

В.Б. ТОПИЛЬСКИЙ

Схемотехника аналого-цифровых преобразователей



ТЕХНОСФЕРА



М И Р э л е к т р о н и к и

В.Б. Топильский

Схемотехника
аналого-цифровых
преобразователей

ТЕХНОСФЕРА

Москва

2014

УДК 681.518.3

ББК 32.965

T58

T58 Топильский В.Б.

Схемотехника аналого-цифровых преобразователей. Учебное издание

Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2014. – 288 с., ISBN 978-5-94836-383-7

В учебном пособии, состоящем из двух частей, рассматриваются схемотехника аналого-цифровых преобразователей электрических величин для систем сбора данных и схемотехника аналого-цифровых преобразователей перемещений (преобразователи линейных и угловых перемещений, построенные на различных физических принципах) для информационно-управляющих систем.

Пособие может быть рекомендовано при изучении смежных дисциплин в области промышленной автоматизации, робототехники, приборостроения, электротехники и радиоэлектроники. Книга может быть полезна не только студентам и аспирантам, но и специалистам, так как она соответствует современному уровню развития техники.

УДК 681.518.3

ББК 32.965

© 2014, Топильский В.Б.

© 2014, ЗАО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», оригинал-макет, оформление

ISBN 978-5-94836-383-7

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
Список основных сокращений	9
Введение	13
ЧАСТЬ 1. СХЕМОТЕХНИКА АЦП ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН	15
Глава 1. Общие сведения об интегральных АЦП	16
1.1. Архитектура систем сбора данных (ССД).	16
1.2. Процессы дискретизации функций	18
1.2.1. Квантование во времени	18
1.2.2. Квантование по уровню.	26
1.2.3. Полная статическая погрешность АЦП	29
1.3. Основные характеристики ЦАП/АЦП.	32
1.3.1. Статические параметры ЦАП/АЦП	32
1.3.2. Динамические параметры ЦАП/АЦП	35
Глава 2. Цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП)	39
2.1. Параллельный ЦАП с матрицей весовых резисторов	39
2.2. Параллельный ЦАП на матрице $R-2R$	41
2.3. Параллельные ЦАП с токовыми ключами	45
2.4. Сегментированные резистивные ЦАП и цифровые потенциометры	47
2.5. ЦАП на коммутируемых конденсаторах	52
2.6. Биполярные ЦАП	55
Глава 3. Аналого-цифровые преобразователи (АЦП)	59
3.1. Классификация АЦП	59
3.2. Быстродействующие АЦП	61
3.2.1. Параллельные АЦП.	61
3.2.2. Последовательно-параллельные и конвейерные АЦП.	63
3.3. Неинтегрирующие АЦП уравнивания	68
3.3.1. АЦП развертывающего уравнивания	69
3.3.2. АЦП следящего уравнивания	71
3.3.3. АЦП поразрядного уравнивания	73
3.3.4. Оценка характеристик АЦП уравнивания	76
3.4. Интегрирующие АЦП.	78
3.4.1. АЦП двухтактного интегрирования	78
3.4.2. АЦП с промежуточным преобразованием в частоту (АЦП-ППЧ)	83
3.4.3. Сигма-дельта АЦП	91

Глава 4. Функциональные устройства ЦАП/АЦП	101
4.1. Источники опорных напряжений	101
4.1.1. Стабилитронные ИОН	101
4.1.2. Источники опорного напряжения на биполярных транзисторах (bandgap)	107
4.1.3. Источники опорного напряжения на униполярных транзисторах (ИОН типа ХФЕТ)	110
4.2. Аналоговые устройства выборки и хранения	112
Литература к части 1	119
Приложения к части 1	120
Приложение 1.1. Однокристалльные ССД	120
Приложение 1.2. Цифровые потенциометры	121
Приложение 1.3. Интегральные ЦАП	122
Приложение 1.4. Интегральные ПНЧ	124
Приложение 1.5. Интегральные АЦП	125
Приложение 1.6. Интегральные источники опорного напряжения	126
ЧАСТЬ 2. АНАЛОГО-ЦИФРОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (АЦПП)	127
Глава 5. Общие сведения о АЦПП	128
Глава 6. Накапливающие АЦПП (накапливающие энкодеры)	132
6.1. Накапливающие АЦПП на основе квантованных шкал	132
6.2. Псевдоабсолютные АЦПП	136
6.3. Лазерные интерферометры	140
Глава 7. Кодовые АЦПП	142
7.1. Двоичные кодовые шкалы	142
7.2. АЦПП с двоично-сдвинутыми кодами	144
7.3. АЦПП с однопереходными кодами	147
7.4. Рекурсивные кодовые шкалы АЦПУ	152
Глава 8. АЦП линейных перемещений.	156
8.1. АЦП с датчиками линейных перемещений	156
8.1.1. Потенциометрические АЦПП	156
8.1.2. АЦПП на дифференциальных трансформаторах (LVDT)	157
8.1.3. Емкостные шупы	159
8.2. Радарные датчики	165
8.2.1. Лазерные дальномеры	165
8.2.2. Ультразвуковые дальномеры	168

Глава 9. АЦПП на координатно-чувствительных фотоприемниках (КЧФП) . . .	176
9.1. АЦПП на аналоговом КЧФП	176
9.2. АЦПП на цифровых КЧФП	178
Глава 10. Магнитные АЦПП	187
10.1. АЦПП на датчиках Холла	187
10.2. Магниторезистивные АЦПУ	192
10.3. Магнитострикционные АЦПП	197
Глава 11. Лазерные и волоконно-оптические АЦПУ	201
Глава 12. АЦПП на фазовращателях	206
12.1. Фазовращатели гониометрического типа	206
12.1.1. Фазовращатель на сельсине	207
12.1.2. Емкостной фазовращатель	208
12.1.3. Фотоэлектрический однооборотный фазовращатель	209
12.2. Фазовращатели на вращающихся трансформаторах	211
12.2.1. Схема фазовращателя на вращающемся трансформаторе в режиме вращающегося поля	212
12.2.2. Схема фазовращателя на вращающемся трансформаторе в режиме пульсирующего поля	216
12.3. Формирование кода на выходе фазовращателя	217
12.3.1. Прямые методы преобразования «фаза-код»	217
12.3.2. Следящие методы формирования кода фазовращателей	222
12.3.3. Компенсационные методы формирования кода ФВ	224
12.3.4. Экстраполятор	229
Глава 13. Амплитудные АЦПП	234
13.1. Тригонометрические АЦПП	234
13.1.1. АЦПУ амплитудного типа на ВТ	234
13.1.2. Амплитудные АЦПУ на базе фотоэлектрических растровых интерполяторов (ФРИ)	236
13.2. Потенциометрические АЦПП	238
Глава 14. АЦПП с электрической редукицией	245
14.1. Структура многоотсчетных АЦПП	245
14.1.1. Структура параметрического АЦПУ с вращающимся модулятором	246
14.2. Многополюсные ВТ и редуктосины	249
14.3. Индуктосин	251
14.4. Растровые фотоэлектрические АЦПП	255
14.5. Согласование отсчетов в многоотсчетных АЦПП	263
Литература к части 2	268

