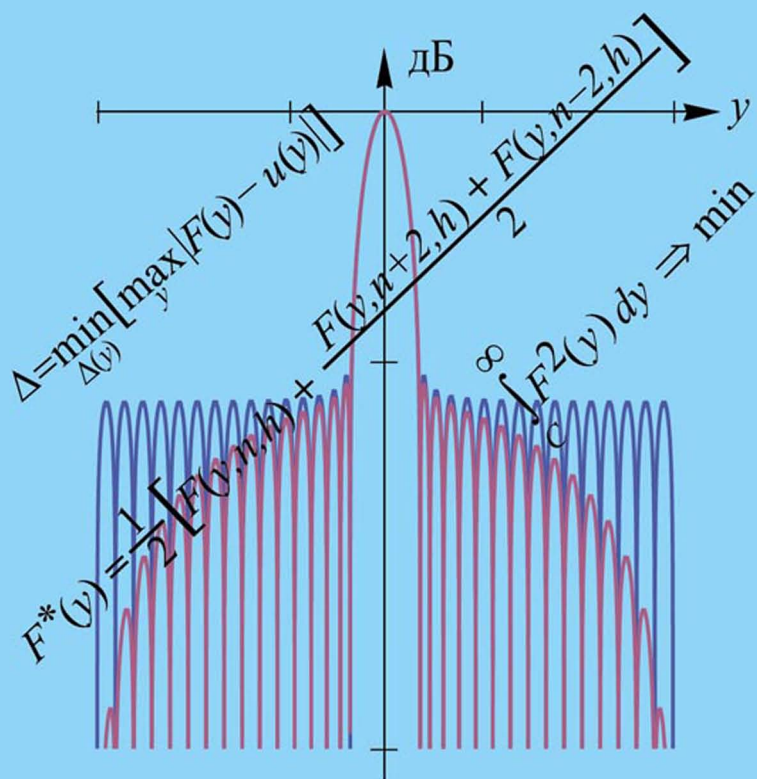


В.П. Дворкович
А.В. Дворкович

Оконные функции для гармонического анализа сигналов

Издание второе переработанное и дополненное





МИР

цифровой обработки

В.П. Дворкович, А.В. Дворкович

Оконные функции
для гармонического
анализа сигналов

Издание второе,
переработанное и дополненное

ТЕХНОСФЕРА

Москва
2016

*Монография выполнена авторами в рамках соглашения
с Министерством образования и науки Российской Федерации о предоставлении
субсидии на реализацию ПНИЭР № 14.581.21.0015 от 16 октября 2015 г.*

УДК 519.6:621.391

ББК 32.811

Д24

Д24 Дворкович В.П., Дворкович А.В.

Оконные функции для гармонического анализа сигналов

Издание второе, переработанное и дополненное

Москва: Техносфера, 2016. — 208с. ISBN 978-5-94836-432-2

Книга содержит подробную информацию о параметрах классических оконных функций, а также сконструированных различными авторами в виде произведений, сумм и сверток различных функций или в виде отдельных участков известных окон, и их применении для анализа сигналов с использованием БПФ.

Приведены результаты авторской разработки ряда новых высокоэффективных оконных функций с применением следующих алгоритмов:

- минимизации спектра вне пределов заданного частотного интервала;
- минимизации различий формы и спектра оконных функций;
- максимизации скорости спада уровней боковых лепестков спектра оконных функций;
- перемножения относительных спектров оконных функций.

Особое внимание уделено анализу равноволновых окон Дольфа-Чебышева и Барсиллона-Темеша, тождественно аппроксимируемых конечным числом косинусоидальных функций; с применением этих функций реализованы новые окна, обеспечивающие существенное подавление боковых лепестков.

Рассмотрены принципы обработки ограниченных по спектру сигналов с использованием субполосных дискретных вейвлет-преобразований от второго до пятого порядков и формирование на их базе оконных функций.

Подробно анализируются методы обработки видеoinформации с применением двухполосных и комбинированных вейвлет-преобразований, реализации на их основе кратномасштабных преобразований изображений.

УДК 519.6:621.391

ББК 32.811

© 2016, Дворкович В.П., Дворкович А.В.

