Л. Б. Коралов, Я. Г. Синай

Теория вероятностей и случайные процессы

МЦНМО

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
К66

Коралов Л. Б., Синай Я. Г.
Теория вероятностей и случайные процессы
Пер. с английского
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
408 с.
ISBN 978-5-4439-2073-3

В основу книги положены курсы лекций, читавшихся авторами в американских университетах. Изложение теории вероятностей (главы 1—11) начинается с нулевого уровня и доходит до продвинутых разделов, иногда включаемых в курсы для студентов, специализирующихся в этой области.

Для понимания второй части книги (случайные процессы — главы 12—22) требуется владение первой частью и несколько более высокая математическая культура — в главах, использующих сведения из функционального анализа и дифференциальных уравнений. Большинство глав заканчивается списком задач.

Издание предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов и всех изучающих и применяющих теорию вероятностей.

Подготовлено на основе книги: *Коралов Л. Б., Синай Я. Г.* Теория вероятностей и случайные процессы / Пер. с англ. Э. В. Переходцевой; под ред. Б. М. Гуревича. — М.: МЦНМО, 2013. — 408 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2073-3

Оглавление

Часть II
Случайные процессы и случайные поля

Предисловие

Основой этой книги послужил годовой курс, много лет читавшийся в Принстонском университете для студентов старших курсов и аспирантов. В течение последних лет аналогичный курс читался и в Мэрилендском университете.

Мы хотели бы выразить благодарность Софи Лукас и профессору Рафаэлю Херрера, прочитавшим рукопись и внесшим много исправлений. В особенности мы благодарны профессору Б. М. Гуревичу за множество важных предложений, касавшихся как математического содержания книги, так и ее стиля.

Работа Л. Б. Коралова над этой книгой была поддержана грантом Национального научного фонда DMS-0405152, работа Я. Г. Синая — грантом Национального научного фонда DMS-0600996.

Часть I

Теория вероятностей

Глава 1

Случайные величины и их распределения

§ 1.1. Пространство элементарных исходов, σ-алгебры и меры

Пространство элементарных исходов — первый объект, с которым мы встречаемся в теории вероятностей. Это некоторое непустое множество, обычно обозначаемое Ω, элементы которого $\omega \in \Omega$ называются элементарными исходами.

Приведем несколько простых примеров.

Пример. Рассмотрим конечное множество $X = \{x^1, \ldots, x^r\}$ и множество Ω, состоящее из последовательностей $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ длины $n \geqslant 1$, где $\omega_i \in X$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. В приложениях ω является результатом n статистических экспериментов, а ω_i — результатом i-го эксперимента. Ясно, что $|\Omega| = r^n$, где $|\Omega|$ обозначает число элементов в конечном множестве. Если $X = \{0, 1\}$, то каждое ω является последовательностью нулей и единиц длины n. Такое пространство Ω может служить моделью для результатов n последовательных бросаний монеты. Если $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то Ω можно рассматривать как пространство исходов для n подбрасываний игральной кости.

Пример. Обобщение предыдущего примера можно получить следующим образом. Пусть X — конечное или счетное множество, а I — конечное множество. Тогда $\Omega = X^I$ — пространство всех функций на I со значениями в X.

Если $X = \{0, 1\}$ и $I \subset \mathbb{Z}^d$ — конечное множество, то каждое $\omega \in \Omega$ представляет собой конфигурацию нулей и единиц на ограниченном подмножестве d-мерной решетки. Такие пространства появляются в статистической физике, теории перколяции и т. д.

Пример. Рассмотрим лотерею, в которой имеется r различных чисел и надо угадать n из них вместе с порядком их появления (при $n \leqslant r$). Чтобы построить модель этой игры, положим $X = \{1, \ldots, r\}$. Тогда Ω будет состоять из таких последовательностей $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ длины n, что $\omega_i \in X$ и $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$. Легко показать, что $|\Omega| = r!/(r-n)!$.

Позднее в этом параграфе мы определим понятие вероятностной меры, или просто вероятности. Это функция, которая приписывает некоторым (но не обязательно всем) подмножествам $A \subseteq \Omega$ действительные числа между нулем и единицей.

Если интерпретировать Ω как пространство возможных исходов эксперимента, то вероятность множества A можно понимать как степень правдоподобия того, что исход эксперимента принадлежит A. Перед введением понятия вероятности необходимо обсудить те классы множеств, на которых она будет определена.

Определение 1.1. Совокупность $\mathcal{G}$ подмножеств множества Ω называется *алгеброй*, если выполняются следующие три условия:

1) $\Omega \in \mathcal{G}$;

2) из $C \in \mathcal{G}$ вытекает, что $\Omega \setminus C \in \mathcal{G}$;

3) из $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{G}$ вытекает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{G}$.

Пример. Пусть задано множество элементарных исходов Ω, и пусть $\underline{\mathcal{G}}$ содержит лишь два элемента: пустое множество и всё Ω, т. е. $\underline{\mathcal{G}} = \{\varnothing, \Omega\}$. Определим $\overline{\mathcal{G}}$ как совокупность всех подмножеств множества Ω. Ясно, что $\underline{\mathcal{G}}$ и $\overline{\mathcal{G}}$ удовлетворяют определению алгебры. Покажем, что если Ω конечно, то алгебра $\overline{\mathcal{G}}$ содержит $2^{|\Omega|}$ элементов.