Приложения к части 2	269
Приложение 2.1. Реперные последовательности различного типа.	269
Приложение 2.2. Зарубежные индуктивные АЦПП на основе LVDT	270
Приложение 2.3. Отечественные фотоэлектрические АЦПУ.	271
Приложение 2.4. Емкостные измерительные щупы плунжерного типа	272
Приложение 2.5. Параметры отечественных ВТ.	273
Приложение 2.6. Отечественные маломощные ППЛ с непрерывным режимом генерации при $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$	274
Приложение 2.7. Зарубежные ультразвуковые датчики для измерения расстояний.	276
Приложение 2.8. Характеристики отечественных ФПЗС	277
Приложение 2.9. Характеристики отечественных монолитных датчиков Холла.	278
Приложение 2.10. Зарубежные магниторезистивные датчики фирм Murata, Honeywell.	280
Заключение	281
Предметный указатель	284
Об авторе	287

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из основных направлений развития науки и техники является создание и повсеместное внедрение информационно-измерительных (ИИС) и информационно-управляющих (ИУС) систем. Неотъемлемой частью таких систем является многоканальные системы сбора данных (ССД) от сенсоров физических величин и от датчиков механических перемещений

Интегрирование аналоговой и цифровой частей ССД на одном кристалле привело к созданию аналогово-цифровых микропроцессоров, содержащих встроенные ЦАП, АЦП электрических величин и некоторые дополнительные аналоговые функциональные устройства.

Хотя в последние несколько лет изданы или переизданы хорошие книги в области схемотехники АЦП (например, переиздана фундаментальная монография У. Титце, К. Шенк «Полупроводниковая схемотехника»), но они столь объемны и малодоступны, что не могут быть рекомендованы в качестве учебного пособия.

Для правильного применения микросхем ЦАП, АЦП необходимо знать их внутреннее устройство и возможности, которые рассмотрены в части 1 пособия.

В то же время в последние годы, насколько известно автору, книги в области аналого-цифровых преобразователей перемещений (АЦПП) не издавались, а существующие несколько устарели и не отражают современный уровень развития техники, в том числе связанный с применением в АЦПП интегральных АЦП электрических величин. Вопросы, связанные с АЦПП, рассмотрены в части 2 пособия.

Учебное пособие «Схемотехника АЦП» написано по материалам аналогичных курсов, читаемых автором на старших курсах факультета «Микроприборов и технической кибернетики» МИЭТ и наряду с другими книгами автора (см. список литературы к части 1) призвано изложить основные вопросы схемотехники интегральных ССД и АЦПП в компактной и доступной форме и восполнить указанный недостаток. Этот курс является завершающим в ряду специальных инженерных дисциплин.

Предполагается, что читатели владеют институтскими курсами по электротехнике, физике, метрологии, микроэлектронике, радиоэлектронике, конструированию радиоэлектронной аппаратуры.

Особое внимание в пособии уделено инженерным подходам, используемым при анализе ЦАП/АЦП и АЦПП. По этой причине пособие снабжено большим количеством числовых примеров с инженерным уровнем детализации расчетов.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность своему коллеге доценту К.К. Недопекину за ряд предоставленных материалов и обсуждение разделов пособия. Чтобы не перегружать список литературы, автор оставил в нем только обобщающие издания, дополняющие материалы пособия.

Хотя пособие в первую очередь ориентировано на подготовку специалистов по специализации 220100 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети», специализирующихся на разработке различных информационно-измерительных и управляющих систем, оно может быть рекомендовано и при изучении смежных дисциплин в области промышленной автоматике, робототехники, приборостроения, электротехники и радиоэлектроники. Книга может быть полезна не только студентам и аспирантам, но и специалистам, так как соответствует современному уровню развития техники.

ВВЕДЕНИЕ

Современные информационно-измерительные системы (ИИС) строятся на базе микропроцессоров и микроконтроллеров. Для связи микропроцессоров с объектами управления необходимо использовать аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Различают преобразователи аналоговых *электрических* величин в код (токов, напряжений, частоты, временных интервалов и т.п.), за которыми в технической литературе закрепилась аббревиатура АЦП, и аналоговых *механических* величин (линейных и угловых перемещений) в код — АЦПП/АЦПУ.

АЦП электрических величин носят *универсальный* характер, выполняются по технологиям микроэлектроники и могут работать с любыми первичными датчиками электрических величин. АЦПП/АЦПУ, напротив, используют в большинстве случаев *специализированные* первичные датчики механических величин (многополюсные электрические машины, растры, индукционные печатные обмотки и т.п.), особые методы обработки первичной информации и являются, как правило, законченными функциональными изделиями. Поскольку АЦП и АЦПП являются измерительными устройствами и входят в контур управления, то от их характеристик существенно зависят технические характеристики ИУС в целом.

В сложных технических ИИС и ИУС необходимо применять АЦП/ЦАП с различными характеристиками (от низкоточных и сравнительно медленных до прецизионных и быстродействующих). Например, в состав модуля поколения «Фемтоскан» для сканирующей зондовой микроскопии с быстродействием 64 кадра в секунду входят:

- 4 канала ЦАП с линейностью 20 бит и быстродействием 1 мкс;
- 4 канала ЦАП с линейностью 16 бит и быстродействием 10 мкс;
- 2 канала дифференциальных АЦП с частотой дискретизации 1 МГц и линейностью 18 бит;
- 8-канальный АЦП с частотой дискретизации 1 МГц и линейностью 18 бит.

Уже к 2006—2007 гг. 70% проектируемых систем на кристалле были смешанными аналого-цифровыми.

Процесс сбора информации от датчиков (мультиплексирование, нормализация, оцифровка) имеет определенные особенности и во многих случаях определяет эффективность ИУС. В настоящее время в качестве ССД повсеместно используются интегральные микросхемы. Основой ССД являются интегральные АЦП электрических величин. Изучению аналоговых и аналого-цифровых аспектов построения ССД посвящена часть 1 настоящего пособия.