© 2016, ЗАО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», оригинал-макет, оформление

ISBN 978-5-94836-432-2

Содержание

Обозначения и сокращения	10
Предисловие рецензента	11
Введение	16
Глава 1	
Структуры оконных функций и их основные параметры	21
1.1. Основные положения.....	21
1.2. Параметры оконных функций	26
1.2.1. Эквивалентная шумовая полоса	26
1.2.2. Усиление преобразования	27
1.2.3. Корреляция перекрывающихся участков	29
1.2.4. Паразитная амплитудная модуляция спектра	31
1.2.5. Максимальные потери преобразования	31
1.2.6. Просачивание спектральных составляющих	32
1.2.7. Минимальная разрешаемая полоса	33
1.2.8. Относительная разность шумовой полосы окна и его полосы по уровню -3 дБ	33
1.2.9. Максимальный уровень боковых лепестков	33
1.2.10. Скорость спада боковых лепестков	34
1.3. Выбор оконных функций при цифровой обработке сигналов	34
Глава 2	
Классические оконные функции	37
2.1. Прямоугольная и треугольная оконные функции.....	37
2.1.1. Прямоугольное окно (окно Дирихле).....	37
2.1.2. Треугольное окно (окно Файера или Бартлетта)	38
2.2. Оконные функции Хеннинга.....	40
2.2.1. Косинусоидальный лепесток	40

2.2.2. Косинусквадратичное окно Хеннинга (окно Ханна)	41
2.2.3. Косинускубичная оконная функция	41
2.2.4. Квадрат косинусквадратичной оконной функции	42
2.3. Оконные функции Хэмминга, Блэкмана, Блэкмана–Хэрриса	42
2.3.1. Окно Хэмминга (модификация окна Хеннинга)	42
2.3.2. Окно Блэкмана	43
2.3.3. Окна Блэкмана–Хэрриса	44
2.4. Оконные функции Наталла, Блэкмана–Наталла, Бартлетта–Ханна, окно с плоской вершиной	45
2.4.1. Окна Наталла и Блэкмана–Наталла	45
2.4.2. Гибридное окно Бартлетта–Ханна	45
2.4.3. Окно с плоской вершиной	46

Глава 3

Оконные функции, сконструированные различными авторами	48
---	-----------

3.1. Оконные функции Рисса, Римана, Валле-Пуссена	48
3.1.1. Окно Рисса (Бохнера, Парзена)	48
3.1.2. Окно Римана	50
3.1.3. Окно Валле-Пуссена (Джексона, Парзена)	51
3.2. Оконные функции Тьюки	51
3.3. Оконные функции Бомана и Пуассона	52
3.3.1. Окно Бомана	52
3.3.2. Окна Пуассона	53
3.4. Оконные функции Хеннинга–Пуассона, Коши и Гаусса	54
3.4.1. Окна Хеннинга–Пуассона	54
3.4.2. Окна Коши (Абея, Пуассона)	55
3.4.3. Окна Гаусса (Вейерштрасса)	55
3.5. Оконные функции Кайзера–Бесселя	57

Глава 4

Оконные функции Дольфа–Чебышева, Барсилона–Темеша и их модификации	60
---	-----------

4.1. Равноволновые окна Дольфа–Чебышева и их модификации	60
4.1.1. Оконные функции Дольфа–Чебышева	60
4.1.2. Окна Дольфа–Чебышева–Дворковича	69
4.2. Окна Барсилона–Темеша и их модификации	74

4.2.1. Оконные функции Барсилона–Темеша	74
4.2.2. Окон Барсилона–Темеша–Дворковича	77

Глава 5	
Оконные функции Кравченко	83

Глава 6	
Синтез высокоэффективных оконных функций с использованием минимизации спектральных составляющих вне пределов заданного интервала	87

6.1. Минимизация мощности боковых лепестков спектров окон с четными косинусоидальными составляющими	87
6.2. Минимизация мощности боковых лепестков спектров окон с нечетными косинусоидальными составляющими	94

Глава 7	
Синтез высокоэффективных оконных функций с использованием минимизации различий их формы и спектра	100

7.1. Минимизация различий формы и спектра окон с четными косинусоидальными составляющими	100
7.2. Минимизация различий формы и спектра окон с нечетными косинусоидальными составляющими	108

Глава 8	
Дополнительные методы повышения эффективности параметров оконных функций	115

8.1. Алгоритмы максимизации спада уровней боковых лепестков спектра оконных функций	115
8.2. Формирование окон путем перемножения оконных функций или возведения в степень их спектров	127

Глава 9

Дискретные вейвлет-преобразования ограниченных по спектру сигналов и формирование на их базе оконных функций..... 130