Для всякого $C \subseteq \Omega$ введем функцию $\chi_C(\omega)$ на Ω с помощью равенства

$$\chi_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \omega \in C, \\ 0, & \text{если } \ \omega \notin C. \end{cases}$$

Эта функция называется индикатором множества C. Ясно, что каждая функция на Ω, принимающая значения 0 и 1, является индикатором некоторого множества и определяет это множество однозначно. А именно, множество состоит из тех ω, где функция равна 1. Число различных функций, отображающих Ω в множество $\{0, 1\}$, равно $2^{|\Omega|}$.

Лемма 1.2. *Пусть Ω — пространство элементарных исходов и $\mathcal{G}$ — алгебра. Тогда*

1) *пустое множество является элементом $\mathcal{G}$;*

2) *из $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{G}$ следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{G}$;*

3) *из $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$ следует, что $C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{G}$.*

Доказательство. Взяв $C = \Omega \in \mathcal{G}$, с помощью второго свойства из определения 1.1 получим $\varnothing \in \mathcal{G}$. Чтобы доказать утверждение 2, заметим, что

$$\Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \bigcup_{i=1}^{n} (\Omega \setminus C_i) \in \mathcal{G}.$$

Следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{G}$. Для доказательства третьего утверждения запишем

$$C_1 \setminus C_2 = \Omega \setminus \big((\Omega \setminus C_1) \cup C_2\big) \in \mathcal{G}. \qquad \square$$

Лемма 1.3. *Если алгебра $\mathcal{G}$ конечна, то существуют такие непустые множества $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{G}$, что*

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$;

2) $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$;

3) *для каждого множества $C \in \mathcal{G}$ существует такое множество $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, что $C = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ (условимся, что $C = \varnothing$ при $I = \varnothing$).*

Замечание 1.4. Совокупность множеств B_i, $i = 1, \ldots, m$, определяет некоторое разбиение множества Ω.

Таким образом, конечные алгебры порождаются конечными разбиениями.

Замечание 1.5. Для всякой конечной алгебры $\mathcal{G}$ найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $\mathcal{G}$ содержит 2^m элементов. Действительно, по лемме 1.3 существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{G}$ и совокупностью подмножеств множества $\{1, \ldots, m\}$.

Доказательство леммы 1.3. Занумеруем произвольным образом элементы алгебры $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = \{C_1, \ldots, C_s\}.$$

Для любого множества $C \in \mathcal{G}$ положим

$$C^1 = C, \quad C^{-1} = \Omega \setminus C.$$

Рассмотрим последовательность $b = (b_1, \ldots, b_s)$, в которой каждый элемент b_i равен либо $+1$, либо -1, и образуем множество

$$B^b = \bigcap_{i=1}^{s} C_i^{b_i}.$$

Из определения алгебры и леммы 1.2 вытекает, что $B^b \in \mathcal{G}$. Кроме того, так как

$$C_i = \bigcup_{b\colon b_i = 1} B^b,$$

всякий элемент C_i алгебры $\mathcal{G}$ можно получить как объединение некоторых множеств B^b. Если $b' \neq b''$, то $B^{b'} \cap B^{b''} = \varnothing$.

Действительно, условие $b' \neq b''$ означает, что найдется i, для которого ${b'}_i \neq {b''}_i$, скажем, ${b'}_i = 1$, ${b''}_i = -1$. В выражении для $B^{b'}$ мы имеем $C_i^1 = C_i$, и, значит, $B^{b'} \subseteq C_i$. В выражение для $B^{b''}$ входит $C_i^{-1} = \Omega \setminus C_i$, так что $B^{b''} \subseteq \Omega \setminus C_i$. Следовательно, все B^b попарно не пересекаются. Теперь в качестве B_i можно взять непустые множества B^b. □

Определение 1.6. Совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется *σ-алгеброй*, если $\mathcal{F}$ является алгеброй, которая замкнута относительно счетных объединений, т. е. из того, что $C_i \in \mathcal{F}$, $i \geqslant 1$, вытекает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$. Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются измеримыми множествами или событиями.

Как и выше, простейшими примерами σ-алгебр служат тривиальная σ-алгебра $\underline{\mathcal{F}} = \{\varnothing, \Omega\}$ и σ-алгебра $\overline{\mathcal{F}}$, состоящая из всех подмножеств пространства Ω.

Определение 1.7. *Измеримым пространством* называется пара $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — пространство элементарных исходов, а $\mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств Ω.

Замечание 1.8. Пространство элементарных исходов называется *дискретным*, если оно содержит конечное или счетное число элементов. Всякий раз, рассматривая измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с дискретным пространством Ω, мы будем предполагать, что $\mathcal{F}$ состоит из всех подмножеств пространства Ω.

Следующую лемму можно доказать так же, как лемму 1.2.

Лемма 1.9. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Тогда из того, что $C_i \in \mathcal{F}$, $i \geqslant 1$, вытекает, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.*

Может показаться, что разница между понятиями алгебры и σ-алгебры незначительна. Однако такое впечатление обманчиво. Как мы увидим позже, любая содержательная теория (такая, как теория меры или теория вероятностей) основывается на понятии σ-алгебры.

Определение 1.10. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{F}$-измеримой* (или просто *измеримой*), если для любых a и b, $a < b$, выполняется включение

$$\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\} \in \mathcal{F}.$$

Ниже будет показано, что линейная комбинация и произведение измеримых функций также являются измеримыми функциями.

Если пространство Ω дискретно, то всякая действительнозначная функция на Ω измерима, так как $\mathcal{F}$ содержит все подмножества Ω.

Чтобы лучше понять определение измеримости, рассмотрим случай, когда σ-алгебра $\mathcal{F}$ конечна. Из леммы 1.3 вытекает, что $\mathcal{F}$ соответствует конечному разбиению пространства Ω на подмножества $B_1, \ldots, B_m$ и каждое $C \in \mathcal{F}$ — это объединение некоторых B_i.

