

В. В. Петров

НЕЛИНЕЙНАЯ
ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ
СТРОИТЕЛЬНАЯ
МЕХАНИКА

УДК 539.3
ББК 38.112
П 30

Рецензенты:

*академик РААСН, доктор технических наук, профессор В. И. Травуш,
доктор технических наук, заведующий кафедрой ССМиК Тульского ГУ,
профессор А. А. Трещев,
доктор технических наук, профессор СПб ГАСУ В. В. Карнов.*

Петров, В. В.

П 30 Нелинейная инкрементальная строительная механика : монография /
В. В. Петров.– 3-е изд., перераб. и доп. – Москва ; Вологда : Инфра-
Инженерия, 2020. – 484 с. : ил., табл.
ISBN 978-5-9729-0405-1

В книге рассмотрены различные аспекты решения задач нелинейной строительной механики тонкостенных пространственных систем. Необходимость расчета конструкций на устойчивость и стремление полнее использовать возможности конструкционных материалов потребовало учета конечных перемещений и перехода к общим нелинейным зависимостям напряжений от деформаций. Поэтому нелинейные задачи включены в число объектов рассматриваемых строительной механикой.

В книге обсуждаются и развиваются методы расчета тонкостенных пространственных систем, с помощью которых нелинейные задачи можно решать с помощью линейных уравнений. Это возможно сделать в рамках инкрементального подхода, когда на основе нелинейных уравнений получают линейные инкрементальные уравнения, содержащие в качестве неизвестных приращения (инкременты) искомых функций.

Книга адресована широкому кругу читателей, научным работникам, преподавателям вузов, инженерам проектировщикам, специализирующимся в области расчета тонкостенных конструкций, аспирантам и магистрантам.

УДК 539.3
ББК 38.112

ISBN 978-5-9729-0405-1

© В. В. Петров, 2020
© Издательство «Инфра-Инженерия», 2020
© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
--------------------------	----------

Глава 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ	13
--	-----------

Основные соотношения нелинейной механики твердого деформируемого тела	13
Механические свойства материалов при одноосном растяжении	20
Теория малых упруго-пластических деформаций	28
Уравнение изгиба балки из нелинейно-упругого материала	34
Уравнение изгиба пластинки из нелинейно-упругого материала	36
Смешанная форма уравнений изгиба пологой оболочки из нелинейно-упругого материала	39
Уравнения гибких пологих оболочек в смешанной форме	42
Уравнения изгиба гибких пологих оболочек в перемещениях	46
Уравнения изгиба физически и геометрически нелинейных пологих оболочек	49
Граничные условия	50
Полная энергия деформации гибкой пологой оболочки	51

Глава 2. ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ	54
---	-----------

Получение инкрементальных уравнений	54
Линеаризация уравнений методом последовательных нагружений	61
Итерационные методы уточнения решений метода последовательных нагружений	65
Выделение главной части решения	69
Уточнение главной части решения модифицированным методом А.А. Ляпунова	72
Уточнение решения методом наискорейшего спуска	73
Экстраполяционные и интерполяционные методы уточнения решений	75
Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров	76
Фундаментальная инкрементальная система уравнений механики деформируемого твердого тела	80
Физические инкрементальные уравнения нелинейно-упругого сжимаемого материала	92
Инкрементальные уравнения изгиба оболочек из нелинейно деформируемого материала	96
Инкрементальные уравнения изгиба пологих оболочек пластинок и балок	102
Инкрементальные уравнения гибких пологих оболочек в перемещениях	107

Инкрементальные уравнения в полных функциях	108
Уравнения изгиба физически нелинейных гибких пологих оболочек в полных функциях	114
Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ	117
Инкрементальные уравнения геометрически нелинейной теории пологих оболочек	117
Выделение главной части решения	118
Выделение главной части решения при расчете гибких круглых пластинок	119
Главная часть решения гибкой полой оболочки на прямоугольном плане	125
Расчет гибких оболочек методом Бубнова-Галеркина	145
Оболочки шарнирно-неподвижно опертые по контуру	150
Несимметричные формы потери устойчивости гибких цилиндрических панелей	154
Применение вариационного метода Власова-Канторовича	156
Деформации пластин и цилиндрических панелей под действием сжимающих сил приложенных на контуре	163
Сравнение метода Власова-Канторовича с методом вариационных итераций и другими методами	166
Глава 4. ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ	168
Изгиб балок из нелинейно-упругого материала	169
Расчет балок вариационным методом Ритца-Тимошенко	169
Расчет балки методом Бубнова-Галеркина	176
Расчет нелинейно-упругих балок методом упругих решений	180
Расчет нелинейно-упругой балки методом переменных параметров упругости	185
Расчет нелинейно-упругой балки методом Ньютона-Канторовича	188
Инкрементальное уравнение изгиба балки из нелинейно деформируемого материала	194
Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров	198
Решение инкрементальных уравнений изгиба балки методом конечных разностей	202
Инкрементальная форма метода Ритца-Тимошенко	203
Решение инкрементального уравнения изгиба балки методом Бубнова-Галеркина	205
Расчет нелинейно-упругих пластинок	208
Расчет пластинки методом Ритца-Тимошенко	209
Расчет пластинки методом Бубнова-Галеркина	212
Расчет нелинейно-упругих пластинок методом упругих решений	214
Расчет нелинейно-упругой пластинки методом переменных параметров упругости	215