9.1. Двухканальная система субполосного дискретного преобразования сигналов	131
9.1.1. Ортогональные КИХ-фильтры с нечетным числом отсчетов цифровой решетки и линейной (нулевой) ФЧХ	135
9.1.2. Ортогональные КИХ-фильтры с четным числом отсчетов цифровой решетки	142
9.1.3. Квадратурно-зеркальные КИХ-фильтры.....	149
9.2. Трехканальная система субполосного дискретного преобразования сигналов	150
9.3. Четырехканальная система субполосного дискретного преобразования сигналов	158
9.4. Пятиканальная система субполосного дискретного преобразования сигналов	166

Глава 10

Обработка изображений с кратномасштабным дискретным вейвлет-преобразованием..... 176

10.1. Основные положения.....	176
10.2. Зависимость энергетических характеристик субполос изображения от вида вейвлет-базиса разложения	180
10.3. Выбор маски квантования компонент вейвлет-преобразований изображения	184
10.4. Обработка тестовых изображений двухполосными вейвлет-фильтрами	191
10.5. Обработка тестовых изображений комплексными вейвлет-фильтрами	193

Литература..... 200

Specific features of design and application of window functions..... 204

Table of Contents..... 211

ГЛАВА I

СТРУКТУРЫ ОКОННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

I.1. Основные положения

Все виды оконных функций симметричны относительно середины интервала $-T/2 \leq t \leq T/2$ и ограничены по длительности этим интервалом.

Следовательно, один из вариантов представления таких функций — в виде суммы ортогональных косинусоидальных базисных функций с периодами, кратными интервалу T :

$$u_e(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sum}_e} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m \cos(2\pi m x) \right] = \\ = b_0 + 2 \sum_{m=1}^M b_m \cos(2\pi m x), & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\text{Sum}_e = 1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m$, $b_0 = \frac{1}{\text{Sum}_e}$, $b_m = \frac{a_m}{\text{Sum}_e}$, $b_0 + 2 \sum_{m=1}^M b_m = 1$.

Нормированные спектры таких функций могут быть представлены в виде:

$$F_e(y) = \text{sinc}(\pi y) + \sum_{m=1}^M a_m [\text{sinc}(\pi(y+m)) + \text{sinc}(\pi(y-m))], \quad (1.2)$$

где $\text{sinc}(z) = \sin(z)/z$, $y = \omega T/(2\pi) = fT$ — нормированная (относительная) частота, $|y| < \infty$.

Эквидистантные отсчеты оконных функций (1.1), взятые на интервале T в точках $t_n = n\Delta T = nT/N$, определяются соотношением:

$$u_e(n) = \frac{1}{\text{Sum}_e} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^M (-1)^m a_m \cos(2\pi mn/N) \right], \quad 0 \leq n < N. \quad (1.3)$$

Значение числа M чаще всего выбирают $M \leq [N/2]$.

Поскольку при ДПФ предполагается периодическое продолжение последовательности (1.3), т.е. преобразуемые функции представимы в виде бесконечной суммы $\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_e(n + kN)$, $0 \leq n < N$, то спектральные окна ДПФ представимы в виде суммы нормированных ядер Дирихле D :

$$F_{\text{ДПФ}e}(y) = D(y) + \sum_{m=1}^M (-1)^m a_m [D(y + m) + D(y - m)], \quad (1.4)$$

$$D(y) = \exp(j\pi y/N) \frac{\sin(\pi y)}{N \sin(\pi y/N)}. \quad (1.5)$$

Формулы (1.2) и (1.4) совпадают при $N \rightarrow \infty$.

Поскольку оконные функции (1.1) строго ограничены на конечном временном интервале, их Фурье-спектры (1.2) теоретически не могут быть ограничены.

Предположим, спектр сигнала $u(x = t/T)$ ограничен и в соответствии с теоремой Котельникова–Найквиста его можно описать эквидистантной последовательностью отсчетов $u(n/N)$, если его относительная граничная частота $|y_{\text{гр}}| \leq N/2$.

Эту последовательность конечной длительности на заданном интервале при четном числе N можно определить конечной суммой:

$$F(y_k) = \sum_{n=-N/2}^{(N/2)-1} u(n/N) \exp(-2\pi j y_k n/N), \quad (1.6)$$

или при сдвиге индекса суммирования на $N/2$ реализуется прямое ДПФ:

$$F(y_k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n/N) \exp(-2\pi j y_k n/N). \quad (1.7)$$

В этих соотношениях $y_k = k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Для оценки влияния окон на результаты преобразований предположим, что спектр сигнала определяется относительной величиной $F(y)$, а спектр оконной функции равен $W(y)$. В таком случае результатом преобразования является свертка спектров:

$$F_W(y) = F(y) * W(y). \quad (1.8)$$

Это соотношение является ключом для оценки влияния конечной длины последовательности данных на результаты их обработки.