Теорема 1.11. *Если функция ξ является $\mathcal{F}$-измеримой, то на каждом B_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, она принимает постоянное значение.*

Доказательство. Предположим, что на некотором множестве B_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, функция ξ принимает по меньшей мере два значения a и b $(a < b)$. Тогда множество $\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < (a+b)/2\}$ должно содержать хотя бы одну точку из B_j, но не должно содержать всего B_j. Поэтому его нельзя представить как объединение некоторых из B_i, что противоречит его измеримости. □

Определение 1.12. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty)$ называется *конечной неотрицательной мерой*, если

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$$

всякий раз, когда $C_i \in \mathcal{F}$ при $i \geqslant 1$ и $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Свойство, выраженное в определении 1.12, называется счетной аддитивностью (или σ-аддитивностью) меры μ.

Замечание 1.13. Мы часто будем опускать слова «конечная» и «неотрицательная» и называть μ просто мерой. Таким образом, мера — это σ-аддитивная функция на $\mathcal{F}$ со значениями в $\mathbb{R}^+$. В отличие от сказанного выше σ-конечная и знакопеременная меры, вводимые в гл. 3, принимают соответственно значения в $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ и в $\mathbb{R}$.

Определение 1.14. Пусть g — бинарная функция на Ω со значениями 1 (истина) и 0 (ложь). Говорят, что функция g *почти всюду истинна*, если существует такое событие C, что $\mu(C) = \mu(\Omega)$ и $g(\omega) = 1$ для всех $\omega \in C$.

Определение 1.15. Мера P на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется *вероятностной мерой* или *распределением вероятностей*, если $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 1.16. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и P — вероятностная мера. Если $C \in \mathcal{F}$, то число $\mathsf{P}(C)$ называется *вероятностью события C*.

Определение 1.17. Измеримая функция, определенная на вероятностном пространстве, называется *случайной величиной*.

Замечание 1.18. Если P — вероятностная мера, то вместо термина «почти всюду» часто используется «почти наверное».

Замечание 1.19. Заменим условие σ-аддитивности в определении 1.12 на следующее: если $C_i \in \mathcal{F}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, где n конечное, и $C_i \cup C_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i).$$

Это условие приводит вместо понятия меры к понятию конечно-аддитивной функции. Заметим, что из конечной аддитивности вытекает супераддитивность для бесконечных последовательностей множеств. А именно,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i),$$

если множества C_i не пересекаются. Действительно, в противном случае мы могли бы найти настолько большое n, что

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) < \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i),$$

но это неравенство противоречит конечной аддитивности.

Пусть Ω дискретно. Тогда $\mathsf{p}(\omega) = \mathsf{P}(\{\omega\})$ — вероятность элементарного исхода ω. Из определения вероятностной меры следует, что

1) $\mathsf{p}(\omega) \geqslant 0$;
2) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathsf{p}(\omega) = 1$.

Лемма 1.20. *Каждая функция* $\mathsf{p}(\omega)$, *заданная на дискретном пространстве* Ω *и удовлетворяющая этим двум условиям, порождает вероятностную меру на* σ*-алгебре всех подмножеств* Ω, *задаваемую формулой*

$$\mathsf{P}(C) = \sum_{\omega \in C} \mathsf{p}(\omega).$$

Доказательство. Ясно, что $\mathsf{P}(C) \geqslant 0$ для всех C и что $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. Чтобы проверить выполнение условия σ-аддитивности из определения 1.12, нужно показать, что для попарно непересекающихся множеств C_i, $i \geqslant 1$, выполняется соотношение

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(C_i).$$

Так как сумма сходящегося ряда с положительными членами не зависит от порядка суммирования, получаем

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \mathrm{p}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in C_i} \mathrm{p}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(C_i). \qquad \square$$

Таким образом, мы показали, что в случае дискретного вероятностного пространства Ω существует взаимно однозначное соответствие между распределениями вероятностей на Ω и функциями p со свойствами, сформулированными перед леммой 1.20.

Замечание 1.21. Если Ω не является дискретным, то обычно невозможно выразить меру заданного множества в терминах мер элементарных исходов. Например, в случае лебеговой меры на $[0, 1]$ (изучаемой в гл. 3) $\mathsf{P}(\{\omega\}) = 0$ для каждого ω.

Приведем несколько примеров вероятностных распределений на дискретном множестве Ω.

1. *Равномерное распределение*: Ω конечное и $\mathrm{p}(\omega) = 1/|\Omega|$. В этом случае все ω имеют равные вероятности. Вероятность всякого события C равна $\mathsf{P}(C) = |C|/|\Omega|$.

2. *Геометрическое распределение*: $\Omega = \mathbb{Z}^+ = \{n\colon n \geqslant 0, n \text{ целое}\}$ и $\mathrm{p}(n) = (1-q)q^n$, $0 < q < 1$. Такое распределение называется геометрическим с параметром q.

3. *Распределение Пуассона*: пространство Ω то же самое, что в предыдущем примере, и $\mathrm{p}(n) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^n/n!$, $\lambda > 0$. Это распределение называется распределением Пуассона с параметром λ.

Пусть ξ — случайная величина, определенная на дискретном вероятностном пространстве и принимающая значения в конечном или счетном множестве X, т. е. $\xi(\omega) \in X$ при всех $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим события $C_x = \{\omega\colon \xi(\omega) = x\}$, $x \in X$. Ясно, что при $x \neq y$ пересечение событий C_x и C_y — пустое множество и что

$$\bigcup_{x \in X} C_x = \Omega.$$

Теперь мы можем определить распределение вероятностей на X, положив $\mathrm{p}_\xi(x) = \mathsf{P}(C_x)$.

