldsymbol{N_0}$).

1.2. Координатная (числовая) прямая. Сравнение натуральных чисел

Проведем прямую *m*, отметим на ней точку О (первая буква латинского слова Origo – «начало»), которую примем за *начало отсчета*, выберем *направление* (указывается стрелкой) и *единичный отрезок* – отрезок, длина которого равна 1.

Такую прямую называют <u>*координатной* (*числовой*) *прямой*.</u>



Каждому *натуральному числу* соответствует только одна точка прямой *m*.

Пусть, например, дано число 3. Отложив от точки О вправо выбранный единичный отрезок три раза, мы получим точку *A* на прямой *m*, соответствующую числу 3. Точно также можно поступить с любым натуральным числом.

Число, показывающее положение точки на координатной прямой, называют *координатой* этой точки.

Например: число 3 является *координатой* точки *A* и пишут *A*(3).

Точке О соответствует число 0, значит, точка О имеет координату 0.

Идея использования координатной (числовой) прямой для наглядного изображения чисел принадлежит великому Декарту.

Рене Декарт (*Rene Descartes*, 1596 – 1650) – выдающийся французский математик, философ, физик и физиолог. Декарт предложил геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел – ввел *координатную* (*числовую*) *прямую*. Как изобретатель Декартовой системы координат, которой пользуются все и в настоящее время, Декарт основал аналитическую геометрию - мост между алгеброй и геометрией, крайне важный для развития математического анализа. Выдающийся философ. Разработал метод познания, в котором главную роль в научном исследовании отводится разуму.

Изображение натуральных чисел точками координатной прямой позволяет легко *сравнивать числа между собой*.

Натуральное число *a* *меньше* натурального числа *b*, если точка на координатной оси, соответствующая числу *a*, лежит **левее** точки, соответствующей числу *b*. Этот факт символически записывают так: $a < b$.

Натуральное число *a* *больше* натурального числа *b*, если точка на координатной оси, соответствующая числу *a*, лежит **правее** точки, соответствующей числу *b*. Этот факт символически записывают так: $a > b$

Понятно, что число 0, соответствующее точке О, меньше любого натурального числа, поэтому число 0 предшествует всем натуральным числам.

Для любых двух натуральных чисел a и b справедливо одно и только одно утверждение: $a < b$, $a > b$ или $a = b$. Знак: = - знак равенства. Знаки: < (меньше чем) и > (больше чем) называются *знаками строгих неравенств.* Запись $a \le b$ (меньше или равно) означает, что верно одно из двух утверждений: либо $a < b$, либо $a = b$, а запись $a \ge b$ (больше или равно) означает, что верно одно из двух утверждений: либо $a > b$, либо $a = b$. Такие неравенства называют *нестрогими неравенствами.*

1.2.1. Задачи на понятие натурального числа

1.1. Напишите наименьшее пятнадцатизначное число, в котором есть все цифры.

Р е ш е н и е. Наименьшее число имеет наименьшую цифру старшего разряда. Поэтому первой цифрой искомого числа является цифра 1, а последней цифрой – цифра 9.

Далее справа налево (по убывающей): цифрой 2 -го разряда (разряда десятков) является цифра 8, цифрой 3 - го разряда (разряда сотен) – цифра 7, цифрой 4 - го разряда (разряда тысяч) – цифра 6, и т.д. до 8 - го разряда, цифрой которого является цифра 2. Оставшиеся шесть разрядов занимаем цифрой 0.

В результате получаем искомое наименьшее пятнадцати - значное число, в котором есть все цифры: 100000023456789.

О т в е т: 100000023456789.

1.2. Найди закономерность и запиши следующие два числа в ряду чисел: 83056, 83156, 83256, ...

Р е ш е н и е. Данный ряд чисел обладает следующей законно-мерностью: цифра сотен каждого следующего числа на единицу больше цифры сотен предыдущего числа ряда. Поэтому следующими двумя числами ряда являются числа: 83356 и 83456.