Инкрементальное уравнение изгиба пластинки из нелинейно-деформируемого материала	217
Инкрементальная форма метода Ритца-Тимошенко при расчете пластинок	221
Решение инкрементального уравнения изгиба пластинки методом Бубнова-Галеркина	223
Решение инкрементального уравнения изгиба пластинки методом Власова-Канторовича	225
Решение инкрементального уравнения изгиба пластинки методом вариационных итераций	229
Расчет нелинейно-упругой пластинки методом Ньютона-Канторовича	231
Инкрементальные уравнения изгиба пластинки в полных функциях	232
Расчет нелинейно-упругих оболочек	233

Глава 5. НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫЕ ГИБКИЕ ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ

Пологие оболочки на прямоугольном плане	239
Влияние граничных условий на устойчивость оболочек	249
Симметричные и несимметричные формы потери устойчивости нелинейно деформируемых гибких пологих оболочек	253
Бифуркационные формы потери устойчивости физически нелинейных гибких пологих оболочек	257
Устойчивость цилиндрических панелей под действием сжимающих контурных нагрузок	263
Анализ вариантов инкрементальных уравнений теории пологих оболочек	267

Глава 6. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ БАЛОК, ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

Общие замечания о неоднородных конструкциях	276
Расчет балок при упрочнении поверхностных слоев	280
Расчет пластинок при упрочнении поверхностных слоев	285
Расчет гибких неоднородных пологих оболочек шарнирно опертых по контуру из физически нелинейного материала	293
Исследование неоднородных пологих оболочек жестко зашемленных по контуру с двумя видами нелинейности	298

Глава 7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНСТРУКЦИЙ С АГРЕССИВНЫМИ СРЕДАМИ

Вводные замечания	303
Моделирование процессов взаимодействия конструкций с агрессивной средой	308
Виды взаимодействий материалов и сред	312
Модели поверхностного коррозионного разрушения	317

Модели коррозионного разрушения, учитывающие изменение сплошности материала	328
Инкрементальные физические уравнения, учитывающие изменение сплошности материала	333
Расчет долговечности изгибаемых балок при использовании функции сплошности	336
Определение долговечности пластинок при изгибе в агрессивной среде	340
Модели, учитывающие процессы накопления повреждений	344
Инкрементальные физические уравнения, учитывающие накопление повреждений	353
Расчет долговечности изгибаемых балок при использовании функции накопления повреждений	355
Теория развивающейся неоднородности	360
Изгиб пластинки в агрессивной среде	370
Описание общего алгоритма расчета	383
Влияние параметров модели наведенной неоднородности на долговечность пластинок в агрессивных средах	384
Долговечность физически нелинейных пологих оболочек	392
Долговечность гибких пологих оболочек из нелинейно деформируемого материала	402

Глава 8. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА НЕЛИНЕЙНОМ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ

Многофазные грунты как объект исследования	411
Применение уравнений механики сплошных сред при моделировании процесса деформирования основания	415
Плоская модель линейно деформируемого основания с развивающейся неоднородностью	424
Изгиб балки на упругом неоднородном основании	436
Пространственная модель линейно деформируемого основания с развивающейся неоднородностью	437
Техническая теория нелинейного неоднородного основания	439
Исследование модели нелинейно деформируемого основания	448
Изгиб балки на нелинейно-деформируемом основании	453
Пространственная модель нелинейно деформируемого основания с развивающейся неоднородностью	459
Изгиб пластинки на неоднородном основании	461
Инкрементальные уравнения деформационной теории пластичности с учетом сжимаемости материала основания	462
Плоская модель нелинейно деформируемого основания с развивающейся неоднородностью с учетом сжимаемости материала	467
Пространственная модель нелинейно деформируемого основания с развивающейся неоднородностью с учетом сжимаемости материала	468
ЛИТЕРАТУРА	474

Глава 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Основные соотношения нелинейной механики твердого деформируемого тела

В этой главе приводятся основные уравнения механики твердого деформируемого тела и необходимые соотношения, используемые в последующих главах монографии.