Определение 1.22. Распределение вероятностей на X, определенное формулой $\mathrm{p}_\xi(x) = \mathsf{P}(C_x)$, называется *распределением случайной величины* ξ (или *распределением вероятностей, индуцированным случайной величиной* ξ).

§ 1.2. Математическое ожидание и дисперсия случайных величин на дискретном вероятностном пространстве

Пусть ξ — случайная величина на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $\mathcal{F}$ — совокупность всех подмножеств пространства Ω, а P — вероятностная мера. Как и ранее, положим $\mathrm{p}(\omega) = \mathsf{P}(\{\omega\})$.

Пусть $X = \xi(\Omega) \subset \mathbb{R}$ — множество значений случайной величины ξ. Так как Ω дискретно, X конечно или счетно.

Пусть

$$\xi_+(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega), & \text{если } \xi(\omega) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \xi(\omega) < 0, \end{cases}$$

$$\xi_-(\omega) = \begin{cases} -\xi(\omega), & \text{если } \xi(\omega) < 0, \\ 0, & \text{если } \xi(\omega) \geqslant 0. \end{cases}$$

Определение 1.23. Рассмотрим два ряда

$$\sum_{\omega\in\Omega} \xi_+(\omega)\mathrm{p}(\omega) \quad \text{и} \quad \sum_{\omega\in\Omega} \xi_-(\omega)\mathrm{p}(\omega).$$

Говорят, что ξ имеет конечное *математическое ожидание*, если сходятся оба эти ряда. Математическое ожидание обозначается $\mathsf{E}\xi$ и определяется равенством

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi_+(\omega)\mathrm{p}(\omega) - \sum_{\omega\in\Omega} \xi_-(\omega)\mathrm{p}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)\mathrm{p}(\omega).$$

Если первый ряд расходится, а второй сходится, то $\mathsf{E}\xi = +\infty$.

Если первый ряд сходится, а второй расходится, то $\mathsf{E}\xi = -\infty$.

Если расходятся оба ряда, то $\mathsf{E}\xi$ не определено.

Ясно, что $\mathsf{E}\xi$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}|\xi|$ конечно.

Замечание 1.24. Иногда вместо математического ожидания используются термины *ожидаемое значение*, *среднее значение*, *среднее*.

Лемма 1.25 (свойства математического ожидания)**.**

1. *Если* $\mathsf{E}\xi_1$ *и* $\mathsf{E}\xi_2$ *конечны, то для любых постоянных* a *и* b *математическое ожидание* $\mathsf{E}(a\xi_1 + b\xi_2)$ *конечно и* $\mathsf{E}(a\xi_1 + b\xi_2) = aE\xi_1 + bE\xi_2$.

2. *Если* $\xi \geqslant 0$, *то* $\mathsf{E}\xi \geqslant 0$.

3. *Если* $\xi \equiv 1$, *то* $\mathsf{E}\xi = 1$.

4. *Если* $A \leqslant \xi \leqslant B$, *то* $A \leqslant \mathsf{E}\xi \leqslant B$.

5. *Математическое ожидание* $\mathsf{E}\xi$ *конечно тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{x\in X}|x|\mathrm{p}_\xi(x)<\infty$, *где* $\mathrm{p}_\xi(x)=\mathsf{P}(\{\omega\colon\xi(\omega)=x\})$. *В этом случае* $\mathsf{E}\xi=\sum\limits_{x\in X}x\cdot\mathrm{p}_\xi(x)$.

6. *Если случайная величина* η *определена равенством* $\eta=g(\xi)$, *то* $\mathsf{E}\eta=\sum\limits_{x\in X}g(x)\mathrm{p}_\xi(x)$ *и* $\mathsf{E}\eta$ *конечно тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{x\in X}|g(x)|\cdot\mathrm{p}_\xi(x)<\infty$.

7. *Если* $|\xi|\leqslant|\eta|$ *и* $\mathsf{E}|\eta|<\infty$, *то и* $\mathsf{E}|\xi|<\infty$.

Доказательство. Так как $\mathsf{E}\xi_1$ и $\mathsf{E}\xi_2$ конечны, мы имеем

$$\sum_{\omega\in\Omega}|\xi_1(\omega)|\mathrm{p}(\omega)<\infty,\quad \sum_{\omega\in\Omega}|\xi_2(\omega)|\mathrm{p}(\omega)<\infty$$

и

$$\sum_{\omega\in\Omega}|a\xi_1(\omega)+b\xi_2(\omega)|\mathrm{p}(\omega)\leqslant\sum_{\omega\in\Omega}\big(|a||\xi_1(\omega)|+|b||\xi_2(\omega)|\big)\mathrm{p}(\omega)=$$
$$=|a|\sum_{\omega\in\Omega}|\xi_1(\omega)|\mathrm{p}(\omega)+|b|\sum_{\omega\in\Omega}|\xi_2(\omega)|\mathrm{p}(\omega)<\infty.$$

Используя свойства абсолютно сходящихся рядов, находим, что

$$\sum_{\omega\in\Omega}(a\xi_1(\omega)+b\xi_2(\omega))\mathrm{p}(\omega)=a\sum_{\omega\in\Omega}\xi_1(\omega)\mathrm{p}(\omega)+b\sum_{\omega\in\Omega}\xi_2(\omega)\mathrm{p}(\omega).$$

Свойства 2 и 3 очевидны. Свойства 1—3 означают, что E представляет собой линейный, неотрицательный, нормированный функционал на векторном пространстве случайных величин. Свойство 4 следует из того, что $\xi-A\geqslant0$, $B-\xi\geqslant0$, а потому $\mathsf{E}(\xi-A)=\mathsf{E}\xi-\mathsf{E}A\cdot1=\mathsf{E}\xi-A\geqslant0$ и $B-\mathsf{E}\xi\geqslant0$.