О т в е т: 83356; 83456.

1.3. Сколько раз цифра 7 встречается в числах между 1 и 100?
(A) 10 (B) 11 (C) 18 (D) 19 (E) 20

Р е ш е н и е. Цифра 7 встретится в числах между 1 и 100 десять раз на месте, определяющем единицы: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97, и десять раз на месте, определяющем десятки: 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79.

Откуда заключаем, что цифра 7 встречается 20 раз в числах между 1 и 100. Правильный ответ – (E).
О т в е т: (E).

1.4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 7 и 1 при условии, что в записи числа не должно быть одинаковых цифр? (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Р е ш е н и е. Если на месте числа сотен будет цифра 3, то меняя цифры 1 и 7 местами, получим два трехзначных числа: 317 и 371.

Аналогично, если на месте числа сотен будет цифра 7, то получим еще два числа: 713, 731.

И, наконец, если на месте числа сотен будет цифра 1, то получим еще два числа: 137 и 173.

Во всех числах нет одинаковых цифр. Значит, из этих цифр можно составить 6 трехзначных чисел. Правильный ответ – (D).
О т в е т: (D).

1.5. Девочка заменила в своем имени каждую букву ее номером в русском алфавите и получила число 10181. Как ее зовут?

Р е ш е н и е. Цифра 0 и число 101 не могут быть номером буквы в алфавите. Поэтому первая буква имени имеет номер 10 – буква И. Остальные буквы составляют блок 181, который можно представить двумя способами: 1 – 8 – 1, 18 – 1 (вариант 1 – 81 не подходит, так как в русском алфавите 33 буквы), что соответствует сочетаниям букв АЖА и РА.

Таким образом, получаем следующие варианты имени девочки: ИАЖА и ИРА. Очевидно, что имя девочки – ИРА.

О т в е т: ИРА.

1.6. Какое наименьшее количество цифр нужно написать под - ряд, чтобы вычеркиванием некоторых цифр можно было получить любое трехзначное натуральное число от 100 до 999?

Р е ш е н и е. Среди трехзначных натуральных чисел от 100 до 999 есть числа, состоящие из трех одинаковых цифр: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999. Поэтому каждая из цифр от 1 до 9 должна быть написана минимум три раза.

Так как среди чисел от 100 до 999 есть одно число с двумя нулями - число 100, то цифра 0 должна быть написана минимум два раза. Следовательно, должно быть написано минимум 29 цифр.

Например, последовательность цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, очевидно, удовлетворяет условию задачи.

О т в е т: 29 цифр.

1.7. Подряд написали числа 1, 2, 3, …, 2012, 2013. Каких цифр при записи этих чисел было использовано больше – единиц или двоек? На сколько?

Р е ш е н и е. Рассмотрим все возможные комбинации из трех цифр: 000, 001, 002, 003, 004, 005, 006, 007, 008, 009, 010, 011, 012, …, 997, 998, 999.

Очевидно, все цифры встречаются в этих комбинациях одинаковое число раз, в том числе единица и двойка. Откуда заключаем, что в числах 1, 2, 3, …, 998, 999, количество единиц и двоек одинаковое.

В четырехзначных числах от 1000 до 1999 единицу использовали на 1000 раз больше, чем любую другую цифру, так как при зачеркивании первой единицы в записи этих чисел получим все возможные комбинации из трех цифр, рассмотренные выше.

В оставшихся числах 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2012, 2013 использовано еще четыре единицы и пятнадцать двоек. Следовательно, всего единиц использовали больше на 989 штук.

О т в е т: единиц больше на 989 штук.

1.8. Сравните числа:
а) 5806 □ 5780; б) 750023 □ 99998; в) 37948897 □ 37948906

Р е ш е н и е.

Наибольшее число имеет наибольшую цифру старшего разряда.