Основной задачей механики твердого деформируемого тела является построение математических моделей процессов деформирования конструкций. Эта задача решается путем математического построения обоснованных определяющих уравнений, связывающих между собой напряжения, перемещения и деформации точек тела при внешних воздействиях. В то же время определяющие соотношения между напряжениями и деформациями могут быть правильно математически сформулированы лишь на основе обобщения результатов экспериментальных исследований. Требования к направленности экспериментальных исследований формулируются в процессе построения математической модели. Такой подход носит название феноменологического подхода.

Основной гипотезой механики деформируемого тела является так называемая *гипотеза о сплошности* строения тела. По этой гипотезе сплошное тело, то есть тело непрерывное до деформации остается непрерывным и после деформации; непрерывным остается любой объем тела, в том числе и микрообъем. Поэтому деформации и перемещения точек тела являются непрерывными функциями координат.

Таким образом, в классической механике деформируемого твердого тела не учитывается дискретное атомистическое строение вещества и движение отдельных молекул. В механике сплошной среды деформации определяются с помощью феноменологических понятий, подтверждаемых макроопытом. Можно считать, что все величины, характеризующие напряжения и деформации являются статистическими средними величинами в конгломерате зерен металлов и в других технических конструкционных

материалов. Взаимоотношения между механикой сплошной среды и физической теорией строения вещества это взаимоотношения между макро- и микрофизикой.

Другими гипотезами механики сплошной среды является наделение материала тела свойствами естественно ненапряженного состояния, шаровой изотропии, совершенной однородности. Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии предполагает, что начальные напряжения в теле, характер и величина которых зависят от истории его возникновения, полагаются равными нулю. В соответствии с этим определяемые напряжения являются приростом напряжений в рассматриваемых точках по отношению к неизвестным начальным напряжениями в этих же точках.

Шаровая изотропия материала проявляется в том, что его физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям, проведенным из каждой произвольной точки: любую плоскость, проходящую через эту точку, можно рассматривать как плоскость симметрии. Полагая, что этим свойством обладают все микрообъемы материала, приходим к понятию *однородного изотропного тела*.

Механика сплошной среды не рассматривает микропроцессы, в реальных телах. Она описывает процессы деформирования с макроскопической точки зрения, не вдаваясь в физическую суть происходящих явлений, и опирается на феноменологическую сторону процессов.

Напряженное и деформированное состояние в точке тела полностью определено, если в ней известны тензоры напряжений и деформаций. Тензор напряжений T_σ имеет вид квадратной матрицы

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

В силу закона взаимности (парности касательных напряжений), впервые доказанным Коши, для определения напряженного состояния достаточно знать только шесть компонент тензора напряжений, так как

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.2)$$

Деформированное состояние в окрестности произвольной точки тела определяется тензором деформаций T_ε , который также имеет вид квадратной матрицы

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

где введены обозначения: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные линейные деформации, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – относительные угловые деформации, причем в соответствии с определением относительной угловой деформации

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (1.4)$$

Напряженное и деформированное состояние в точке можно описать тремя главными нормальными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, действующими в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через рассматриваемую точку, и тремя главными удлинениями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Если деформируемое тело изотропно, то направления главных деформаций совпадают с соответствующими направлениями главных напряжений. При определенных условиях деформирования, например при сложном нагружении, это правило может нарушаться.

Связь между главными напряжениями в точке тела и напряжениями на произвольно ориентированной площадке, проходящей через эту точку, описывается кубическим уравнением

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (1.5)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Корнями этого уравнения являются главные нормальные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Так как главные напряжения не изменяются при повороте координатных осей, то коэффициенты уравнения (1.5) являются инвариантами тензора напряжений по отношению к повороту координатных осей. Любая функция трех главных напряжений инвариантна по отношению к координатной системе и может быть названа инвариантом напряженного состояния.

А.А. Ильюшин ввел понятия простого и сложного нагружения. Если все компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально одному параметру, то нагружение будет *простым*, в противном случае оно будет *сложным*.