Теперь докажем свойство 6, так как свойство 5 следует из свойства 6 при $g(x)=x$. Пусть $\sum\limits_{x\in X}|g(x)|\mathrm{p}_\xi(x)<\infty$. Так как сумма ряда с неотрицательными членами не зависит от порядка суммирования, сумму $\sum\limits_{\omega}|g(\xi(\omega))|\mathrm{p}(\omega)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{\omega\in\Omega}|g(\xi(\omega))|\mathrm{p}(\omega)=\sum_{x\in X}\sum_{\omega\colon\xi(\omega)=x}|g(\xi(\omega))|\mathrm{p}(\omega)=$$
$$=\sum_{x\in X}|g(x)|\sum_{\omega\colon\xi(\omega)=x}\mathrm{p}(\omega)=\sum_{x\in X}|g(x)|\mathrm{p}_\xi(x).$$

Значит, ряд $\sum\limits_{\omega\in\Omega}|g(\xi(\omega))|\mathrm{p}(\omega)$ сходится в том и только том случае, когда сходится ряд $\sum\limits_{x\in X}|g(x)|\mathrm{p}_\xi(x)$. Если любой из этих рядов сходится, то ряд $\sum\limits_{\omega\in\Omega} g(\xi(\omega))\mathrm{p}(\omega)$ сходится абсолютно и его сумма не зависит от порядка суммирования. Поэтому

$$\sum_{\omega\in\Omega} g(\xi(\omega))\mathrm{p}(\omega) = \sum_{x\in X}\ \sum_{\omega:\,\xi(\omega)=x} g(\xi(\omega))\mathrm{p}(\omega) = \\ = \sum_{x\in X} g(x) \sum_{\omega:\,\xi(\omega)=x} \mathrm{p}(\omega) = \sum_{x\in X} g(x)\mathrm{p}_\xi(x)$$

и последний ряд также сходится абсолютно.

Свойство 7 непосредственно вытекает из определения математического ожидания. □

Замечание 1.26. Пятое свойство:

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{x\in X} x\mathrm{p}_\xi(x),\ \text{ если ряд в правой части сходится абсолютно,}$$

можно использовать как определение математического ожидания, если ξ принимает счетное число значений, но определено на вероятностном пространстве, которое не обязательно дискретно.

В главе 3 мы определим математическое ожидание для случайной величины общего вида.

Лемма 1.27 (неравенство Чебышёва)**.** *Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathsf{E}\xi$ конечно, то для всякого $t > 0$ выполняется неравенство*

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant t) \leqslant \frac{\mathsf{E}\xi}{t}.$$

Доказательство. Так как $\xi \geqslant 0$, имеем

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant t\} = \sum_{\omega:\,\xi(\omega)\geqslant t} \mathrm{p}(\omega) \leqslant \sum_{\omega:\,\xi(\omega)\geqslant t} \frac{\xi(\omega)}{t}\mathrm{p}(\omega) = \\ = \frac{1}{t}\sum_{\omega:\,\xi(\omega)\geqslant t} \xi(\omega)\mathrm{p}(\omega) \leqslant \frac{1}{t}\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathrm{p}(\omega) = \frac{1}{t}\mathsf{E}\xi. \quad \square$$

Лемма 1.28 (неравенство Коши—Бунявского)**.** *Если математические ожидания $\mathsf{E}\xi_1^2$ и $\mathsf{E}\xi_2^2$ конечны, то $\mathsf{E}(\xi_1\xi_2)$ также конечно и выполняется неравенство*

$$\mathsf{E}|\xi_1\xi_2| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi_1^2\cdot \mathsf{E}\xi_2^2}.$$

Доказательство. Так как $|\xi_1\xi_2| \leqslant (\xi_1^2 + \xi_1^2)/2$, математическое ожидание $\mathsf{E}\xi_1\xi_2$ конечно. Для каждого t имеем

$$\mathsf{E}(t|\xi_2| + |\xi_1|)^2 = t^2\mathsf{E}\xi_2^2 + 2t\mathsf{E}|\xi_1\xi_2| + \mathsf{E}\xi_1^2.$$

Поскольку при всех t левая часть этого равенства неотрицательна, то же самое верно и для правой части, откуда следует, что дискриминант неположителен, т. е. $\mathsf{E}|\xi_1\xi_2| - (\mathsf{E}\xi_1^2\mathsf{E}\xi_2^2)^{1/2} \leqslant 0$. $\square$

Теперь введем другие числовые характеристики случайных величин.

Определение 1.29. *Дисперсия* случайной величины ξ определяется равенством $\operatorname{Var}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2$ (от слова «variance»), принято также обозначение $\mathsf{D}\xi$.

Для существования дисперсии требуется существование математического ожидания $\mathsf{E}\xi$. Возможны, конечно, и случаи, когда $\mathsf{E}\xi$ конечно, но $\operatorname{Var}\xi = \infty$.

Лемма 1.30 (свойства дисперсии).

1. *Дисперсия* $\operatorname{Var}\xi$ *конечна тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E}\xi^2 < \infty$. *В этом случае* $\operatorname{Var}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2$.