а) 5806 > 5780, так как цифры четвертого разряда одинаковые, а цифра третьего разряда первого числа больше цифры третьего разряда второго числа (8 > 7).

б) 750023 > 99998, так как цифра шестого разряда первого числа равна 7, а цифра шестого разряда второго числа равна 0.

в) 37948897 < 37948906, так как цифры разрядов с восьмого по четвертый совпадают, а цифра 8 - цифра третьего разряда первого числа, меньше цифры 9 - цифры третьего разряда второго числа.

О т в е т: а) 5806 > 5780; б) 750023 > 99998; в) 37948897 < 37948906.

1.9. Если в каждом из ниже представленных чисел последнюю и первую цифру поменять местами, то какое в результате число будет наибольшим?

(A) 2534 (B) 4235 (C) 5243 (D) 4352 (E) 2345

Р е ш е н и е. Число с наибольшей последней цифрой станет наибольшим числом после перестановки с первой цифрой.

Поэтому числа вариантов (A), (C) и (D) могут быть сразу отброшены, так как имеют последнюю цифру меньше 5. В оставшихся числах вариантов (B) и (E) будет большим то, которое имеет большее число сотен, т.е. число варианта (E) (вариант (E) дает число 5342, а вариант (C) число 5234).

О т в е т: (E).

1.10. Из десятизначного числа 2946835107 вычеркнули 5 цифр. Какое наибольшее число могло в результате этого получиться?

Р е ш е н и е. Вычеркивать цифры надо так, чтобы в начале числа оставались большие цифры. В результате вычеркивания останется некоторое пятизначное число.

Если в числе 2946835107 не вычеркивать первую цифру, то полученное пятизначное число будет начинаться с двойки и, следовательно, будет меньше, чем 9хххх. Таким образом, первую цифру надо вычеркнуть. Цифру 9 нужно оставить, иначе в пятизначном числе первая цифра будет меньше, чем 9.

Подобным образом продолжаем анализ: чтобы вторая цифра пятизначного числа была максимально возможной, нужно вычеркнуть цифры 4 и 6, а цифру 8 - оставить.

Далее, нужно вычеркнуть цифру 3 (если ее оставить, пятизначное число будет иметь вид 983хх, т.е. будет меньше, чем число 985хх).

Остается вычеркнуть еще одну цифру в шестизначном числе 985107, и легкая проверка показывает, что выгоднее всего вычеркнуть ноль.

О т в е т: 98517.

1.11. Все целые числа от 1 до 100 выписаны подряд. Вычеркнуть из образовавшегося числа 100 цифр так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим.

Р е ш е н и е. Вычеркивать цифры надо так, чтобы в начале числа осталось максимально возможное число девяток.

Первые восемь цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 вычеркиваем, цифру 9 – оставляем. Далее идут двузначные числа 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Вычеркиваем $1 + 9 \cdot 2 = 19$ цифр до цифры 9, цифру 9 – оставляем.

Далее аналогично: вычеркиваем по 19 цифр, до каждой следующей девятки, еще 4 раза. Итого будет вычеркнуто $8 + 19 \cdot 4 = 84$ цифры. В начале полученного числа будет 5 девяток.

Осталось вычеркнуть еще 16 цифр. Вычеркиваем их так, начиная с числа 50, чтобы после последней девятки оказалась наибольшая возможная цифра.

Цифру 8 получить не удается. Вычеркиваем 15 цифр до цифры 7 и затем еще одну цифру 5, чтобы получить далее цифру 8.

Искомое число – 99999785960616263…9899100.

О т в е т: 99999785960616263…979899100.

1.12. (*Задача шутка*)
В XX столетии был такой год, что если его записать цифрами на листе бумаги, а затем этот лист перевернуть вверх ногами – то число на бумаге покажет тот же самый год. Какой это год?

Р е ш е н и е. Начертание арабских цифр таково, что цифры 6 и 9 при переворачивании листа бумаги переходят одна в другую, а цифра 1 не меняется. Так как искомый год был в XX столетии, то это очевидно 1961 год.
О т в е т: 1961.