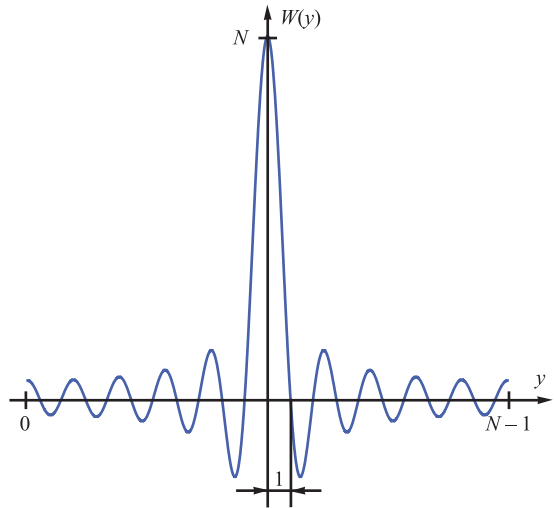
Предположим, в качестве оконной функции используется наиболее простое дискретное прямоугольное окно $w(n/N)$, спектр кото-

рого $D(y)$ определяется ядром Дирихле (1.5) и соотношение (1.7) представимо в виде

$$F_{Wd}(y) = F(y) * D(y). \quad (1.9)$$

Если не учитывать член, характеризующий смещение окна на интервал $N/2$ точек, необходимого для реализации вычислительного алгоритма, то период этого преобразования имеет форму, изображенную на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Ядро Дирихле из последовательности N точек



Свертка спектров сигнала и окна $F_W(y)$ (1.8) на заданной частоте, например, $y = y_0$, представляет собой сумму всех спектральных компонент, предварительно взвешенных спектральным окном с центром на частоте y_0 . На рис. 1.2, а изображен вариант наличия анализируемой спектральной составляющей частоты y_0 , мешающей спектральной составляющей частоты y_1 и непрерывного спектра флуктуационной помехи.

Рис. 1.2, б иллюстрирует наличие спектральных компонент частот y_0 и y_1 , а также спектра дискретного окна Дирихле. В результате преобразования (1.9) величина измеренной спектральной составляющей $F_{Wd}(y)$ частоты y_0 (рис. 1.2, в) определяется всей окрашенной частью спектра, изображенной на рис. 1.2, б.

Часто используют оконные функции, содержащие набор нечетных полупериодов косинусоидальных базисных функций, кратных интервалу T :

$$u_o(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sum}_o} \left[2 \sum_{k=1}^K c_k \cos((2k-1)\pi x) \right] = \\ = 2 \sum_{k=1}^K d_k \cos((2k-1)\pi x), & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \quad (1.10)$$

где $\text{Sum}_o = 2 \sum_{k=1}^K c_k$, $d_k = \frac{c_k}{\text{Sum}_o}$, $2 \sum_{k=1}^K d_k = 1$.

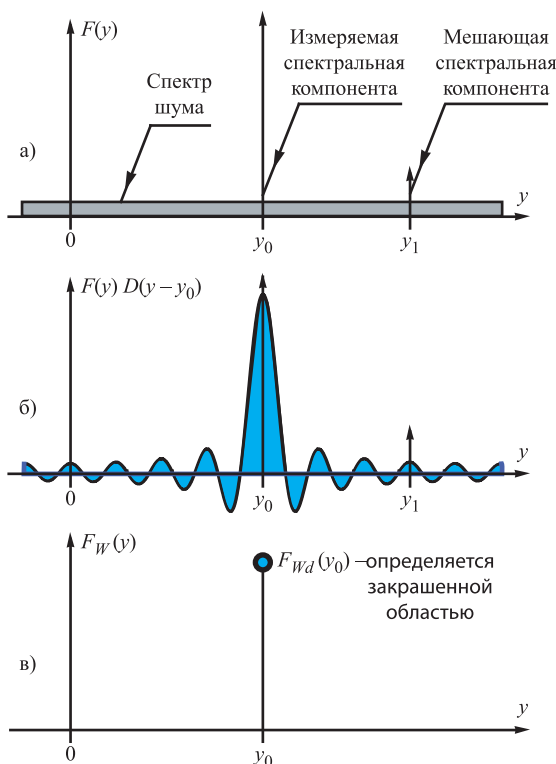


Рис. 1.2. Графическая интерпретация соотношения (1.8) (окно представлено в виде спектрально-го фильтра)