Главные относительные удлинения $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ определяются как корни кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - \theta_1 \varepsilon^2 + \theta_2 \varepsilon - \theta_3 = 0 \quad (1.7)$$

Величины $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ являются инвариантами тензора деформаций и определяются следующим образом

$$\theta_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$\theta_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \quad (1.8)$$

$$\theta_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

Тензор напряжений можно представить в виде суммы шарового тензора $T_\sigma^{(0)}$ и девиатора тензора напряжений D_σ

$$T_\sigma = T_\sigma^{(0)} + D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

здесь $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ – среднее напряжение.

Тензор деформаций тоже можно представить в виде суммы шарового тензора $T_\varepsilon^{(0)}$ и девиатора тензора деформаций D_ε

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^{(0)} + D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

здесь $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ – средняя деформация, причем $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\vartheta$, где ϑ – относительное изменение объема. Девиатором деформаций оценивается степень отклонения деформированного состояния, описываемого тензором деформаций, от гидростатического растяжения – сжатия. Таким образом, если тело находится в однородном деформированном состоянии, описываемом шаровым тензором деформаций, то его форма не изменится. Если деформированное состояние описывается девиатором деформаций, то изменяется его форма, но не объем.

При решении задач механики твердого тела удобно пользоваться обобщенными напряжениями и обобщенными деформациями, которые называются интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i и определяются по формулам А.А. Ильюшина [1]

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

При расчете конструкций используется модель плоской задачи теории упругости и гипотеза о прямой нормали. В этом случае интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций ε_i определяются по формулам, которые будут использоваться в приложениях

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \\ \varepsilon_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}\end{aligned}\quad (1.6, a)$$

Интенсивность напряжений и интенсивность деформаций не имеют физического смысла, так как не могут быть определены как напряжения и деформации, действующие на какой-либо площадке. Однако эти параметры по сравнению с другими характеристиками напряженно-деформированного состояния имеют ряд преимуществ. Например, при одноосном растяжении интенсивность напряжений равна растягивающему напряжению $\sigma_i = \sigma_1 = \sigma_x$, а интенсивность деформаций (при $\mu = 0,5$) равна деформации в направлении приложенного усилия.

А.А. Ильюшин ввел понятия тензоров подобия: *направляющего тензора напряжений* D_σ^* и *направляющего тензора деформаций* D_ε^* . Направляющий тензор напряжений представляет собой девиатор тензора напряжений, компоненты которого разделены на модуль девиатора напряжений σ ($D_\sigma^* = D_\sigma / \sigma$). Модуль девиатора напряжений определяется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.7)$$

Сравнивая формулы (1.7) и (1.6) замечаем, что они отличаются лишь коэффициентами и справедлива зависимость $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma$.

Положительную величину

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (1.8)$$

называют *модулем девиатора деформаций*. *Направляющим тензором деформации* называют девиатор тензора деформаций, все компоненты которого разделены на модуль девиатора деформаций ($D_\varepsilon^* = D_\varepsilon / \varepsilon$). Сравнивая формулы (1.8) и (1.6) замечаем, что они отличаются лишь коэффициентами

и справедлива зависимость $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon$.

Задачи механики твердого деформируемого тела описываются фундаментальной системой уравнений, которая содержит три группы уравнений: статические, геометрические и физические. Путем введения дополнительных гипотез из фундаментальной системы уравнений получаются разрешающие уравнения, которые используются для определения напряженно-деформированного состояния конкретных конструкций.

В зависимости от условий деформирования конструкции, уравнения отдельных групп фундаментальной системы могут быть линейными и нелинейными. Если отказаться от предположения малости перемещений и углов поворота, то возникает так называемая *геометрическая нелинейность*. В этом случае используются нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями, которые позволяют учитывать влияние изменения формы и размеров конструкции на ее напряженно-деформированное состояние. Отказ от закона Гука, предполагающего линейную зависимость между напряжениями и деформациями, составляет содержание *физической нелинейности*.

Если в процессе деформирования изменяется расчетная схема конструкции, например, изменяются граничные условия, то можно говорить о *конструктивной нелинейности*. Рассмотрение нелинейных задач с одной стороны обогащает содержание решаемых задач, а с другой стороны существенно усложняет их решение. В частности, нельзя применять принцип суперпозиции и основанные на нем теоремы механики.

Для дальнейшего изложения нам необходимо иметь фундаментальную систему уравнений нелинейной механики, которая представляет собой совокупность статических, геометрических и физических уравнений. Статическая группа уравнений получается на основе применения основной теоремы статики и использовании принципа отвердения (расчет по недеформированной схеме).

Принцип отвердения состоит в том, что равновесие деформируемой системы не нарушается, если предположить, что система стала абсолютно твердым телом. Применяя основную теорему статики для определения равновесия элементарного объема тела получим уравнения равновесия Навье, которые при использовании принципа отвердения становятся линейными, и представляют собой следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ – компоненты тензора напряжений в системе координат x, y, z . X, Y, Z – компоненты массовых сил. Эти уравнения описывают статическую сторону задачи.

Геометрические уравнения определяют связь деформаций и перемещений. Деформации и перемещения в общем случае связаны друг с другом нелинейными соотношениями, которые имеют следующий вид [2]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right], \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right], \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Угловые относительные деформации и компоненты вектора перемещений связаны друг с другом также нелинейными соотношениями и имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right), \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial y} \right), \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

здесь U – перемещение в направлении оси x , V – перемещение в направлении оси y , W – перемещение в направлении оси z (компоненты вектора перемещений).

При расчете тонкостенных конструкций обычно считают, что тангенциальные перемещения U, V малы по сравнению с перемещением W (прогиб) поэтому в уравнениях (1.10), (1.11) в случае плоской задачи можно удержать нелинейные члены только относительно прогиба. В результате получим более простые соотношения

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}
\end{aligned} \right\} \tag{1.10, a}$$

Для замыкания фундаментальной системы необходимо сформулировать физическую группу уравнений. Вопрос о физической достоверности определяющих соотношений, описывающих процессы нагружения, для большинства математических моделей механики твердого деформируемого тела является недостаточно изученным и возможность их экспериментальной проверки является принципиальным вопросом.

А.А. Ильюшин сформулировал постулат изотропии, в соответствии с которым девиатор напряжений является вполне определенной однознач-

ной функцией девиатора деформаций. Как известно, в случае малых деформаций поведение материала описывается обобщенным законом Гука, который предполагает линейную зависимость между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций. Эти уравнения описывают поведение идеально упругого тела.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Решая эти алгебраические уравнения относительно напряжений, получим их зависимости от деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], & \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)], & \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], & \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx}\end{aligned}\quad (1.13)$$

здесь E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона.

Для многих первоначально изотропных материалов справедлива следующая зависимость между относительной объемной деформацией и средним напряжением $\vartheta = \sigma_0 / K$, где K – модуль объемной деформации определяемый по формуле

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (1.14)$$

В том случае, если зависимость между напряжениями и деформациями перестает быть линейной, необходимо привлекать теории пластичности или ползучести.

Механические свойства материалов при одноосном растяжении

Для расчетов за пределом упругости материала необходимо иметь экспериментальную диаграмму деформирования, которая представляет собой график зависимости между напряжениями и деформациями. Для определения напряжений силу P , растягивающую образец, относят к первоначальной площади поперечного сечения F_0 , а при определении деформаций удлинение образца Δl – к первоначальной длине образца l_0 . Такой график называется условной диаграммой растяжения или просто диаграммой рас-

тяжения. На *рис. 1.1* показана диаграмма деформирования, характерная для низкоуглеродистой стали.

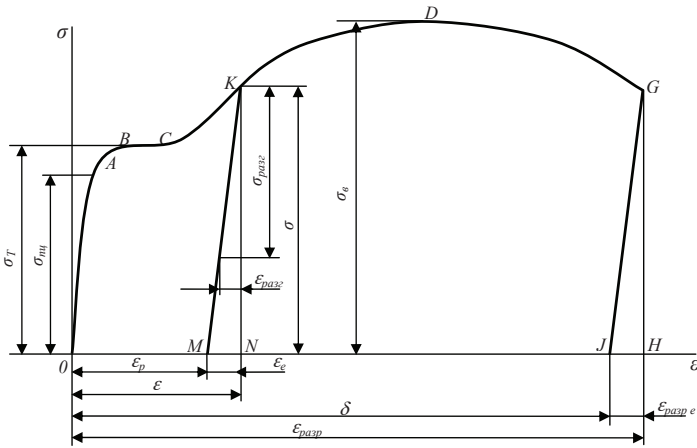


Рис. 1.1

В начальной стадии деформирования справедлив закон Гука, поэтому зависимость между напряжениями и деформациями – прямая линия (участок OA). При напряжении, равном σ_{nc} и называемом *пределом пропорциональности*, линейная зависимость нарушается (участок AB). Горизонтальный участок BC называется *площадкой текучести*, соответствующее ему напряжение σ_T – *пределом текучести* материала. Площадка текучести BC переходит в кривую CKD , которая называется *кривой упрочнения*. Эта кривая имеет максимум в точке D . Соответствующее этой точке напряжение σ_σ называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением* материала.

Если в некоторой точке K образец разгрузить, то диаграмма разгрузки KM не совпадет с диаграммой нагружения. Она представит собой прямую, параллельную начальному участку OA , то есть разгрузка осуществляется по линейному закону. Таким образом, полная деформация может быть представлена в виде суммы упругой деформации ϵ_e и остаточной или пластической деформации ϵ_p , остающейся после полной разгрузки.

Если на условной диаграмме площадка текучести отсутствует, то вводится понятие условного предела текучести, которая обычно равна относительной деформации примерно $0,2\%$.

Для упрощения расчетов за пределом упругости диаграммы деформирования обычно схематизируют и заменяют линиями, хорошо совпа-

дающими с экспериментальными диаграммами. На *рис. 1.2* показан вариант схематизации диаграммы деформирования диаграммой без упрочнения, это модель идеального упругопластического тела. На *рис. 1.3* показана диаграмма, характерная для модели жесткопластического тела.

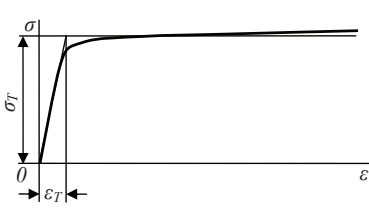


Рис. 1.2

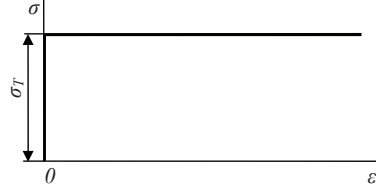


Рис. 1.3

На *рис. 1.4* показана схематизация диаграммы деформирования диаграммой с площадкой текучести и линейным упрочнением. На *рис. 1.5* показана схематизация диаграммы деформирования диаграммой с площадкой текучести и нелинейным упрочнением.

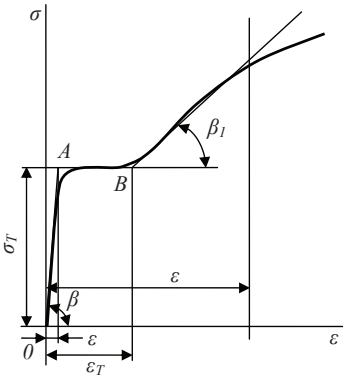


Рис. 1.4

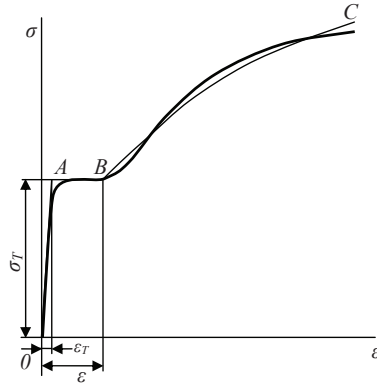


Рис. 1.5

Если площадка текучести выражена слабо, то все три участка кривой деформирования можно представить в виде непрерывной аналитической кривой (*рис. 1.6*). В расчетах за пределом упругости схематизированная диаграмма должна наиболее хорошо описывать интересующий нас диапазон деформаций.

На *рис. 1.6* показаны варианты схематизации экспериментальной диаграммы. Диаграмма с упрочнением *BC* применяется, если интересую-

ший нас диапазон деформаций не превышает 5%, диаграмма с участком упрочнения BC_1 соответствует пределу деформаций 10%, непрерывная кривая – схематизация диаграммы со степенным упрочнением. После схематизации диаграммы ее следует описать подходящими математическими выражениями. Кроме того, полагаем, что в пределах сравнительно малых деформаций диаграммы деформирования $\sigma(\varepsilon)$ при растяжении и сжатии совпадают.

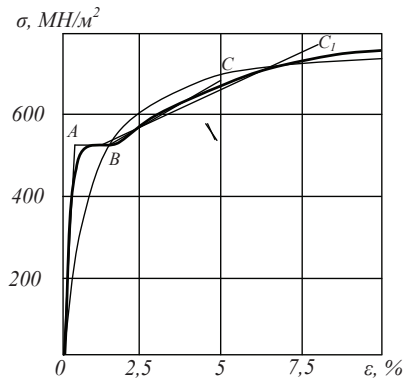


Рис. 1.6

Пластичностью называют способность твердого деформируемого тела получать под действием нагрузок остаточные (пластические) деформации ε_p , не исчезающие после удаления нагрузок. Если при нагружении твердого тела возникают лишь упругие деформации ε_e , то расчеты необходимо вести по уравнениям теории упругости. Для некоторых материалов, называемых нелинейно-упругими, деформации исчезают при полной разгрузке, траектории нагружения и разгрузки совпадают, но диаграмма деформирования является нелинейной (рис. 1.7, а).

Для упругопластического материала, нагруженного выше предела упругости $\sigma_{упр}$, при снятии нагрузки траектория разгрузки соответствует прямой BC , практически параллельной прямолинейному начальному участку OA (рис. 1.7, б). Это означает, что при пластической деформации нет взаимнооднозначного соответствия между напряжением σ и деформацией ε , и необходимо знать всю историю деформирования материала.

В физически нелинейных телах напряжения и деформации связаны нелинейно и в случае сложного напряженного состояния зависимости между ними можно придать аналитический вид:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad \tau_i = \varphi(\gamma_i), \quad (1.15)$$

или

$$\sigma_i = E(\varepsilon_i)\varepsilon_i, \quad \tau_i = G(\gamma_i)\gamma_i, \quad (1.16)$$

где σ_i – интенсивность напряжений ε_i – интенсивность деформаций, а $E(\varepsilon_i) = E^*$, $G(\gamma_i) = G^*$ величины, зависящие от деформаций, называются соответственно переменными модулями упругости и сдвига.

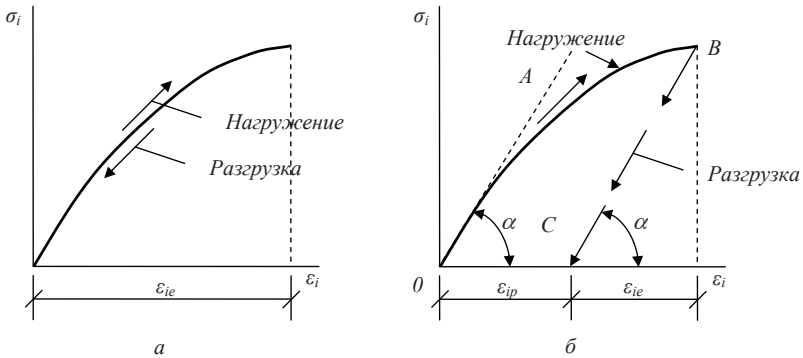


Рис. 1.7

В упругом теле величины модуля упругости E , объемного модуля K , модуля сдвига G и коэффициента поперечной деформации (коэффициента Пуассона) μ связаны следующими соотношениями:

$$K = \frac{E}{1-2\mu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \mu = \frac{K-2G}{2(G+K)}. \quad (1.17)$$

Отметим, что уравнения нелинейного деформирования часто записываются в форме, предложенной А.А. Ильюшиным [1]:

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i (1 - \omega), \quad \tau_i = G_0 \gamma_i (1 - \omega'), \quad (1.18)$$

где ω и ω' – безразмерные функции, учитывающие отклонение кривой деформирования от линейной зависимости.

На практике необходимо проведение серии экспериментов для установления зависимости между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций ε_i . Так как σ_i и ε_i – обобщенные характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) твердого тела, то в эксперименте может быть выбран любой вид НДС. В подавляющем большинстве случаев проводится эксперимент при одноосном растяжении (сжатии) или чистом кручении.

При сложном (двухосном, трехосном) напряженном состоянии тела зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i принимается в виде зависимости между напряжениями σ

и деформациями ε при простом растяжении (сжатии). Далее экспериментально полученные диаграммы деформирования описываются аналитическими выражениями. Погрешности аналитического описания экспериментальной зависимости $\sigma_i - \varepsilon_i$ должны быть минимизированы для повышения точности решения нелинейно-упругих задач.

Различными исследователями был предложен ряд вариантов аналитических аппроксимаций экспериментальных диаграмм деформирования $\sigma_i - \varepsilon_i$. Рассмотрим некоторые из них.

1. Степенная зависимость между напряжениями и деформациями

Г.Б. Бюльфингер предложил следующую зависимость:

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^k, \quad (1.19)$$

где A – постоянная, измеряемая в Паскалях; $k < 1$ – безразмерный показатель степени. Эта зависимость используется для аналитического описания экспериментальных зависимостей $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ ввиду ее простоты и весьма хорошего соответствия опытным данным для многих материалов.

2. Гиперболическая зависимость

С.П. Тимошенко предложил задавать связь между интенсивностями деформаций и напряжений в следующем виде:

$$\sigma_i = \varepsilon_i / (a + b \varepsilon_i), \quad (1.20)$$

секущий и касательный модули приобретают вид:

$$E_c = \sigma_i / \varepsilon_i = 1 / (a + b \varepsilon_i), \quad E_k = d\sigma_i / d\varepsilon_i = a / (a + b \varepsilon_i)^2, \quad (1.21)$$

где a и b – постоянные коэффициенты.

3. Зависимость В.В. Соколовского

Для аппроксимации экспериментальной диаграммы деформирования В.В. Соколовский предложил следующую зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций:

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i / \sqrt{1 + (\varepsilon_i / t)^2}, \quad (1.22)$$

где t – коэффициент, зависящий от вида экспериментальной диаграммы $\sigma_i - \varepsilon_i$, $t = \sigma_s / E_0$, где E_0 – начальный модуль, σ_s – предельное значение напряжения. Для этой зависимости переменные модули деформации имеют вид:

$$E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\varepsilon_i E_0 / \sigma_s)^2}}, \quad E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{E_0}{\left[1 + (\varepsilon_i E_0 / \sigma_s)^2\right]^{3/2}}. \quad (1.23)$$

4. Степенная зависимость

Для описания экспериментальной кривой $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ можно применить степенную зависимость:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i - m \varepsilon_i^n, \quad (1.24)$$

где E, m – постоянные коэффициенты, определяемые из условий соответ-

ствия экспериментальной зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ для конкретного материала.

Для симметричных диаграмм деформирования коэффициент n должен быть нечетным, часто $n=3$ (аппроксимация кубической параболой).

При $n=3$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3, \\ E_c &= \sigma_i / \varepsilon_i = E - m\varepsilon_i^2, \quad E_k = d\sigma_i / d\varepsilon_i = E - 3m\varepsilon_i^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

5. Комбинация степенной и тригонометрической зависимостей

И.В. Кривошеиным предложен вариант аппроксимации экспериментальной кривой деформирования комбинацией степенного и тригонометрического рядов [3]:

$$\sigma_i = a\varepsilon_i + b\varepsilon_i^3 + c \sin(\pi\varepsilon_i / \varepsilon_{i \max}) + e \sin(3\pi\varepsilon_i / \varepsilon_{i \max}), \quad (1.26)$$

содержащий четыре постоянных коэффициента a, b, c, e . Касательный модуль имеет вид:

$$E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = a + 3b\varepsilon_i^2 + c \frac{\pi}{\varepsilon_{i \max}} \cos(\pi\varepsilon_i / \varepsilon_{i \max}) + e \frac{3\pi}{\varepsilon_{i \max}} \cos(3\pi\varepsilon_i / \varepsilon_{i \max}). \quad (1.27)$$

Постоянные коэффициенты a, b, c, d определяются из условий, что экспериментальные значения σ_i приравниваются теоретическим значениям в точках:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i \max}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i \max} / 2; \quad \varepsilon_i = 0; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i \max}.$$

где $\varepsilon_{i \max}$ – предельное значение рассматриваемого интервала интенсивности деформаций.

При выполнении этих условий получим следующую систему четырех линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a, b, c, d :

$$\left. \begin{aligned} a\varepsilon_{i \max} + b(\varepsilon_{i \max})^3 &= \sigma_i(\varepsilon_{i \max}) \\ a(\varepsilon_{i \max} / 2) + b(\varepsilon_{i \max} / 2)^3 + c - d &= \sigma_i(\varepsilon_{i \max} / 2) \\ a + c\pi / \varepsilon_{i \max} + d 3\pi / \varepsilon_{i \max} &= E_0 \\ a + 3b(\varepsilon_{i \max})^2 - c\pi / \varepsilon_{i \max} - d 3\pi / \varepsilon_{i \max} &= E_k(\varepsilon_{i \max}) \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Во всех случаях аналитическое описание кривой деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ производилось с использованием минимального числа параметров. Рядом авторов предложены и иные аналитические зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$.

Аналитическое описание зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ необходимо оценивать не только с точки зрения его простоты и хорошего совпадения с экспериментом, но и выявлять его точность в рассматриваемом диапазоне изменения ε_i и удобства выполнения численных расчетов.