2. *Если* $\operatorname{Var}\xi < \infty$, *то* $\operatorname{Var}(a\xi + b) = a^2 \operatorname{Var}\xi$ *для любых постоянных* a *и* b.

3. *Если* $A \leqslant \xi \leqslant B$, *то* $\operatorname{Var}\xi \leqslant \left(\dfrac{B-A}{2}\right)^2$.

Доказательство свойства 1. Предположим вначале, что $\mathsf{E}\xi^2 < < \infty$. Тогда $(\xi - \mathsf{E}\xi)^2 = \xi^2 - 2(\mathsf{E}\xi)\xi + (\mathsf{E}\xi)^2$, и из свойства 1 математического ожидания вытекает, что

$$\operatorname{Var}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - \mathsf{E}(2(\mathsf{E}\xi)\xi) + \mathsf{E}(\mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\xi^2 - 2(\mathsf{E}\xi)^2 + (\mathsf{E}\xi)^2 = \\ = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2.$$

Если $\operatorname{Var}\xi < \infty$, то $\xi^2 = (\xi - \mathsf{E}\xi)^2 + 2(\mathsf{E}\xi)\xi - (\mathsf{E}\xi)^2$, и в силу свойства 1 математического ожидания

$$\mathsf{E}\xi^2 = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2 + 2(\mathsf{E}\xi)^2 - (\mathsf{E}\xi)^2 = \operatorname{Var}\xi + (\mathsf{E}\xi)^2. \qquad \square$$

Доказательство свойства 2. В силу свойства 1 математического ожидания $\mathsf{E}(a\xi + b) = a\mathsf{E}\xi + b$, поэтому

$$\operatorname{Var}(a\xi + b) = \mathsf{E}(a\xi + b - \mathsf{E}(a\xi + b))^2 = \mathsf{E}(a\xi - a\mathsf{E}\xi)^2 = \\ = \mathsf{E}a^2(\xi - \mathsf{E}\xi)^2 = a^2 \operatorname{Var}\xi. \qquad \square$$

Доказательство свойства 3. Пусть $A \leqslant \xi \leqslant B$. Из свойства 2 дисперсии следует, что

$$\operatorname{Var}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2 = \mathsf{E}\left(\xi - \frac{A+B}{2} - \left(\mathsf{E}\xi - \frac{A+B}{2}\right)\right)^2 = \\ = \mathsf{E}\left(\xi - \frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\mathsf{E}\left(\xi - \frac{A+B}{2}\right)\right)^2 \leqslant \mathsf{E}(\xi - \frac{A+B}{2})^2 \leqslant \left(\frac{B-A}{2}\right)^2. \qquad \square$$

Лемма 1.31 (неравенство Чебышёва для дисперсии). *Пусть дисперсия* $\operatorname{Var}\xi$ *конечна. Тогда*

$$\mathsf{P}\{\omega\colon |\xi-\mathsf{E}\xi|\geqslant t\}\leqslant\frac{\operatorname{Var}\xi}{t^2}.$$

Доказательство. Применим лемму 1.27 к случайной величине $\eta=(\xi-\mathsf{E}\xi)^2\geqslant 0$:

$$\mathsf{P}(|\xi-\mathsf{E}\xi|\geqslant t)=\mathsf{P}\{\eta\geqslant t^2\}\leqslant\frac{\mathsf{E}\eta}{t^2}=\frac{\operatorname{Var}\xi}{t^2}. \qquad \square$$

Определение 1.32. *Ковариацией* случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется число $\operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathsf{E}(\xi_1-m_1)(\xi_2-m_2)$, где $m_i=\mathsf{E}\xi_i$, $i=1,2$.

По лемме 1.28 $\operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2)$ конечна, если конечны $\operatorname{Var}\xi_1$ и $\operatorname{Var}\xi_2$. Заметим, что

$$\operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathsf{E}(\xi_1-m_1)(\xi_2-m_2)=$$
$$=\mathsf{E}(\xi_1\xi_2-m_1\xi_1-m_2\xi_2+m_1m_2)=\mathsf{E}\xi_1\xi_2-m_1m_2$$

и

$$\operatorname{Cov}(a_1\xi_1+b_1,a_2\xi_2+b_2)=a_1a_2\operatorname{Cov}(\xi_1\xi_2).$$

Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — случайные величины и $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$. Если $m_i=\mathsf{E}\xi_i$, то $\mathsf{E}\zeta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$ и

$$\operatorname{Var}\zeta_n=\mathsf{E}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Bigr)^2=\mathsf{E}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Bigr)^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(\xi_i-m_i)^2+2\sum_{i<j}\mathsf{E}(\xi_i-m_i)(\xi_j-m_j)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_i+2\sum_{i<j}\operatorname{Cov}(\xi_i,\xi_j).$$

Определение 1.33. *Коэффициентом корреляции* случайных величин ξ_1 и ξ_2 с ненулевыми дисперсиями называется число

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\frac{\operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}\xi_1\operatorname{Var}\xi_2}}.$$

Из свойств дисперсии и ковариации следует, что

$$\rho(a_1\xi_1+b_1,a_2\xi_2+b_2)=\rho(\xi_1,\xi_2)$$

для любых постоянных a_1,b_1,a_2,b_2.

Теорема 1.34. *Пусть* ξ_1 *и* ξ_2 — *случайные величины с нулевой дисперсией. Тогда абсолютная величина их коэффициента корреляции меньше или равна единице. Если* $|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$ *и* $\operatorname{Var}\xi_1 \neq 0$, *то для некоторых постоянных* a *и* b *почти наверное выполняется равенство* $\xi_2(\omega) = a\xi_1(\omega) + b$.