АЦПП доминируют в машиностроительных отраслях промышленности. Например, на долю измерения линейных и угловых перемещений приходится до 70% от всех проводимых измерений. Станкостроение, робототехника, научные и медицинские установки, системы вооружения, современные автомобили буквально насыщены АЦПП различной точности и быстродействия. Японский робот ASIMO, например, содержит 90 сервосистем со встроенными АЦПП средней и низкой точности для обеспечения необходимой кинематики.

В системах с ЧПУ точность АЦПП/АЦПУ должна находиться на уровне микронов и угловых секунд. Например, в технологическом оборудовании для производства шаблонов интегральных схем на пластинах 100×100 мм с разрешением на уровне 1 мкм относительная погрешность не может быть больше 0,001%.

Сверхточный космический телескоп «Хабл», оснащенный АЦПУ, имеет разрешение 0,1 угл. с. Разрешение АЦПУ в 5 угл. с (18 бит) позволяет следить за полетом шмеля с расстояния 4 км.

В качестве примера можно также указать широкое использование АЦПП в таких перспективных изделиях машиностроения, как координатно-измерительные машины. Существуют оценки, по которым до 80% измерений в машиностроении будет осуществляться на этих машинах, причем измерения будут поглощать до 20% всех трудозатрат. Номенклатура АЦПП содержит тысячи изделий различных фирм для автомобильной, станкостроительной, судостроительной, нефтегазовой промышленности. Особенно велика роль АЦПУ в системах вооружения и робототехники. Изучению АЦПП/АЦПУ посвящена часть 2 учебного пособия.

Поскольку в области разработки и производства АЦП/ЦАП доминируют западные фирмы, в пособии для адаптации отечественного читателя во многих случаях наряду с отечественной аббревиатурой применяется и англоязычная.

ЧАСТЬ 1

СХЕМОТЕХНИКА АЦП ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ АЦП

I.1. Архитектура систем сбора данных (ССД)

Повсеместное внедрение микропроцессорной техники привело к созданию аналого-цифровых сигнальных процессоров, или просто сигнальных процессоров (в англоязычной литературе ADSP — Analod-Digital-Signal-Processor). Сигнальные процессоры предназначены для ввода, преобразования в код и обработки сигналов датчиков и либо выдают управляющие воздействия, либо стыкуются с устройствами отображения информации и более мощными процессорами верхнего уровня управления. В любом случае они включает в себя ССД. Эта система является неотъемлемой частью современных ИИС, начиная от простейших измерений физических характеристик различных технологических процессов до сложнейших испытательных комплексов космических аппаратов. Хотя в общем случае в ИИС может поступать информация как в аналоговом, так и в цифровом виде и значительная часть ИИС состоит из цифровых блоков, в дальнейшем будут рассматриваться особенности схемотехники *аналоговых* узлов ССД.

Типичная структура ССД, работающая в многоканальном режиме, приведена на рис. 1. Помимо входного аналогового мультиплексора (МХ), она содержит программируемый операционный усилитель (ПОУ) или усилитель с программируемым коэффициентом усиления (PGA — Program Gain Amplifier), устройство выборки и хранения (УВХ или SHA — Sample Hold Amplifier), *аналого-цифровой преобразователь* (АЦП или ADC — Analog Digital Converter) и источник опорного напряжения (ИОН).

АЦП предназначен для преобразования аналогового входного сигнала U_x в пропорциональный цифровой код N_x . Для приведения сигналов к разрешенному диапазону преобразования используется операция масштабирования, которая осуществляется с применением ПОУ. На время преобразования входная величина должна фиксироваться в аналоговом УВХ. Результат преобразования обычно запоминается в памяти и через интерфейс выдается потребителям. Режимы и работа ССД осуществляются под управлением специальной схемы (микроконтроллера). Примером служит однокристалльная ССД температурных датчиков, которая содержит 24-разрядный $\Sigma - \Delta$ АЦП, ПОУ с малым дрейфом и малым энергопотреблением, встроенным ИОН. Отечественный

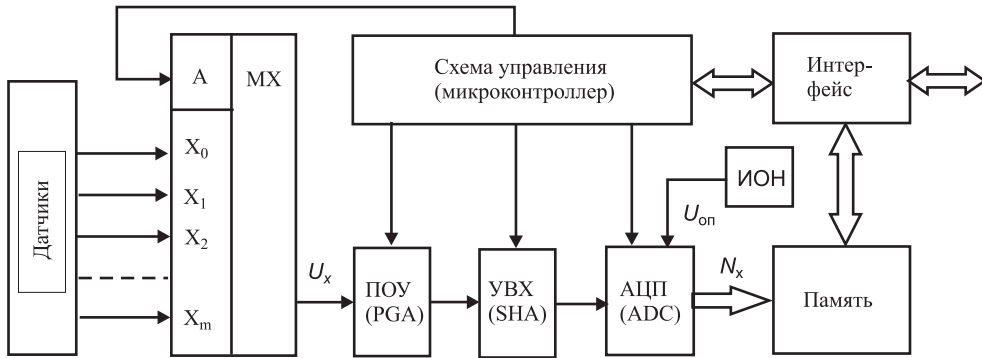


Рис. 1. Структурная схема ССД

микроконвертор К1874ВЕ96Т включает, помимо обозначенных на рис. 1 элементов, таймер, тактовые генераторы, порты ввода/вывода. Разумеется, возможны и другие варианты построения ССД, которые будут отличаться быстродействием, стоимостью и другими характеристиками.

Но в любом случае ССД содержит развитую цифровую и аналоговую часть, центральное место в которой занимает АЦП. Характеристики АЦП в решающей степени определяют характеристики ИИС и систем управления. В состав многих современных ССД и АЦП входят и обратные ЦАП, которые также нуждаются в рассмотрении.

К настоящему времени созданы высокоинтегрированные ССД на одном кристалле, что значительно упрощает задачу разработчиков при проектировании ИИС. Однако грамотное применение ССД невозможно без понимания схемотехники базовых АЦП/ЦАП. Это объясняется не только тем, что перечень однотипных аналоговых микросхем с близкими характеристиками на рынке зачастую превышает несколько сотен (например, фирма Maxim разрабатывает по одной новой микросхеме в день). Кроме того, наукоемкость современных ССД очень велика, что требует прочных знаний в области аналоговой схемотехники, микроэлектроники, метрологии, цифровой обработки сигналов.