<u>Упражнения.</u>

1. Какое число последующее для числа 6990999?
2. Какое число предыдущее для числа 3001000?
3. Запишите наибольшее семизначное число и наименьшее десятизначное число. Какие числа им предшествуют? Какие числа за ними следуют?
4. Найдите наименьшее трехзначное натуральное число, которое записывается различными цифрами.
5. Напишите наименьшее десятизначное число, не используя одинаковых цифр.
6. Сравните числа 32624 и 9316.
7. Сравните числа 5812 и 6812.
8. Сравните числа 86000 и 85099.
9. Сравните числа 777 и 7000.
10. Сравните числа 3324 и 3243.
11. Сравните числа 932758 и 932785.
12. Найдите все трехзначные числа, которые можно записать цифрами 1 и 2.
13. Сколько всего можно составить четырехзначных чисел из цифр 0 и 5, при условии, что цифры могут повторяться? Запишите эти числа.
14. Напишите все трехзначные числа, в которых каждая следующая цифра на один больше предыдущей.
15. Напишите наименьшее и наибольшее натуральное число, составленное из цифр 7, 9, 1, 3, 0.
16. Напишите наименьшее двенадцатизначное число, в котором есть все цифры.

17. Если в каждом из ниже представленных чисел последнюю и первую цифру поменять местами, то какое в результате число будет наибольшим?

(A) 3645 (B) 3456 (C) 6354 (D) 5463 (E) 5346

18. Сколько раз цифра 6 встречается в числах между 1 и 99?

(A) 20 (B) 18 (C) 11 (D) 19 (E) 10

19. Сколько раз цифра 0 встречается в числах между 1 и 100?

(A) 10 (B) 11 (C) 18 (D) 19 (E) 20

20. Записано 99 чисел: 1, 2, 3, …, 98, 99. Сколько раз в записи встречается цифра 5?

21. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 5 и 1 при условии, что в записи числа не должно быть одинаковых цифр?

22. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 7, 0 и 1 при условии, что в записи числа не должно быть одинаковых цифр?

23. Какое наименьшее количество цифр нужно написать подряд, чтобы вычеркиванием некоторых цифр можно было получить любое двухзначное натуральное число от 10 до 99?

24. Подряд написали числа 1, 2, 3, …, 2012, 2013. Каких цифр при записи этих чисел было использовано больше – единиц или девяток? На сколько?

25. Сколько имеется двузначных чисел, у которых: а) цифра десятков меньше цифры единиц? б) цифра десятков больше цифры единиц?

26. Вычеркните в числе 3005027 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

27. В числе 3728954106 убрать три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили бы наименьшее семизначное число.

28. Из числа 1234567891011121314 15…5657585960 вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число стало: а) наименьшим; б) наибольшим.

1.3. Действия с натуральными числами

Нахождение по нескольким данным числам одного нового числа называется *арифметическим действием* (для краткости – просто *действием*).

Для натуральных чисел определены следующие *действия*:

сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня.

1.3.1. Сложение

Сложение является *первичным неопределяемым понятием*, для которого невозможно дать строгое формальное определение.

Можно сказать, что *сложение* – это действие, состоящее в том, что для несколько данных чисел, называемых *слагаемыми*, определяют одно число, называемое *суммой*, содержащее в себе столько единиц, сколько их имеется в данных числах вместе.

Для обозначения действия сложения используется знак: + (читается: «плюс»). В частности, сумму двух чисел a и b обозначают $a + b$.

Числа a и b, разделенные знаком плюс, называются *членами* суммы.

Например: 11 + 6 = 17. Здесь 11 и 6 – слагаемые и члены суммы, 17 – сумма.

Сложение натуральных чисел *всегда возможно* и *однозначно*, т.е. какие бы натуральные числа не складывали, всегда можно найти их сумму, и эта сумма единственна.

Замечание. Заметим, что число 0 указывает на отсутствие единиц, поэтому сложение любого числа с нулем дает это самое число. Например, 5 + 0 = 5 (если к числу 5 ничего не прибавить, то останется 5). ▼

Гениальное творение человека – *десятичная позиционная система* записи чисел, позволяет складывать натуральные числа по всем известному *правилу сложения «в столбик».*

Например. Пусть требуется найти сумму двух чисел:10795 и 1708. Чтобы не смешать между собой единицы различных разрядов, напишем данные числа одно под другим поразрядно, и под последним слагаемым проведем черту:

$$\begin{array}{r} 10795 \\ +\underline{1708} \\ 12503 \end{array}$$

Сложив единицы, получим 13, т.е. 1 десяток и 3 единицы; 1 десяток запомним, чтобы сложить с десятками данных чисел, а 3 единицы запишем под чертой, под единицами слагаемых. Сложив десятки (не забыв десяток, который получили от сложения единиц), получим 10 десятков, т.е. ровно одну сотню. Эту сотню запомним, чтобы ее прибавить к сотням данных чисел, а под чертой пишем нуль на месте десятков. Сложив сотни (не забыв сотню, которую получили от сложения десятков), получим 15 сотен, т.е. 1 тысячу и 5 сотен; 1 тысячу запомним, чтобы сложить с числом тысяч данных чисел, а 5 сотен запишем под чертой, под единицами сотен и т.д.

1.3.2. Задачи на сложение

1.13. Если $0 < A < 6$, $0 < B < 6$ и $AB + BA = 66$, то сколько различных значений цифры A возможно?

(A) два (B) три (C) четыре (D) пять (E) шесть

Р е ш е н и е. Так как A и B – цифры числа, $0 < A < 6$, $0 < B < 6$ и $AB + BA = 66$, то $A + B = 6$.

Рассмотрим все возможные варианты:

1) $A = 1, B = 5$; 2) $A = 2, B = 4$; 3) $A = 3, B = 3$;
4) $A = 4, B = 2$; 5) $A = 5, B = 1$.

Откуда заключаем, что возможно 5 значений A.

О т в е т: (D).

1.14. В ряду натуральных чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... следующее число равно: (A) 18 (B) 21 (C) 13 (D) 9 (E) 20

Р е ш е н и е. Заметим, что третье число ряда содержит столько единиц, сколько второе и третье числа вместе (равно *сумме* двух первых чисел), четвертое число ряда содержит столько единиц, сколько второе и третье вместе (равно *сумме* второго и третьего чисел ряда), пятое – сколько третье и четвертое вместе (*сумме* третьего и четвертого числа) и т.д. Значит, восьмое число ряда будет содержать столько единиц, сколько шестое и седьмое числа вместе (равно *сумме* шестого и седьмого чисел ряда), т.е. следующее восьмое число равно 21.

Правильный ответ – (B)

О т в е т: (B).

Замечание. Заметим, что числа такого ряда натуральных чисел называются *числами Фибоначчи*. ▼

1.15. Все двузначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно за другим так, что каждое следующее начинается с той же цифры, которой оканчивается предыдущее. Получается некоторое многозначное число. Из всех многозначных чисел, которые можно получить таким образом, выбирают наименьшее и наибольшее. Найти их сумму.

Р е ш е н и е. Наименьшее число, полученное указанным способом, имеет наименьшие цифры в старших разрядах и имеет вид: $1112211331\ldots1992222332\ldots2993333443\ldots3994444556\ldots899991$.

Всего двузначных чисел, не оканчивающихся нулем, 81.

Действительно, всего двузначных чисел 90, из которых 9 оканчивается нулем (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90).

Следовательно, полученное многозначное число состоит из 162 цифр.

Наибольшее число, полученное указанным способом, имеет наибольшие цифры в старших разрядах и имеет вид:

$$99988997\ldots91188887\ldots81177776\ldots71166665\ldots3112222111\,19.$$

Полученное многозначное число тоже состоит из 162 цифр.

При сложении данных чисел получаем число, состоящее из 162 единиц и одного нуля: $\underbrace{111\ldots1}_{162}0$.

О т в е т: $\underbrace{111\ldots1}_{162}0$.

1.16. Расставить знаки «плюс» между семью числами 1 2 3 4 5 6 7 так, чтобы в сумме получилось 100 (расположение цифр изменять не разрешается).

Р е ш е н и е. Если поставить знак «плюс» между всеми числами, то в сумме получим число 28. Самое большое (из возможных) двузначное число 67 в сумме с остальными однозначными числами дает число 82.

Откуда заключаем, что двузначных чисел в сумме должно быть не меньше двух.

Однако сумма трех наименьших двузначных чисел, составленных из чисел в порядке их следования, дает число $12 + 34 + 56 = 102$.

Следовательно, в искомой сумме должно быть два двузначных числа.

Рассмотрим вариант, когда сумма двух двузначных чисел равна 90, а оставшиеся три числа дают в сумме 10.

В этом случае получаем два решения: $1+2+34+56+7 = 100$ или $1+23+4+5+67=100$.

О т в е т: $1+2+34+56+7 = 100$ или $1+23+4+5+67=100$.

Самыми распространенными задачами на понятие действия сложения натуральных чисел являются так называемые *числовые ребусы*.

<u>Числовым ребусом</u> называют задачу, в которой требуется определить все или некоторые цифры заданного арифметического равенства, обозначенные символами (буквами, звездочками, квадратами, треугольниками и т.п.), и тем самым расшифровать числовую запись равенства.

При этом звездочки и геометрические фигуры обозначают, как правило, любые цифры, а одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры.

Рассмотрим несколько задач на *числовые ребусы*, содержащих *операцию сложения.*

1.17. В задаче на сложение, показанной ниже, знак □ означает какую-то одну цифру. Какая цифра должна стоять на месте этих знаков, чтобы ответ был правильным?

$$
\begin{array}{r}
\square 6 \square 1 \\
+\ 8 \square 6 \square \\
\underline{\square 8 \square 9} \\
17\,95\square
\end{array}
$$

Р е ш е н и е. Задачу можно решить простым перебором ответов и проверкой. Вместе с тем решение можно упростить, если заметить, что цифры 3, 5, 6 и 7 не могут удовлетворять условию задачи.

Действительно, в разряд тысяч из разряда сотен может перейти только либо 1, либо 2, но тогда при цифрах 3, 5, 6 и 7 в разряде тысяч мы не можем получить цифру 7. И только при цифре 4 равенство будет верным.

О т в е т: 4.

1.18. Если все буквы в сумме, представленной ниже, являются различными цифрами, то какой из следующих ответов не может быть значением A?

$$
\begin{array}{r}
AB \\
+\ \underline{BA} \\
CDC
\end{array}
$$

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Р е ш е н и е. Дано: A, B, C и D – разные цифры. Наибольшее возможное значение двузначного числа $AB = 98$. Но тогда наибольшее возможное значение суммы: $98 + 89 = 187$. Откуда заключаем, что единственное возможное значение $C = 1$.

При $C = 1$ условие задачи принимает вид:

$$
\begin{array}{r}
AB \\
+\ \underline{BA} \\
1D1
\end{array}
$$

Откуда заключаем, что сумма $A + B$ должна заканчиваться цифрой 1. Так как $A \neq 0$, $B \neq 0$, и $A \leq 9$, $B \leq 9$, то $B + A = 11$. Но тогда $D = 2$, так как в разряд десятков перейдет 1 из разряда единиц. По условию A, B, C, D – различные цифры, поэтому A не может быть равно 2.

О т в е т: (E).

ОГЛАВЛЕНИЕ