Доказательство. Для всякого t имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(t(\xi_2 - m_2) + (\xi_1 - m_1))^2 = \\
&\quad = t^2\mathsf{E}(\xi_2 - m_2)^2 + 2t\mathsf{E}(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2) + \mathsf{E}(\xi_1 - m_1)^2 = \\
&\qquad = t^2 \operatorname{Var}\xi_2 + 2t \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) + \operatorname{Var}\xi_1.
\end{aligned}$$

Так как левая часть этого равенства неотрицательна при всех t, это верно и для квадратичного полинома в правой части, откуда следует, что $(\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2))^2 \leqslant \operatorname{Var}\xi_1 \operatorname{Var}\xi_2$, т. е. $|\rho(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 1$. Если $|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$ и $\operatorname{Var}\xi_1 \neq 0$, то найдется $t_0 \neq 0$, для которого $\mathsf{E}(t_0(\xi_2 - m_2) + (\xi_1 - m_1))^2 = 0$, т. е. почти наверное

$$t_0(\xi_2(\omega) - m_2) + (\xi_1(\omega) - m_1) = 0.$$

Следовательно, $\xi_2 = m_2 + \dfrac{m_1}{t_0} - \dfrac{\xi_1}{t_0}$. Полагая $a = -\dfrac{1}{t_0}$ и $b = m_2 + \dfrac{m_1}{t_0}$, получаем второе утверждение теоремы. □

§ 1.3. Вероятность объединения событий

Если $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — попарно непересекающиеся события, то из определения вероятности следует, что $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(C_i)$. Мы выведем формулу для вероятности объединения любых n событий.

Теорема 1.35. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — *вероятностное пространство и* $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(C_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathsf{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2}) + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \mathsf{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}) - \\
- \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < i_4} \mathsf{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3} \cap C_{i_4}) + \ldots
\end{aligned}$$

Доказательство. Сначала предположим, что пространство Ω дискретно. Рассмотрим дополнение

$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (\Omega \setminus C_i).$$

Для каждого $C \in \mathcal{F}$ положим

$$\chi_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \omega \in C, \\ 0, & \text{если } \ \omega \notin C, \end{cases}$$

т. е. χ_C — индикатор множества C. Легко видеть, что $\chi_{\Omega\setminus C}(\omega) = 1 - \chi_C(\omega)$ и

$$\chi_{\bigcap_{i=1}^n (\Omega\setminus C_i)}(\omega) = \prod_{i=1}^n \chi_{\Omega\setminus C_i}(\omega) = \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{C_i}(\omega)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n C_i\Big) &= \mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n (\Omega\setminus C_i)\Big) = \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \chi_{\bigcap_{i=1}^n (\Omega\setminus C_i)}(\omega) p(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{C_i}(\omega)) p(\{\omega\}) = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{\omega\in\Omega} \chi_{C_i}(\omega) p(\{\omega\}) + \sum_{i_1<i_2} \sum_{\omega\in\Omega} \chi_{C_{i_1}}(\omega)\cdot\chi_{C_{i_2}}(\omega) p(\{\omega\}) - \ldots = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(C_i) + \sum_{i_1<i_2} \mathsf{P}(C_{i_1} \cap C_{i_2}) - \ldots, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы для случая дискретного Ω. □

В общем случае, когда Ω не обязательно дискретно, мы можем заменить суммы $\sum\limits_{\Omega\in\Omega}$ интегралами по пространству Ω, отвечающими мере P. Это, однако, требует использования понятия интеграла Лебега, которое будет введено в гл. 3.

Теперь мы применим теорему 1.35 для решения одной интересной задачи. Наши рассуждения не будут абсолютно строгими, они нацелены на развитие интуиции у читателя.

Пусть x_1 и x_2 — два целых числа, выбранных случайным образом и независимо друг от друга из множества $\{1, \ldots, n\}$ в соответствии с равномерным распределением. Это означает, что пространство Ω состоит из пар $\omega = (x_1, x_2)$, где $1 \leqslant x_1 \leqslant n$, $1 \leqslant x_2 \leqslant n$. Оно содержит n^2 элементов (элементарных исходов), и вероятность каждого элементарного исхода равна $\mathrm{p}^n(\omega) = \dfrac{1}{n^2}$. Обозначим через P^n соответствующую вероятностную меру. Пусть A^n — событие, состоящее в том, что x_1 и x_2 взаимно просты:

$$A^n = \big\{(x_1, x_2) \in \Omega_n : \ x_1 \text{ и } x_2 \text{ взаимно просты}\big\}.$$

Мы найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(A^n)$. В приводимых ниже формулах q обозначает простое число, $q>1$. Пусть C_q^n — событие, состоящее в том, что x_1 и x_2 делятся на q. Тогда

$$\mathsf{P}^n(A^n) = 1 - \mathsf{P}^n\Big(\bigcup_{q\leqslant n} C_q^n\Big),$$

из теоремы 1.35 получаем

$$\mathsf{P}^n\Big(\bigcup_{q\leqslant n} C_q^n\Big) = \\ = \sum_{q\leqslant n} \mathsf{P}^n(C_q^n) - \sum_{q_1<q_2\leqslant n} \mathsf{P}^n(C_{q_1}^n \cap C_{q_2}^n) + \sum_{q_1<q_2<q_3\leqslant n} \mathsf{P}^n(C_{q_1}^n \cap C_{q_2}^n \cap C_{q_3}^n) - \ldots$$