Нормированные спектры этих функций имеют вид:

$$F_o(y) = \frac{1}{S_o} \sum_{k=1}^K c_k [\text{sinc}(\pi(y+k-1/2)) + \text{sinc}(\pi(y-k+1/2))], \quad (1.11)$$

где $S_o = 2 \sum_{k=1}^K c_k \text{sinc}(\pi(k-1/2)) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^K (-1)^{k-1} \frac{c_k}{2k-1}$, $|y| < \infty$.

Эквидистантные отсчеты оконных функций (1.10), взятые на интервале T в точках $t_o = n\Delta T = nT/N$, определяются соотношением:

$$u_o(n) = \frac{1}{\text{Sum}_o} \left[2 \sum_{k=1}^K (-1)^k c_k \cos((2k-1)\pi n/N) \right], \quad 0 \leq n < N. \quad (1.12)$$

Значение числа K чаще всего выбирают $K \leq [N/2]$.

Функции, определяемые соотношением (1.10), могут быть представлены с использованием ортогональных косинусоидальных базисных функций соотношения (1.1) с применением следующих преобразований:

$$a_m = \sum_{k=1}^K (-1)^{m-1} \frac{(2k-1)c_k}{(2m)^2 - (2k-1)^2} \bigg/ \sum_{k=1}^K (-1)^{k-1} \frac{c_k}{2k-1}. \quad (1.13)$$

Возможно также использование взвешенной суммы функций (1.1) и (1.10):

$$u(x) = \alpha u_e(x) + (1 - \alpha) u_o(x), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.14)$$

Нормированный спектр таких функций соответственно равен:

$$F(y) = \alpha F_e(y) + (1 - \alpha) F_o(y). \quad (1.15)$$

Эквидистантные отсчеты оконных функций (1.14), взятые на интервале T в точках $t = n\Delta T = nT/N$, определяются соотношением:

$$u(n) = \alpha u_e(n) + (1 - \alpha) u_o(n), \quad 0 \leq n < N, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.16)$$

Иногда оконные функции определяются путем ограничения их спектра:

$$F_e(y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sum}_e} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m \cos(2\pi m y) \right] = \\ = b_0 + 2 \sum_{m=1}^M b_m \cos(2\pi m y), & |y| \leq 1/2, \\ 0, & |y| > 1/2, \end{cases} \quad (1.17)$$

где $\text{Sum}_e = 1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m$, $b_0 = \frac{1}{\text{Sum}_e}$, $b_m = \frac{a_m}{\text{Sum}_e}$, $b_0 + 2 \sum_{m=1}^M b_m = 1$, $y = \omega T / (2\pi) = fT$ — нормированная частота.

$$F_o(y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sum}_o} \left[2 \sum_{k=1}^K c_k \cos(\pi y(2k-1)) \right] = \\ 2 \sum_{k=1}^K d_k \cos(\pi y(2k-1)), & |y| \leq 1/2, \\ 0, & |y| > 1/2, \end{cases} \quad (1.18)$$

где $\text{Sum}_o = 2 \sum_{k=1}^K c_k$, $d_k = \frac{c_k}{\text{Sum}_o}$, $2 \sum_{k=1}^K d_k = 1$.

Нормированные временные соотношения таких функций определяются соответственно в виде:

$$u_e(x) = \text{sinc}(\pi x) + \sum_{m=1}^M a_m [\text{sinc}(\pi(x+m)) + \text{sinc}(\pi(x-m))], \quad (1.19)$$

где $|x| < \infty$, $x = t/T$ — нормированный временной интервал.

$$u_o(x) = \frac{1}{S_o} \sum_{k=1}^K c_k [\text{sinc}(\pi(x+k-1/2)) + \text{sinc}(\pi(x-k+1/2))], \quad (1.20)$$

где $S_o = 2 \sum_{k=1}^K c_k \text{sinc}(\pi(k-1/2)) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^K (-1)^{k-1} \frac{c_k}{2k-1}$, $|x| < \infty$.

1.2. Параметры оконных функций

Окна влияют на многие показатели анализа информации с помощью ДПФ, в том числе на обнаружение гармонических составляющих, разрешение, динамический диапазон, степень достоверности и реализуемости вычислительных операций. Чтобы иметь возможность сравнивать характеристики оконных функций, необходимо знать, какие из их параметров являются наиболее значимыми [1, 5].

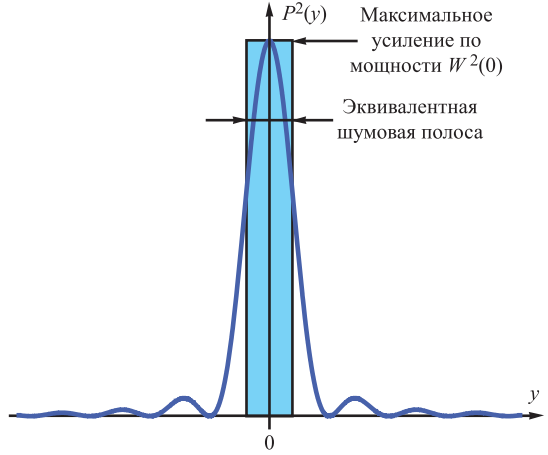
Учитывая, что для обеспечения высокой разрешающей способности ДПФ обычно выбирают весьма большую частоту дискретизации оконных функций, без большой погрешности можно оценивать параметры непрерывных оконных функций (1.1), (1.10) и их спектров (1.2), (1.11), спектральных (1.17), (1.18), а также временных соотношений (1.19), (1.20).

1.2.1. Эквивалентная шумовая полоса

Погрешность оценки амплитуды гармонической компоненты частоты, соответствующей экстремуму спектра оконной функции, возникает, например, за счет наличия широкополосной помехи, попадающей в полосу пропускания окна. Для уменьшения влияния шума необходимо минимизировать его мощность за счет сужения полосы пропускания окна.

Мерой ширины полосы эквивалентного фильтра является его эквивалентная шумовая полоса $\Delta F_{\text{ш}}$, равная полосе пропускания прямоугольного фильтра с таким же максимальным усилением мощности и площадью, равной площади квадрата спектральной функции окна (рис. 1.3).

Рис. 1.3. Эквивалентная шумовая полоса окна



По форме оконной функции $u(x)$ эквивалентную шумовую полосу $\Delta F_{\text{ш}}$, нормированную по мощности шума на бин (единичный временной интервал), можно определить следующим соотношением:

$$\Delta F_{\text{ш}} = \int_{-1/2}^{1/2} u^2(x) dx \bigg/ \left[\int_{-1/2}^{1/2} u(x) dx \right]^2. \quad (1.21)$$

При форме оконных функций (1.1) и (1.10) эквивалентные шумовые полосы (на бин) определяются соответственно следующим образом:

$$\Delta F_{\text{ш } e} = 1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m^2, \quad (1.21.1)$$

$$\Delta F_{\text{ш } o} = \frac{\pi^2}{8} \times \frac{\sum_{k=1}^K c_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=k+1}^K c_k c_l [\text{sinc}(\pi(k-l)) + \text{sinc}(\pi(k+l-1))]}{\sum_{k=1}^K \frac{c_k^2}{(2k-1)^2} + 2 \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=k+1}^K \frac{(-1)^{k+l} c_k c_l}{(2k-1)(2l-1)}}. \quad (1.21.2)$$

1.2.2. Усиление преобразования

Усиление преобразования (processing gain, PG) фильтра, также называемое когерентным усилением (coherent gain, CG), и потери пре-

образования (processing loss, PL) вызваны тем, что оконная функция сглаживает отсчеты гармонических составляющих, расположенных на ее границах.

При отсутствии шума спектральная составляющая пропорциональна амплитуде U входного сигнала, а коэффициент пропорциональности при ДПФ равен сумме всех дискретных отсчетов окна. Для прямоугольного окна этот коэффициент PG равен числу отсчетов N , а для других функций PG меньше, поскольку обычно оконная функция плавно спадает до нуля на границах. Вместо PG часто используется другой параметр — когерентное усиление CG, полученное суммированием дискретных отсчетов окна, нормированное относительно его максимального значения N .

Следовательно, когерентное усиление при $N \rightarrow \infty$ определяется площадью оконной функции $u(x)$:

$$CG = \int_{-1/2}^{1/2} u(x) dx. \quad (1.22)$$

При оконных функциях, определяемых соотношениями (1.1) и (1.10), эти величины соответственно равны:

$$CG_e = 1 / \left[1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m \right], \quad (1.22.1)$$

$$CG_o = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1} c_k}{2k-1} / \sum_{k=1}^K c_k. \quad (1.22.2)$$

Учитывая, что при ДПФ когерентная составляющая усиления по мощности определяется квадратом суммы отсчетов оконной функции, а некогерентное усиление по мощности равно сумме квадратов ее отсчетов, усиление преобразования PG при $N \rightarrow \infty$ определяется как частное от деления отношений мощностей сигнала и шума на выходе и входе преобразователя:

$$PG = \frac{S_{\text{ВЫХ}}/N_{\text{ВЫХ}}}{S_{\text{ВХ}}/N_{\text{ВХ}}} = \frac{\left[\int_{-1/2}^{1/2} u(x) dx \right]^2}{\int_{-1/2}^{1/2} u^2(x) dx} = \frac{1}{\Delta F_{\text{ш}}}. \quad (1.23)$$

Таким образом, усиление преобразования — величина, обратная эквивалентной шумовой полосе окна, и увеличение $\Delta F_{\text{ш}}$ влечет уменьшение PG.

1.2.3. Корреляция перекрывающихся участков

Если требуется обработать достаточно длительную последовательность данных, ее разбивают на несколько участков, по N отсчетов в каждой, обеспечивающих требуемое спектральное разрешение Δf . Следует заметить, что соотношение между частотой дискретизации f_s и числом N обеспечивает необходимое разрешение, достижимое с использованием ДПФ:

$$\Delta f = \beta \cdot f_s / N, \text{ где } \beta \text{ выбирается равным } \Delta F_{\text{ш}}.$$

Если при преобразованиях используются неперекрывающиеся участки входных данных (рис. 1.4, а), то значительная их часть, расположенная на границах окна, практически не используется. Для устранения этого недостатка преобразованию подвергаются перекрывающиеся участки (рис. 1.4, б) со степенью перекрытия от 50 до 75%.

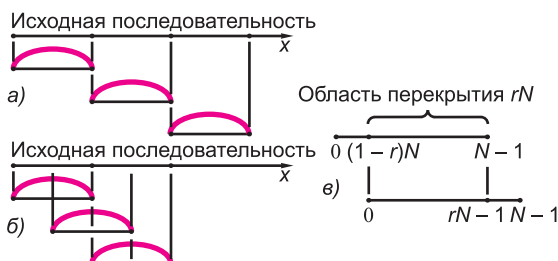


Рис. 1.4. Разбиение последовательностей на неперекрывающиеся и перекрывающиеся участки

При этом возникает вопрос о степени корреляции случайных составляющих сигнала, расположенных на смежных участках. При равномерном спектре шума эта функция в зависимости от коэффициента перекрытия r (см. рис. 1.4, в) определяется соотношением (в %):

$$C(r) = 100 \cdot \int_{1/2-r}^{1/2} u(x) \cdot u(x-1+r) dx \bigg/ \int_{1/2}^{1/2} u^2(x) dx. \quad (1.24)$$

При формах оконной функции, определяемых соотношениями (1.1) и (1.10), корреляция перекрывающихся участков определяется соответственно соотношениями:

$$\begin{aligned}
C_e(r) = & \frac{100 \cdot r}{1 + 2 \sum_{m=1}^M a_m^2} \times \\
& \times \left\{ 1 + 4 \sum_{m=1}^M (-1)^m a_m \operatorname{sinc}(2\pi mr) + \right. \\
& + 2 \sum_{m=1}^M a_m^2 [\cos(2\pi mr) + \operatorname{sinc}(2\pi mr)] + \\
& \left. + 4 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=m+1}^M (-1)^{m+l} a_m a_l \frac{m^2 \operatorname{sinc}(2\pi mr) - l^2 \operatorname{sinc}(2\pi lr)}{m^2 - l^2} \right\}, \quad (1.24.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_o(r) = & 100 \cdot r \times \\
& \times \left\{ \sum_{k=1}^K c_k^2 [(-1)^{2k-1} \cos \pi r(2k-1) + \operatorname{sinc}(\pi r(2k-1))] + \right. \\
& + \frac{1}{2\pi r} \sum_{k=1}^{K-1} k = 1^{K-1} \sum_{l=k-1}^K (-1)^{k-l} c_k c_l \times \\
& \times \frac{(2k-1) \sin(\pi r(2l-1)) - (2l-1) \sin(\pi r(2k-1))}{(k-l)(k+l-1)} \Big\} \times \\
& \times \left\{ \sum_{k=1}^K c_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=k+1}^K c_k c_l [\operatorname{sinc}(\pi(k-l)) + \operatorname{sinc}(\pi(k+l-1))] \right\}^{-1}. \quad (1.24.2)
\end{aligned}$$

Для уменьшения погрешности измерений обычно усредняют результаты обработки данных в смежных областях. Результат таких преобразований для случаев 50% и 75% перекрытий определяется следующим образом [1]:

для 50% перекрытия

$$\frac{\sigma_{\text{средн}}^2}{\sigma_{\text{измер}}^2} = \frac{1}{L} [1 + 2C^2(0,5)] - \frac{2}{L^2} C^2(0,5)$$

и для 75% перекрытия

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\text{средн}}^2}{\sigma_{\text{измер}}^2} = & \frac{1}{L} [1 + 2C^2(0,75) + 2C^2(0,5) + 2C^2(0,25)] - \\
& - \frac{2}{L^2} [C^2(7,5) + 2C^2(0,5) + 3C^2(0,25)],
\end{aligned}$$

где L — количество усреднений независимых измерений.

1.2.4. Паразитная амплитудная модуляция спектра

Паразитная амплитудная модуляция спектра (scalping loss, SL), или эффект «частокола» (picket-fence effect), определяет возможность использования оконной функции для обнаружения слабых сигналов. Гармонические сигналы, кратные частотам f_s/N , где f_s — частота дискретизации, называют базисными векторами, или бинами ДПФ.

Возникает вопрос, каковы будут дополнительные потери при обработке сигнала, если его частота располагается посередине между частотами соседних бинов, т.е. его относительная частота равна $(k + 1/2)f_s T/N$.

Принято считать, что потери из-за паразитной амплитудной модуляции спектра SL равны отношению когерентного усиления на самой неблагоприятной для ДПФ частоте сигнала, расположенного посередине между двумя бинами ДПФ, к когерентному усилению тона, совпадающего с одним из бинов ДПФ. В этом случае потери максимальны.

Значение паразитной амплитудной модуляции спектра вычисляется в децибелах по формуле:

$$SL = -20 \lg \frac{\int_{-1/2}^{1/2} u(x) \cos(\pi x) dx}{\int_{-1/2}^{1/2} u(x) dx}. \quad (1.25)$$

При формах оконных функций, определяемых соотношениями (1.1) и (1.10), SL равно (дБ):

$$SL_e = -20 \lg \left\{ \frac{2}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} \frac{a_m}{4m^2 - 1} \right] \right\}, \quad (1.25.1)$$

$$SL_o = -20 \lg \left\{ \frac{\sum_{k=1}^K c_k \frac{(-1)^{\text{round}(k/2)} [k + (-1)^k (k-1)]}{(k-1)(3k-1)}}{\sum_{k=1}^K c_k \frac{(-1)^k}{(2k-1)}} \right\}. \quad (1.25.2)$$

1.2.5. Максимальные потери преобразования

Максимальные потери преобразования (maximum processing loss, MPL) определяются суммой потерь из-за паразитной амплитудной модуляции спектра для данного окна (в децибелах) и потерь преобразования, обусловленных формой этого окна. Этот параметр характери-

Производство книг на заказ
Издательство «ТЕХНОСФЕРА»
тел.: (495) 234-01-10
e-mail: knigi@technosphera.ru

Реклама в книгах:

- модульная
- статьи

Подробная информация о книгах на сайте
<http://www.technosphera.ru>

Дворкович Виктор Павлович
Дворкович Александр Викторович

Оконные функции
для гармонического анализа сигналов
Издание второе, переработанное и дополненное

Компьютерная верстка – С.А. Кулешов
Корректор – А.А. Конькова
Дизайн – М.А. Костарева
Выпускающий редактор – О.Н. Кулешова
Ответственный за выпуск – С.А. Орлов

Подписано в печать 10.02.2016
Формат 60х90/16. Печать офсетная.
Гарнитура Computer modern LaTeX
Печ.л. 13,5. Тираж 200 экз. Зак. № Т432
Бумага офсет. №1, плотность 65 г/м².

Издательство «ТЕХНОСФЕРА»
Москва, ул. Краснопролетарская, д.16, стр.2

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в типографии ПАО «Т 8 Издательские Технологии»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д.42