В ИИС требования к быстродействию АЦП/ЦАП значительно снижены по сравнению с медийными приложениями и системами связи. В то же время требования к точности, разрешению, стабильности, помехозащищенности, потребляемой мощности могут быть очень высоки. Поэтому схемотехника АЦП/ЦАП будет рассматриваться с учетом этих обстоятельств. Наконец, без понимания схемотехники АЦП/ЦАП невозможно ориентироваться в работе ССД, которые находят широкое применение в ИУС. Некоторые параметры однокристалльных ССД приведены в Приложении 1.1.

1.2. Процессы дискретизации функций

Процесс преобразования непрерывной величины в дискретную заключается в представлении непрерывной величины последовательным во времени рядом ее мгновенных квантованных по уровню значений. При этом преобразовании обычно имеет место два вида квантования:

- квантование во времени;
- квантование по уровню.

Процесс квантования вносит в преобразуемую информацию ряд специфических погрешностей.

1.2.1. Квантование во времени

Квантование во времени непрерывных сообщений есть процесс преобразования функции непрерывного времени $x(t)$ в функцию дискретного времени $x_i(t)$, представляемую совокупностью координат (величин), по значениям которых может быть получена оценка $x^*(t)$ исходного непрерывного сообщения.

В самом общем виде дискретное представление непрерывного сообщения $x(t)$ на интервале T совокупностью координат сообщения x_0, \dots, x_n и последующее восстановление по ним исходного сообщения $x^*(t)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}(x_0, x_1, \dots, x_n) &= Ax(t) \\ x^*(t) &= B(x_0, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

где A — оператор представления (приближающая функция); B — оператор восстановления (воспроизводящая функция). При этом возникает текущая погрешность дискретного представления:

$$x(t) - x^*(t) = \varepsilon(t).$$

Обычно выбираются такие операторы (алгоритмы), которые при приемлемых затратах обеспечивают минимум ошибки при восстановлении функции.

При $x_i = x(k\Delta t)$ процесс квантования во времени соответствует фиксации мгновенного значения аналоговой величины в равноотстоящие дискретные моменты времени (рис. 2а). То есть непрерывная функция заменяется отсчетами. При такой замене из рассмотрения исключается все множество значений функции, находящейся внутри интервала Δt . Полученную функцию часто называют решетчатой (рис. 2б).

При квантовании во времени выходные значения являются неполной картиной того, что подается на вход. Глядя на решетчатую функцию, можно констатировать, что в общем случае нет никакой возможности восстановить сигнал, если не делать каких-либо предположений. Например, если предположить, что сигнал меняется значительно медленнее частоты дискретизации, то он будет находиться между выборками.

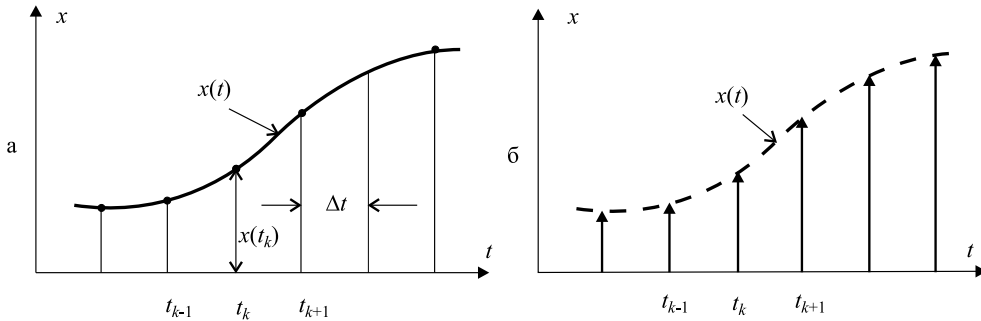


Рис. 2. Квантование во времени: а — формирование отсчетов; б — решетчатая функция

Дискретизация по времени может быть *равномерной* (принудительной), когда интервал дискретизации Δt остается неизменным, и *неравномерной*, когда $\Delta t = \text{var}$ и меняется в соответствии с каким-либо параметром сообщения. В настоящее время наиболее широкое применения нашла равномерная дискретизация. Таким образом, при равномерной дискретизации получается периодическая последовательности δ -импульсов, веса которых равны мгновенным значениям сообщения в моменты времени $t = k\Delta t$, то есть в моменты взятия отсчетов.

При решении задачи дискретизации непрерывных сообщений возникает ряд вопросов:

- из каких соображений необходимо исходить при выборе интервала дискретизации Δt ;
- какова точность замены непрерывного сообщения последовательностью его отсчетов, взятых в дискретные моменты времени;
- каков максимально допустимый интервал дискретизации Δt , при котором еще принципиально возможно восстановление непрерывного сообщения по его отсчетам.

Получить ответ на эти и другие вопросы можно, если проблему дискретизации по времени рассматривать в неразрывной связи с обратной проблемой — восстановлением непрерывной функции времени по ее мгновенным значениям.

Очевидно, что чем меньшим количеством отсчетов заменяется сообщение длительностью T_c , то есть продолжительнее интервал дискретизации Δt , тем сложнее выполнить восстановление исходной функции, и наоборот. Иными словами, погрешность восстановления зависит от вида исходной функции, интервала квантования и алгоритма восстановления.

Таким образом, при реализации квантования по времени возникает задача выбора частоты квантования и метода аппроксимации, с тем чтобы иметь возможность восстановить затем исходную непрерывную функцию $x(t)$ с заданной точностью $\varepsilon(t)$ ($x^*(t)$ — оценка исходной функции). В общем случае $\varepsilon(t)$ являет-

ся функционалом трех величин: самой функции, интервала квантования и алгоритма восстановления:

$$\varepsilon(t) = F[x(t), \Delta t, B].$$

К вопросу квантования и восстановления функции нельзя подойти однозначно, если не учитывать класс сигналов, подлежащих преобразованию из непрерывной формы в дискретную. Например, сигналы датчиков физических величин в большинстве случаев гладкие, низкочастотные, монотонные во времени (температура, давление и т.д.). В то же время датчики вибраций, речевой сигнал имеют высокочастотный спектр. Существует несколько подходов к решению указанной задачи.

1. В первом случае (низкочастотный спектр) задача решается на основе *теории аппроксимации* (приближения) функций степенными полиномами. При этом построение аппроксимирующей, то есть приближающей, функции можно проводить различными путями: интерполированием, среднестепенным приближением, равномерным приближением и т.д. Обычно выбирают аппроксимирующую функцию в виде ряда или полинома. Воспроизводящий полином должен обеспечить, с одной стороны, необходимую точность воспроизведения, а с другой — простую техническую реализацию устройства восстановления. Для информационно-измерительных систем, к которым относятся ССД, нашло в основном применение *интерполирование* нулевого и первого порядка, то есть ступенчатая и линейная аппроксимирующая функция. Под интерполированием понимают приближение в отдельных дискретных точках, то есть когда

$$x(t_j) - x^*(t_j) = 0.$$

2. Во втором случае (высокочастотный спектр) для сигналов, обладающих квазистационарными свойствами, задача решается на основе частотного критерия, который учитывает спектральный состав функции (*теорема Котельникова*).

Определение частоты квантования с помощью степенных полиномов

Итак, воспроизводящий полином, с одной стороны, должен обеспечить необходимую точность воспроизведения при минимальном числе членов ряда, а с другой — обеспечивать простую техническую реализацию устройств восстановления.

Для медленно меняющихся монотонных функций нашел широкое распространение метод определения частоты квантования и восстановления с помощью *интерполяционного многочлена* Лагранжа.

Сущность метода интерполирования сводится к следующему. Если известны значения функции $x(t)$ в $n + 1$ произвольных точках $x(t_i)$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, то требуется построить полином $\varphi_n(t)$ степени n :

$$\varphi_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n,$$

который в $(n+1)$ данных точках (не совпадающих друг с другом) t_0, t_1, \dots, t_n принимал бы соответствующие известные значения:

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= xt_0 = x_0, \\ \varphi(t_1) &= xt_1 = x_1 \\ &\dots\dots \\ \varphi(t_n) &= x(t_n) = x_n.\end{aligned}$$

Задача состоит в определении коэффициентов a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) полинома $\varphi_n(t)$.

В процессе решения может быть получена система из $(n+1)$ линейных уравнений с $(n+1)$ неизвестным. Решение задачи интерполяции найдено Лагранжем (интерполяционная формула Лагранжа):

$$\varphi_n(t) = x_0 L_0(t) + x_1 L_1(t) + x_2 L_2(t) + \dots + a_n L_n(t),$$

где

$$L_j(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{j-1})(t-t_{j+1})\dots(t-t_n)}{(t_j-t_0)(t_j-t_1)\dots(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1})\dots(t_j-t_n)} = \frac{\prod_{i=0, j \neq i}^n (t-t_i)}{\prod_{i=0, j \neq i}^n (t_j-t_i)}$$

являются коэффициентами Лагранжа. Причем нетрудно заметить, что $L_j(t_i) = 0$, если $i \neq j$, и $L_j(t_j) = 1$, если $i = j$. Если раскрыть произведения всех скобок в числителе (в знаменателе все скобки — числа), то получим полином n -го порядка от t , поскольку в числителе содержится n сомножителей первого порядка. Следовательно, интерполяционный полином Лагранжа не что иное, как обычный степенной полином n -го порядка со специфической формой записи.

Погрешность аппроксимации запишется в виде остаточного члена интерполяционной формулы

$$\Delta = |x(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} [\max |x^{(n+1)}(t)|] \cdot \prod_{i=0}^n |t-t_i|,$$

где $x^{(n+1)}(t)$ — $(n+1)$ -я производная.

Интерполяция полиномом нулевой степени (ступенчатая аппроксимация) показана на рис. 3а, а интерполяция полиномом первой степени (кусочно-линейная аппроксимация) показана на рис. 3б. При кусочно-линейной аппроксимации ($n=1$), где погрешность аппроксимации значительно меньше, чем при ступенчатой ($n=0$), восстановление на интервале $(t_k - t_{k+1})$ идет по известной интерполяционной формуле Ньютона:

$$x^*(t) = x(t_k) + \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta t} \cdot (t - t_k). \quad (1)$$

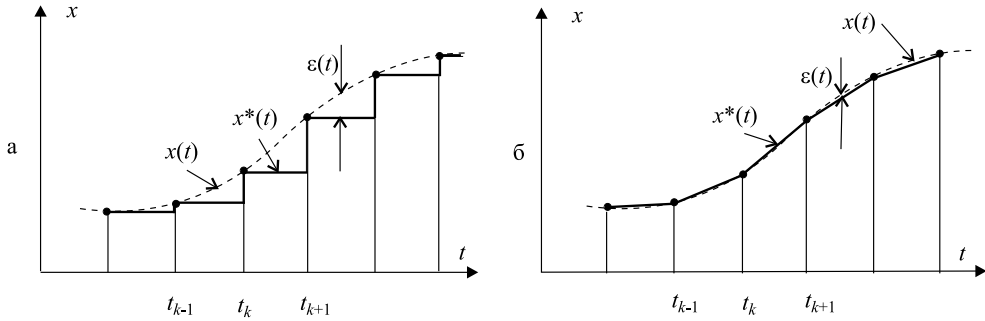


Рис. 3. Интерполяция: а — ступенчатая; б — кусочно-линейная

При этом максимальная погрешность Δ_{\max} находится в середине интервала интерполирования (при $(t - t_k) = \Delta t/2$ имеем $\prod_{i=0}^n |t - t_i| = (\Delta t)^2/4$) и не превышает

$$\Delta_{\max} < \frac{\Delta t^2}{8} \max |x''(t)|, \tag{2}$$

где $|x''(t)|$ — модуль второй производной.

Выражение (2) позволяет определить величину интервала квантования по времени Δt , при которой погрешность аппроксимации не будет превышать допустимой величины $\Delta_{\text{доп}}$:

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{8 \cdot \Delta_{\text{доп}}}{\max |x''(t)|}}. \tag{3}$$

Формулы (1)—(3) являются основными при определении частоты квантования. Анализ показал, что интерполяция полиномами более высоких степеней хотя и допускает более низкую частоту квантования, но ведет к значительному усложнению алгоритма восстановления и поэтому не находит широкого применения.

Пример. Для гармонического сигнала $U(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f t)$ амплитудой $U_0 = 10$ В и частотой $f = 100$ Гц определить частоту квантования при кусочно-линейной аппроксимации и заданной относительной погрешности восстановления сигнала $\delta_{\text{доп}} \leq 1\%$.

Решение. Очевидно, что $\max |U''(t)| = U_0 \omega^2$, $\Delta_{\text{доп}} = U_0 \cdot \delta_{\text{доп}}$, $\omega = 2\pi f$. Воспользовавшись формулой (3), имеем:

$$f_{\text{кв}} \geq \left(\sqrt{\frac{8 \cdot U_0 \cdot \delta_{\text{доп}}}{U_0 (2\pi f)^2}} \right)^{-1} \geq \pi f \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \delta_{\text{доп}}}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{10^{-1} \cdot \sqrt{2}} \approx 2,2 \text{ кГц}.$$

Определение частоты квантования по теореме Котельникова (теорема отсчетов)

Квантование во времени — это, по существу, δ -модуляция. При этом могут возникать биения частот (разностные частоты), известные также как смещение спектров (aliasing). Для гармонического сигнала частотой f_x низкочастотная разностная частота $f_{\text{кв}} - f_x$ (показана пунктирной линией на рис. 4) проявляется при условии

$$f_{\text{кв}}/2 < f_x < f_{\text{кв}}.$$

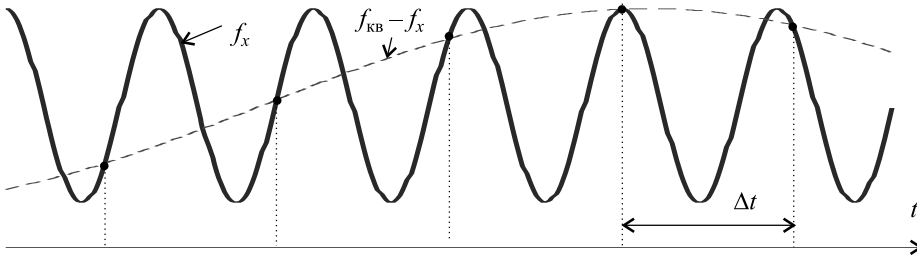


Рис. 4. Эффект смещения спектров во временной области (биения)

При рассмотрении этого явления в частотной области (рис. 5а), где спектр разделен на бесконечное число полос шириной $f_{\text{кв}}/2$ (полос Найквиста), наглядно видно, что если f_x находится в так называемой первой зоне Найквиста ($f_x < f_{\text{кв}}/2$), то биения проявляются на частотах $(\pm K \cdot f_{\text{кв}} \pm f_x)$, где $K = 1, 2, 3, \dots$, в виде отражений от частот $K \cdot f_{\text{кв}}$ и могут быть отфильтрованы ФНЧ с полосой пропускания $f_{\text{в}}$. Если же f_x находится за пределами первой зоны (рис. 5б), то его отражения попадут в полосу пропускания (первую зону Найквиста) и не будут подавлены ФНЧ при восстановлении.

Иными словами, для исключения биений в низкочастотной области необходимо, чтобы частота квантования была не менее чем в два раза больше верхней частоты $f_{\text{в}}$ в спектре входного сигнала:

$$f_{\text{кв}} > 2f_{x\text{max}} = 2f_{\text{в}}. \quad (4)$$

Второй вывод, который следует из проведенного рассмотрения, состоит в том, что на входе АЦП должен устанавливаться так называемый *антиалийзинговый* ФНЧ, который должен осуществлять эффективное подавление паразитных спектральных компонент помехи $f_{\text{п}}$ (рис. 5б) вне рабочей полосы частот. Требования к этому фильтру будут зависеть от того, как близко $f_{\text{в}}$ отстоит от $f_{\text{кв}}/2$ (от границы первой зоны). Таким образом, в любой ССД должен стоять антиалийзинговый ФНЧ.

Впервые условие (1) было сформулировано без доказательства Найквистом в 1928 г., на основе рассмотренного частотного представления исходной

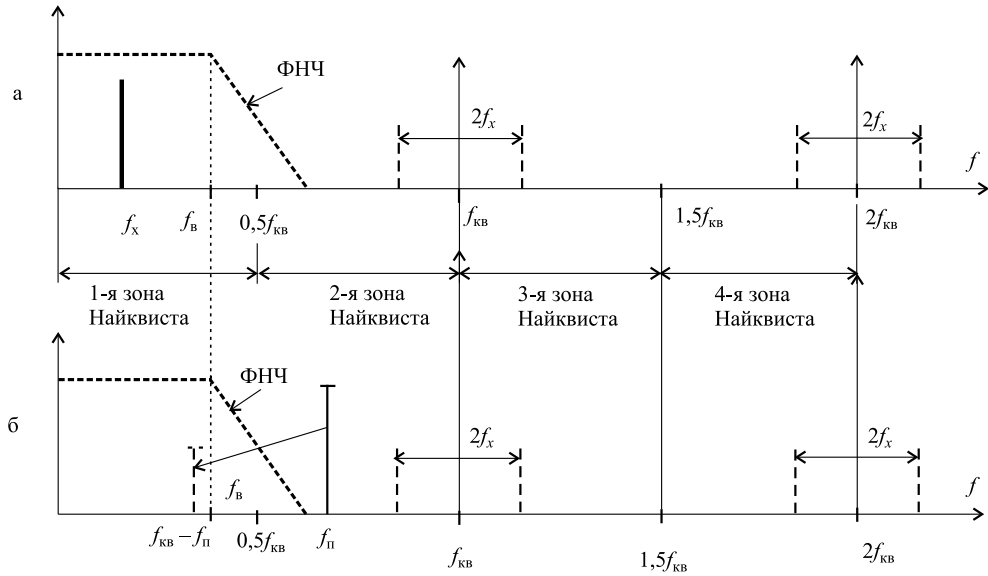


Рис. 5. Отражение спектра сигнала и помехи при квантовании во времени

функции. По предложению Шеннона этот критерий с 1948 г. в англоязычной литературе называют критерием или *теоремой отсчетов Найквиста*.

Однако еще 1933 г. строгое доказательство теоремы отсчетов привел В.А. Котельников. Кроме того, он сформулировал и доказал условие восстановления исходной функции. В отечественной литературе теорему отсчетов чаще называют *теоремой Котельникова*. Смысл ее состоит в следующем.

Любую функцию $x(t)$, имеющую ограниченный спектр частот от нуля до f_B и наблюдаемую неограниченное время ($T \rightarrow \infty$), можно представить с любой степенью точности ε с помощью чисел (отсчетов), следующих друг за другом через равные интервалы времени:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_B}. \tag{5}$$

При этом восстановление функции должно осуществляться *рядом Котельникова*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \cdot \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}, \tag{6}$$

где k — целое число; $x(k\Delta t)$ — значение функции в момент времени ($k\Delta t$); $\omega_B = 2\pi \cdot f_B$.

Таким образом, функция $x(t)$, имеющая ограниченный спектр частот, может быть представлена в виде бесконечной суммы, каждое слагаемое которой

выражается функцией вида $Z = y \cdot \frac{\sin c}{c}$ и отличается от остальных слагаемых значениями амплитуд y и временным сдвигом. Функция

$$\psi_k(t) = \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}$$

называется функцией Котельникова, или *функцией отсчетов*.

Функция отсчетов ψ_k имеет вид, представленный на рис. 6 (в моменты отсчета, то есть $t = k\Delta t$, принимает максимальное значение, равное единице, а в моменты, кратные π , равна нулю).

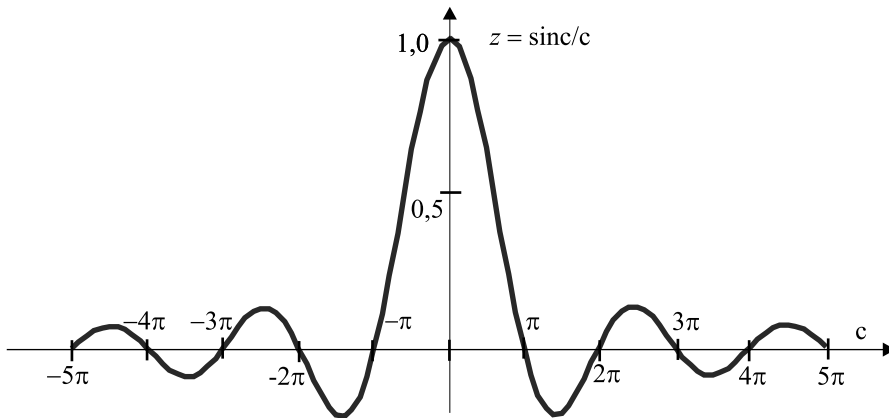


Рис. 6. Функция отсчетов

Для полного восстановления непрерывной функции $x(t)$ по значениям ее отсчетов необходимо просуммировать бесконечное множество членов ряда (рис. 7).

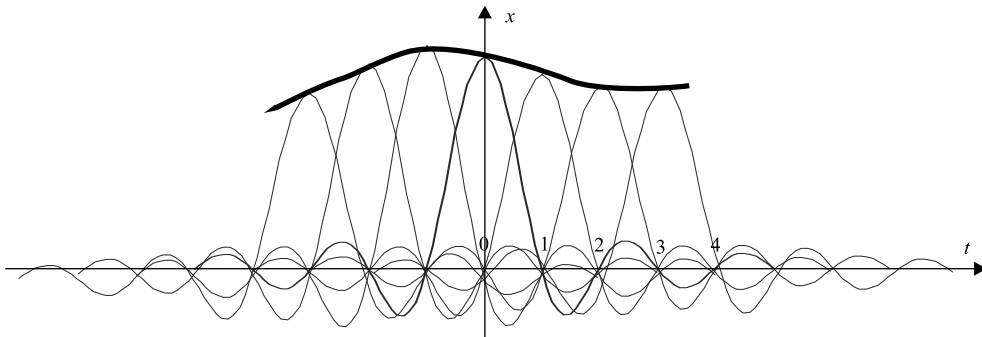


Рис. 7. Восстановление исходной функции рядом Котельникова

Доказано, что функция отсчетов является реакцией идеального ФНЧ с полосой $(0 - \omega_B)$ на входную δ -функцию. Иными словами, восстановление сигнала может осуществляться путем подачи решетчатой функции на ФНЧ, и чем идеальней ФНЧ, тем точнее будет восстановление.

Итак, восстановление непрерывного сообщения по его отсчетам можно выполнять в соответствии с теоремой Котельникова — Найквиста. Эта процедура может быть выполнена двумя способами:

- фильтрационным, с применением аналогового фильтра;
- с помощью ряда Котельникова (6) на специализированных интерполяторах или универсальных ЭЦВМ.

Точное восстановление фильтрационным способом физически не реализуемо, так как требуется *идеальный ФНЧ*.

Восстановление рядом Котельникова (6) требует большого объема памяти машины, и получить на выходе исходную функцию можно только после прохождения всего процесса $x(t)$, то есть восстановление имеет задержку, что не дает возможности работы *в реальном масштабе времени*.

Так как на практике все исследуемые процессы обычно ограничены во времени и по определению не могут иметь ограниченный спектр, то при применении теоремы Котельникова возникают погрешности представления реальных сигналов, обусловленные отбрасыванием (например, по энергетическим соображениям) высокочастотных малозначащих гармоник спектра входного сигнала.

По этим причинам в технике АЦП критерий Котельникова — Найквиста применяется лишь для *асимптотической оценки* минимально возможной частоты квантования.

1.2.2. Квантование по уровню

Квантование по уровню сводится к представлению текущих значений непрерывно изменяющегося сигнала конечным числом уровней. С математической точки зрения квантование по уровню равносильно операции округления.

При квантовании по уровню сигнал представляется приближенными значениями, то есть непрерывно изменяющаяся величина $x(t)$ представляется ступенчатой функцией $x_{кв}(t)$ (рис. 8а).

Интервал между соседними уровнями квантования называется *шагом квантования* $\Delta x = h$, где h — единица младшего разряда (ЕМР или LSB — low signal bite). Если $\Delta x = const$, то квантование называется *равномерным*. Шаг квантования по уровню, в сущности, определяет разрешающую способность преобразователя.

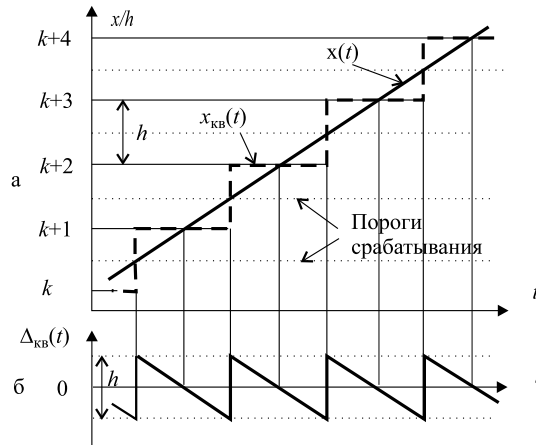


Рис. 8. Квантование по уровню: а — формирование квантованной функции; б — погрешность квантования по уровню

При равномерном квантовании непрерывной величины $x(t)$ весь диапазон ее изменения $A = x_{\max} - x_{\min} = FS$ (FS — полная шкала) разбивают на N равных частей. При этом шаг квантования по уровню определяется следующим соотношением:

$$\Delta x = h = \frac{A}{N} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N} = \frac{FS}{N}.$$

Для квантованного сигнала $x_{\text{кв}}(t)$ характерно наличие скачков на величину h в момент, когда непрерывный сигнал $x(t)$ проходит уровень срабатывания квантователя. Ошибка квантования по уровню $\Delta_{\text{кв}} = x_{\text{кв}} - x$ в общем случае является случайной величиной, но нигде не превышает $\pm 0,5h$. Таким образом,

$$-0,5h \leq \Delta_{\text{кв}} \leq 0,5h.$$

Погрешность квантования, как функция времени, представлена на рис. 8б.

Формально операцию квантования по уровню можно рассматривать как прохождение исходной функции через некое устройство, которое можно назвать квантователем. Амплитудная характеристика равномерного квантователя и сам процесс квантования представлены на рис. 9.

Найдем среднеквадратическую ошибку, обусловленную квантованием сигнала $x(t)$ по уровню. Так как $A \gg h$, то даже небольшое изменение $x(t)$ оказывается соизмеримым с h . Поэтому полагают, что в момент отсчета величина $x(t)$ с равной вероятностью может принимать любое значение в пределах h вблизи одного из уровней квантования. Это означает, что для ошибки $\Delta_{\text{кв}}$ в точке отсчета можно принять равновероятный закон распределения вероятности (рис. 10).

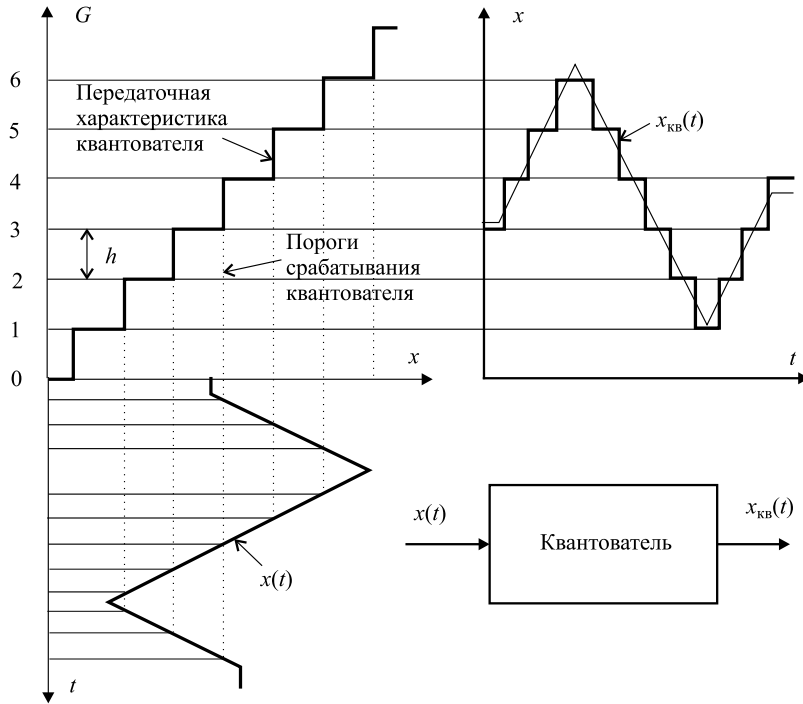


Рис. 9. Прохождение функции $x(t)$ через квантователь

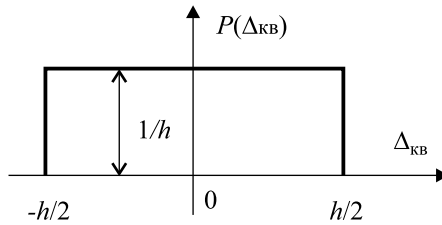


Рис. 10. Закон распределения погрешности квантования

Так как площадь подинтегральной кривой равна 1, то вероятность $P(\Delta_{кв})$ определяется следующим выражением:

$$\left. \begin{aligned} P(\Delta_{кв}) &= \frac{1}{h}, \text{ при } |\Delta_{кв}| \leq 0,5h \\ P(\Delta_{кв}) &= 0, \text{ при } |\Delta_{кв}| > 0,5h \end{aligned} \right\}$$

а дисперсия ошибки квантования по уровню определяется по формуле

$$D = \sigma_{кв}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_{кв})^2 P(\Delta_{кв}) d(\Delta_{кв}).$$

С учетом выражения для равновероятного закона распределения

$$\sigma_{\text{кв}}^2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{1}{h} (\Delta_{\text{кв}})^2 d(\Delta_{\text{кв}}) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{3} \Delta_{\text{кв}}^3 \Big|_{-0,5h}^{0,5h} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot h^2 = \frac{h^2}{12}.$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{кв}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}, \text{ или в относительных единицах } \sigma_{\text{кв}} = \frac{1}{2^n \sqrt{12}}.$$

Таким образом, среднеквадратическая погрешность квантования в $\sqrt{3}$ раз меньше предельной ошибки квантования.

Погрешность квантования порождает так называемый шум квантования, который ограничивает соотношение сигнал/шум (SNR — Signal Noise Ratio) в АЦП. Допустим, на входе действует полномасштабная синусоида:

$$U(t) = \frac{h \cdot 2^n}{2} \sin \omega t.$$

Ее действующее значение будет в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудного:

$$\overline{U(t)} = \frac{h \cdot 2^n}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$SNR = 20 \lg \frac{\overline{U(t)}}{\sigma_{\text{кв}}} = 20(\lg 2^n + \lg \frac{\sqrt{6}}{2}) = 6,02 \cdot n + 1,76 \text{ (дБ)}.$$

Формула дает теоретическое значение отношения сигнал/шум для идеального n -разрядного АЦП. Например, для 20-разрядного АЦП соотношение сигнал/шум должно составить $SNR = 122,16$ дБ. Важно отметить, что шум квантования по уровню аппроксимируется гауссовским распределением по амплитуде, а среднеквадратичное значение шума квантования замеряется во всей полосе пропускания Найквиста от 0 до $f_{\text{в}}/2$. В узкополосных АЦП с полосой пропускания Δf соотношение SNR возрастает и составит

$$SNR = 6,02 \cdot n + 1,76 + 10 \lg(f_{\text{кв}}/2 \cdot \Delta f).$$

1.2.3. Полная статическая погрешность АЦП

Как известно из метрологии, в статической погрешности преобразователей можно выделить систематическую и случайную составляющую. *Систематическая* составляющая может быть тем или иным способом учтена и скомпенсирована. *Случайная* погрешность принципиально не может быть скомпенсирована и проявляется статистически при каждом отсчете.