Легко видеть, что

$$\mathsf{P}^n(C_q^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{q^2}, \quad \mathsf{P}^n(C_{q_1}^n \cap C_{q_2}^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \quad \text{и т. д.}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{q\leqslant n} C_q^n\Big) = \sum_q \frac{1}{q^2} - \sum_{q_1<q_2} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} + \sum_{q_1<q_2<q_3} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 q_3^2} - \ldots$$

Так как число членов в правой части бесконечно, эта формула требует более строгого обоснования, которое мы здесь не проводим. Теперь

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(A^n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}^n\Big(\bigcup_{q\leqslant n} C_q^n\Big) = \\ = 1 - \sum_q \frac{1}{q^2} + \sum_{q_1<q_2} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} - \sum_{q_1<q_2<q_3} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 q_3^2} - \ldots = \prod_q \Big(1 - \frac{1}{q^2}\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(A^n)} = \frac{1}{\prod\limits_q \Big(1 - \frac{1}{q^2}\Big)} = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^2}} = \prod_q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q^{2m}} = \sum \frac{1}{q_1^{2m_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{q_s^{2m_s}},$$

где последняя сумма берется по всем $s \geqslant 0$, всем конечным словам $(q_1, \ldots, q_s)$ с простыми $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$ и всем конечным словам $(m_1, \ldots, m_s)$, $m_i \geqslant 0$. Так как каждое натуральное число можно единственным образом записать в виде $x = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_s^{m_s}$, последняя сумма равна $\sum\limits_{x\geqslant 1} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}^n(A^n) = \frac{6}{\pi^2}.$$

§1.4. Эквивалентные определения σ-аддитивности, борелевских σ-алгебр и измеримости

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство.

Теорема 1.36. *Предположим, что функция* P *на* $\mathcal{F}$ *обладает свойствами вероятностной меры, но* σ*-аддитивность заменена на конечную аддитивность, так что*

1) $\mathsf{P}(C) \geqslant 0$ *для всякого* $C \in \mathcal{F}$;

2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

3) *если* $C_i \in \mathcal{F}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *и* $C_i \cap C_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(C_i).$$

Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

1) P — σ*-аддитивная мера (и, значит, — вероятностная мера)*;

2) *для всякой последовательности событий* $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \subseteq C_{i+1}$, *выполняется равенство*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i} C_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mathsf{P}(C_i);$$

3) *для всякой последовательности событий* $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \supseteq C_{i+1}$, *выполняется равенство*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i} C_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mathsf{P}(C_i);$$

4) *для всякой последовательности событий* $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \supseteq C_{i+1}$, $\bigcap\limits_{i} C_i = \varnothing$, *справедливо соотношение*

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}(C_i) = 0.$$

Доказательство. Для всех пар утверждений эквивалентность доказывается одинаково. Докажем, например, что утверждение 1 эквивалентно утверждению 4. Пусть $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \supseteq C_{i+1}$, $\bigcap\limits_{i} C_i = \varnothing$. Рассмотрим события $B_i = C_i \setminus C_{i+1}$. Тогда $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $C_k = \bigcup\limits_{i\geqslant k}^{\infty} B_i$. Из σ-аддитивности меры P следует, что $\mathsf{P}(C_1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_i)$. Таким образом, остаток ряда $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \mathsf{P}(B_i) = \mathsf{P}(C_k)$ стремится к нулю при $k \to \infty$, а это и есть свойство 4.

Обратно, докажем, что из свойства 4 вытекает σ-аддитивность. Предположим, что имеется последовательность событий C_i, $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Тогда

$$C = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i\right)$$

для любого n, и в силу конечной аддитивности

$$\mathsf{P}(C) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(C_i) + \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i\right).$$

Последовательность событий $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i$ убывает, и $\bigcap_n B_n = \varnothing$. Следовательно, $\mathsf{P}(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и $\mathsf{P}(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(C_i)$. □

Теперь мы рассмотрим важнейшие примеры σ-алгебр, которые встречаются в теории вероятностей.

Вначале дадим следующее общее определение.

Определение 1.37. Пусть $\mathcal{A} = \{A\}$ — произвольная совокупность подмножеств пространства Ω. Пересечение всех σ-алгебр, содержащих все элементы совокупности $\mathcal{A}$, называется *σ-алгеброй, порожденной $\mathcal{A}$*, или *минимальной σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{A}$*. Эту σ-алгебру обозначают $\sigma(\mathcal{A})$.

Другими словами,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \big\{C : C \in \mathcal{F} \text{ для каждой такой } \sigma\text{-алгебры } \mathcal{F}, \text{ что } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\big\}. \quad (1.1)$$

Мы должны сделать три замечания, чтобы придать смысл этому определению. Во-первых, имеется по крайней мере одна σ-алгебра, которая содержит $\mathcal{A}$, а именно σ-алгебра всех подмножеств пространства Ω. Во-вторых, ясно, что пересечение любой совокупности σ-алгебр есть снова σ-алгебра. Следовательно, множество $\sigma(\mathcal{A})$ в формуле (1.1) определено корректно и является σ-алгеброй. Наконец, очевидно, что всякая σ-алгебра $\mathcal{F}$, которая содержит $\mathcal{A}$, должна также содержать $\sigma(\mathcal{A})$, иначе можно было бы рассмотреть σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}$, которая бы строго содержалась в $\sigma(\mathcal{A})$. В этом смысле $\sigma(\mathcal{A})$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все элементы совокупности $\mathcal{A}$.

Теперь предположим, что $\Omega = \mathbb{R}$. Рассмотрим следующие семейства подмножеств: