

**Воспоминания
о Феликсе Александровиче
Березине – основоположнике
суперматематики**

МЦНМО

УДК 51(092)
ББК 22.1г
В77

Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине —
основоположнике суперматематики
Составители Е. Г. Карпель и Р. А. Минлос
Под ред. Д. А. Лейтеса и И. В. Тютина
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
382 с.
ISBN 978-5-4439-2158-7

В книге собраны воспоминания о Ф. А. Березине — выдающемся ученом, оставившем свои работы в различных областях математики и физики. Наиболее важные его результаты относятся к суперматематике — разделу математики, чрезвычайно важному для современной теоретической физики.

В сборнике опубликованы как научные статьи, в которых рассказывается об открытиях Ф. А. Березина, так и воспоминания родных, коллег, учеников.

Для широкого круга читателей.

Подготовлено на основе книги:

Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине — основоположнике суперматематики / Составители Е. Г. Карпель и Р. А. Минлос, под ред. Д. А. Лейтеса и И. В. Тютина. — М.: МЦНМО, 2009.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-74-83
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-2158-7

© Карпель Е. Г., 2008
© МЦНМО, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Два слова об этой книге (вместо предисловия) 5

I. О науке

Феликс Александрович Березин (краткий очерк научной жизни) 13
Р. А. Минлос

Суперматематика и физика 34
А. С. Шварц

О Ф. А. Березине и его работе по представлению групп токов 40
А. Вершик

Квантование по Березину 50
В. П. Паламодов

«Метод вторичного квантования» Березина. Взгляд 40 лет спустя 59
Ю. А. Неретин

От интеграла Березина к формализму Баталина — Вилковыского:
взгляд матфизика 112
Андрей Лосев

Псевдоклассическое действие Березина — Маринова 139
Д. Гитман

II. Семейные воспоминания

Ф. А. Березин, мой папа 151
Н. Березина

Последний путь 153
Е. Г. Карпель

III. Воспоминания друзей, коллег и учеников

Об Алике (Феликсе Александровиче) Березине 229
В. М. Тихомиров

О близком друге 241
Н. Д. Введенская

Березин — это был супер! <i>В. П. Маслов</i>	250
Мой вечно молодой старший друг Алик Березин <i>А. Кириллов</i>	252
Об Алике Березине <i>А. М. Вершик</i>	255
Об Алике Березине и о его времени <i>Виктор Паламодов</i>	260
Подарок судьбы <i>Михаил Шубин</i>	268
О моем учителе Феликсе Александровиче Березине <i>В. Ф. Молчанов</i>	273
Ничто человеческое... <i>Григорий Литвинов</i>	279
Мои встречи с Феликсом Александровичем Березиным на фоне нашей тогдашней жизни <i>Д. Гитман</i>	282
Устные рассказы <i>Дмитрий Лейтес</i>	302
Семь историй <i>С. Конштейн</i>	310

IV. На семинаре Березина

О семинаре Ф. А. Березина <i>Борис Воронов, Дмитрий Гитман, Семён Конштейн, Игорь Тютин, Анатолий Шабад</i>	317
--	-----

V. Приложения

Материалы из архива Ф. А. Березина	357
Некрологи	368
Список печатных работ Ф. А. Березина	377

ДВА СЛОВА ОБ ЭТОЙ КНИГЕ (вместо предисловия)

В те времена — времена меньшей
свободы, но большей независимости...

А. Дюма. Три мушкетёра

Эти воспоминания объединили и людей близких Березину, хорошо его знавших, и встречавших его лишь иногда, и тех, кто не знал Березина при его жизни. Это объединение произошло на почве любви к нему и огромного уважения к его человеческим качествам, и к его выдающимся научным способностям и научным результатам.

Мы уверены, что научное наследие Березина будет находить всё новые применения как в физике, так и в математике!

Эта книга — дань нашего уважения и памяти к выдающемуся учёному и замечательному человеку.

* * *

Сейчас, когда цензуры снова пока уже нет, нами управляют воспоминания об иных временах. Поэтому появление в печати (с третьей попытки) воспоминаний вдовы Ф. А. Березина на родном языке не может не радовать.

Книгу предваряет обзорная статья Минлоса. Блестяще написанная более пятнадцати лет назад, она выдержала испытание временем, неоднократно опубликована на английском и французском языках, и мы рады познакомить, наконец, читателя с оригиналом.

Читателю, которому интересно новое в математической части, мы особо рекомендуем статьи А. Лосева и Ю. Неретина, см. также: wwwth.itep.ru/~neretin.

Работы, отмеченные «*», добавлены редакторами русской версии. Список этих работ помещён в конце предисловий.

Д. Лейтес, И. Тютин

* * *

Так уж получилось, что первое издание книги о Феликсе Александровиче Березине было осуществлено в 2007 г. сингапурским издательством «World Scientific» на английском языке [1]. Я был составителем этой книги и её редактором. Данное русское издание представляет собой значительно расширенный и существенно переработанный вариант, куда вошли многие материалы, которых просто не существовало в 2007 году.

История английского издания такова. Осенью 2005 года Аркадий Вайнштейн мимоходом упомянул о том, что его друг Дмитрий Гитман прислал ему по электронной почте воспоминания вдовы Березина, Елены Григорьевны Карпель. Без сомнения, каждый студент и каждый физик-теоретик, занимающийся современной теорией поля или теорией струн, знает об интеграле Березина по грассманновым переменным. Интегрирование по Березину составляет основу нынешнего подхода к теориям с фермионами и квантования калибровочных теорий (введение духов Фаддеева — Попова). Без использования интеграла Березина исследования в области теории струн и суперсимметрии — центральных темах современной теоретической физики высоких энергий — были бы чрезвычайно затруднены, если вообще возможны ¹⁾.

К стыду своему должен признаться, что в то время почти ничего не знал о Березине. Лично встречался с ним всего пару раз на семинарах в Москве в конце 70-х годов прошлого века. Ещё я слышал, что в 1980 году произошел несчастный случай, в результате которого он погиб в возрасте 49 лет. У меня почему-то сложилось впечатление, что интегрирование по Березину — изобретение «глубокой древности». Уверен, что то же самое думают многие молодые теоретики, пришедшие в физику в 1980-х, 1990-х годах и позже.

Аркадий сказал, что воспоминания Елены Карпель очень трогательны. К тому же меня всегда интересовала история физики высоких энергий. Мне захотелось немедленно прочесть эти воспоминания самому. Я написал Гитману, и он любезно прислал мне эссе Елены Григорьевны.

Я прочел его сразу, проглотил на одном дыхании. Эти воспоминания оказались не только трогательным свидетельством давно

¹⁾ Не говоря уже о результатах в физике твердого тела, см. книгу К. Ефетова «Суперсимметрия беспорядка и хаоса» [2*]. — *Прим. ред. Д.Л.*

ушедших дней, они ещё было мастерски написаны. Я был захвачен глубиной и литературной зрелостью этого сочинения, рассказывающего о жизни и смерти замечательного человека, выдающегося математика, чьи идеи опередили свое время и во многих случаях не были в полной мере оценены современниками. Только позже выяснилось, что они определили развитие целых областей математической физики и сыграли ключевую роль в создании современного аппарата физики высоких энергий и теории струн.

Что поразило меня больше всего — так это очевидные параллели между жизнью и судьбой Феликса Березина и жизнью и судьбой других советских ученых, над чьими биографиями мне довелось работать в прошлом. Книга о Феликсе Березине [1] — моя четвертая книга такого типа. В 2000 году я опубликовал две книги, посвящённые Юрию Гольфанду [2], физику-теоретику, который в самом начале 1970-х годов, вместе со своим студентом Евгением Лихтманом, открыл суперсимметрию и построил первую суперсимметричную четырехмерную теорию поля, суперсимметричную электродинамику. За два года до ²⁾ Весса и Зумино! Эти книги тоже вышли в издательстве «World Scientific». Позднее, в 2005 году, в том же издательстве у меня вышла книга, посвящённая памяти Беллы Субботовской [3]. Она была первопроходцем в области математики сложных систем, но в конце 1970-х годов оставила научную карьеру ради благородного дела: Белла Субботовская основала в Москве «Народный университет» для всех тех, кого не приняли в МГУ.

Эти три человека, о которых рассказывают мои книги, были современниками, но всё остальное у них разнилось: возраст, пол, семейное положение, черты характера, интересы, области науки, в которых они работали... И тем не менее, они разделили общую судьбу: интеллектуальный потенциал, растраченный во многом впустую, невостребованный талант, разбитые ожидания, повседневное унижение... Их жизни были поломаны, точно так же как и жизни многих других людей, чья единственная «вина» заключалась в том, что они родились в «не той» стране и в неудачное время. Официально они должны были бы наслаждаться преимуществами «реального соци-

²⁾М. Шифман — физик. Он даже не представляет себе, что кто-то может не знать, что только после доклада Весса и Зумино в 1974 году, в котором был введён термин «суперсимметрия» и впервые внятно и осознанно показаны некоторые из тех чудес, которые дают нам суперсимметрии, и начался «супербум». — *Прим. ред. Д.Л.*

ализма» по-советски. А вместо этого? Сколько открытий остались несделанными? Сколько добрых дел? Мы уже никогда об этом не узнаем.

История, рассказанная Еленой Карпель, стала моей личной болью, хотя, по сути дела, лично Феликса Березина я не знал. Мне захотелось узнать о нём больше. Вскоре мое расследование привело меня к группе математиков (Р. Минлос, М. Шубин, А. Вершик), которые в 1996 году издали (вместе с покойным Р. Добрушиным) в Американском математическом обществе сборник [4] памяти Березина. Помимо математических текстов этот сборник содержал воспоминания некоторых друзей и коллег Березина. Американское математическое общество любезно согласилось на включение этих статей в [1]. Я написал Мише Шубину, Анатолию Вершику и Никите Введенской с предложением принять участие в намечаемой книге. Они немедленно и с энтузиазмом ответили на моё письмо, пообещав безусловную поддержку. Профессор Вершик написал, специально для [1], новый очерк о Феликсе Березине. Кроме того, от него я узнал о публикации «Березинского сборника» [5] в Петербурге.

В ноябре 2005 года мне удалось связаться с Еленой Карпель, а летом 2006 я встретился с ней в Ла-Рошели, французском городе, где она сейчас проживает. В 1991 году она и ее дочь Наташа Березина покинули Советский Союз, чтобы начать новую жизнь во Франции. Она рассказала мне о прошедших с тех пор пятнадцати драматических годах, полных борьбы за выживание в незнакомой и зачастую враждебной среде. Будучи совершенно поразительной сама по себе, эта «современная» история вряд ли уместна в данной книге. Кто знает, может, когда-нибудь в будущем она будет написана и опубликована...

Очерк Карпель о Березине составляет сердце этой книги. Первым делом она пыталась его опубликовать по-русски в России. По разным причинам эти попытки провалились, как и ее последующая попытка опубликовать французский перевод во Франции. Таким образом, английский перевод, выполненный Романом Ковалёвым, представляет собой первое издание.

Елена Григорьевна связала меня с Виктором Паламодовым, который в настоящее время проживает в Германии, и, несколько позже, с Дмитрием Лейтесом, работающим в Швеции. Они приняли этот проект близко к сердцу и прислали свои воспоминания. Дело не ограничилось этими очерками. Они прислали много замечаний

и предложений по поводу возможных усовершенствований. Некоторые из их предложений мне удалось осуществить.

С первого дня я был в постоянном контакте с Дмитрием Гитманом. Его рассказ о нескольких встречах с Феликсом Березиным — очень ясный, хотя и грустный, набросок нашей жизни в те годы. Он прекрасно дополняет воспоминания Карпель.

Английская версия книги состоит из трёх частей³⁾. Часть I содержит две статьи (Андрея Лосева и Роберта Минлоса), дающих обзор научного вклада Феликса Березина. Они показывают открытия Березина и его новаторские идеи в математической физике в правильной перспективе — в перспективе исследователя сегодняшнего дня. Часть II представляет воспоминания Елены Карпель, вдовы Ф. А. Березина, его дочери, коллег, друзей и учеников Березина. Наконец, в части III опубликован английский перевод двух документов из березинского архива: письмо ректору МГУ и письмо в Правление Московского математического общества.

Литература

- [1] Felix Berezin: Life and Death of the Mastermind of Supermathematics / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2007.
- [2] The Many Faces of the Superworld / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2000; The Supersymmetric World / G. Kane and M. Shifman (Eds.). Singapore: World Scientific, 2000.
- [3] You Failed Your Math Test, Comrade Einstein / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2005.
- [4] F. A. Berezin Memorial Volume // AMS Transl. Series 2. Advances in the Mathematical Sciences, Vol. 175, 177 / R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin and A. M. Vershik (Eds.). Providence, RI: AMS, 1996.
- [5] Теория представлений и динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы / Под ред. А. М. Вершика. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургское отделение математического института им. А. В. Стеклова, 2006. (Записки научных семинаров ПОМИ, т. 331.)

*М. Шифман*⁴⁾

³⁾Настоящее русское издание заметно расширено. — *Прим. ред. Д. Л.*

⁴⁾Институт теоретической физики, Университет Миннесоты, Миннеаполис, Миннесота, США

Список работ, добавленных редакторами

- [1*] Quantum fields and strings: a course for mathematicians. Vol. 1, 2. Deligne P., Etingof P., Freed D., Jeffrey L., Kazhdan D., Morgan J., Morrison D., Witten E. (eds.) Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study. Princeton, NJ. 1996–1997. AMS and IAS. 1999.
- [2*] *Eĭetov K.* Supersymmetry in disorder and chaos. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [3*] *Зунник Б. М., Пак Д. Г.* Суперполевая формулировка простейших трёхмерных калибровочных теорий и конформных супергравитаций // ТМФ. 1988. Т. 77, № 1. С. 97–106.
- [4*] Семинар по суперсимметриям / Под ред. Д. Лейтеса. Готовится к печати. М.: МЦНМО, 2009.

Ч А С Т Ь I

О НАУКЕ

ФЕЛИКС АЛЕКСАНДРОВИЧ БЕРЕЗИН

(краткий очерк научной жизни) ¹⁾

Р. А. Минлос

§ 1. Что он успел сделать в науке

*Его труды крупным планом, современное понимание
математической физики*

Ф. Березин за свою сравнительно недолгую жизнь (он погиб от несчастного случая, не достигнув 50 лет) успел сделать в математике и математической физике очень многое. Он не только оставил существенный след в некоторых ранее существовавших областях математики и физики: теории представлений групп, спектральной теории операторов, квантовой механике, статистической физике, конструктивной квантовой теории поля, но и положил начало ряду новых концепций, методов и теорий. Среди них — общий подход к проблеме квантования, построение формализма вторичного квантования в терминах функционального интегрирования, который перерос затем в так называемое исчисление символов (некая предтеча теории псевдодифференциальных операторов), и, наконец, (и это было самым важным и издавна взлелеянным им трудом) теория суперсимметрий и супермногообразий — то, что в математическом обиходе называется суперматематикой. Ниже мы скажем обо всём этом подробнее.

Здесь же нам хочется подчеркнуть, что, быть может, самым ценным и важным в математической жизни Ф. Березина были не те

¹⁾При составлении этого очерка я воспользовался материалами, которые мне предоставили несколько лет назад А. А. Кириллов, Д. А. Лейтес, В. Н. Сушко, М. А. Шубин. Некоторые факты я узнал от Н. Д. Введенской. Всем им я за это признателен.

или иные конкретные его достижения, а вся упорная направленность его интересов, главным стержнем которых являлась математическая физика. Он был одним из той немногочисленной когда-то группы людей, чьими усилиями математическая физика приобрела свой нынешний вид. Собственно, это словосочетание — математическая физика — до конца 1950-х годов, по крайней мере в России, ассоциировалось преимущественно с изучением специальных дифференциальных уравнений, возникших в физических теориях (волновое уравнение, уравнение теплопроводности и т. д.). Ф. Березин одним из первых заметил, что старые меха ещё не ветхи для молодого вина и название «математическая физика» следует применять к гораздо более обширному кругу математических проблем — ко всем теориям и структурам в математике, которые возникают из стремления ясно осмыслить фундаментальные физические теории (квантовую физику, кинетическую теорию, статистическую физику, теорию тяготения).

Сейчас математическая физика — именно в таком её широком понимании — очень разрослась и привлекла к себе множество математиков (и даже физиков), а лет 45–50 назад, в самом начале деятельности Ф. Березина, физики в большинстве своём относились ко всем этим начинаниям с плохо скрываемой усмешкой, а математики — с нескрываемым равнодушием. И нужно было иметь много мужества и упорства для того, чтобы, видя это непонимание и втайне страдая от него, оставаться верным своим замыслам.

Вот так — несколькими крупными мазками — мы обозначили главные пружины математических занятий Ф. Березина.

§ 2. Молодые годы

Семья, школа, университет, аспирантура, которой не было

Алик (Феликс Александрович) Березин родился 25 апреля 1931 года в Москве, в типичной интеллигентной семье того времени. Его отец по профессии экономист, мать — врач. Родители Алика разошлись очень рано, и воспитывался он матерью и её родителями. В 1948 г., после окончания школы, он поступил на первый курс механико-математического факультета Московского университета.

Его интерес к математике возник ещё задолго до этого: начиная с восьмого класса школы он участвует в школьных математических

олимпиадах — очень увлекательных соревнованиях по решению трудных задач, которые в то время молодые энтузиасты (студенты и аспиранты) устраивали каждой весной на механико-математическом факультете МГУ. Эти же энтузиасты в течение всего года вели для школьников нечто вроде протосеминаров (они назывались математическими кружками), где излагались изящные теоремы и даже фрагменты сложных теорий, доступные школьникам, и решались трудные задачи. Алик Березин посещал один из таких кружков, руководимых Е. Б. Дынкиным, который в то время был аспирантом.

На первых курсах Алик также работает в студенческом семинаре Е. Б. Дынкина, возникшем, по существу, из бывшего школьного кружка. В этом семинаре было две основных тематики — вероятностная и алгебраическая (в соответствии с двумя математическими ипостасями Е. Б. Дынкина в те времена). Ф. Березину ближе была алгебра, и он на всю жизнь получил крепкую алгебраическую прививку, которая прослеживается во всех его последующих работах.

В школьном кружке, а потом и на семинаре Е. Б. Дынкина, у Березина завязываются ранние знакомства со многими молодыми математиками, учившимися в то время на механико-математическом факультете (Н. Введенская, Р. Добрушин, Ф. Карпелевич, С. Каменомостская, Р. Минлос, И. Шапиро-Пятецкий, А. Юшкевич, В. Успенский). Эти знакомства, многие из которых продолжались до самой смерти, были в дальнейшем очень существенны для него.

На старших курсах Алик Березин начинает посещать известный семинар И. М. Гельфáнда и на долгое время подпадает под сильное влияние последнего. На семинаре И. М. Гельфáнда им была сделана его первая крупная работа по теории представлений групп (см. ниже).

В 1953 году Березин оканчивает механико-математический факультет. Несмотря на то что к этому времени он уже зарекомендовал себя как талантливый молодой математик (по-видимому, он был самым сильным на своём курсе), ему отказывают в приёме в аспирантуру: как известно, в последние годы жизни Сталина государственным образом насаждался антисемитизм, и Березин, мать которого была еврейкой, почти автоматически лишался права на такого рода привилегии (к этому времени евреев уже почти не принимали в МГУ даже студентами). Березин три года преподаёт матема-

тику в одной из московских школ, продолжает посещать семинар И. М. Гельфанда и много работает по теории представлений.

В 1956 году, с началом хрущёвской либерализации, обстановка на механико-математическом факультете несколько изменилась к лучшему и И. Г. Петровский, бывший в то время ректором Московского университета, по настоянию И. М. Гельфанда зачисляет Ф. Березина на работу на кафедру теории функций и функционального анализа. Березину было тогда 25 лет, и на этой кафедре он проработал до конца своей жизни.

§ 3. Первый период работы в университете

Кафедра в 1950–60-е годы, как начиналась математическая физика, работы первого периода, Березин — педагог

Первые годы его работы проходили на фоне совершенно удивительного интеллектуального и духовного взлёта, который переживал механико-математический факультет в конце 1950-х и в шестидесятые годы. Особенно это проявилось на кафедре, где работал Алик Березин. До середины 1950-х годов эта кафедра, много лет возглавляемая замечательным, по-детски чистым человеком Д. Е. Миншовым, в основном состояла из специалистов по теории функций вещественного или комплексного переменного (Д. Е. Миншов, Н. К. Бари, А. И. Маркушевич). Эта группа с течением лет также пополнялась хорошими специалистами (П. Л. Ульянов, Б. В. Шабат, А. Г. Витушкин, А. А. Гончар, Е. Долженко и их ученики).

Но наиболее интенсивно возрастала функционально-аналитическая часть этой кафедры, долгие годы курируемая И. М. Гельфандом. Одновременно с Березиным на кафедру был зачислен Р. Минлос, чуть позже туда был приглашён Г. Е. Шилов, а затем и его ученик А. Г. Костюченко. Через несколько лет — к середине шестидесятых годов — на кафедре работала уже целая плеяда блестящих учеников И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (А. А. Кириллов, В. П. Паламодов, Г. А. Горин и др.). В начале шестидесятых годов на кафедру был приглашён профессор Б. М. Левитан, несколько лет там работали С. В. Фомин и В. М. Тихомиров.

Таким образом, благодаря усилиям И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, при поддержке И. Г. Петровского на кафедре возник совершенно первоклассный коллектив аналитиков, подобный которому

вряд ли можно было найти в каком-либо из университетов мира. Этот коллектив, изредка пополняемый хорошими специалистами и в последующие годы, просуществовал почти в неизменном виде до начала девяностых годов, когда исподволь длившийся распад мехмата (начавшийся в конце шестидесятых годов при декане П. М. Огибалове) из своей скрытой фазы перешёл в явную. Конечно, кафедра за это время понесла невосполнимые потери: смерть Г. Е. Шилова в 1975 году, смерть Березина в 1980 году. Да и И. М. Гельфанд фактически отошёл от кафедральных дел к концу 1960-х годов.

В 1950–1960-е годы интенсивная научная жизнь, развернувшаяся на кафедре, приток молодых талантливых студентов и аспирантов создавали радостный мажорный фон для научных занятий. В 1957 году Ф. Березин защищает кандидатскую диссертацию, которая содержала упомянутую выше работу об операторах Лапласа на полупростых группах Ли [1]. В ней заключался замечательный результат — описание всех неприводимых бесконечномерных представлений комплексных полупростых групп Ли в банаховых пространствах. На современном языке теорема Березина может быть сформулирована так: всякое неприводимое представление группы G изоморфно подфактору элементарного представления (т. е. представления, индуцированного одномерным характером борелевской подгруппы).

Глубина этого результата видна из того обстоятельства, что следующий шаг в этом направлении был сделан лишь спустя 20 лет. А именно, Д. П. Желобенко и М. Дюфло получили явную классификацию всех неприводимых представлений, указав, какие из подфакторов элементарных представлений эквивалентны друг другу.

В 1956 году Ф. А. Березин по совету И. М. Гельфанда углубляется в изучение квантовой теории поля и с этого момента и начинаются его занятия математической физикой.

В первый период этих занятий — со второй половины 1950-х годов и до середины 1960-х годов — Ф. Березин много размышлял над вопросами спектральной теории и, в частности, теории рассеяния для многочастичного оператора Шрёдингера. Полученных им самим окончательных результатов в этом направлении немного — несколько работ, в которых разбираются те или иные частные ситуации (см. [2]–[5]), однако его наблюдения, соображения и идеи, возникшие в результате этих занятий, оказали безусловное влияние на ряд математиков и физиков, общавшихся с ним, и, в конечном

итоге, немало послужили тому пониманию картины спектра и рассеяния в квантовой задаче N тел, которым мы ныне обладаем.

Кроме Ф. Березина в это же время ещё несколько молодых математиков в России начинают заниматься сходными проблемами (Г. М. Жислин, В. П. Маслов, Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев), и создаётся зародыш того будущего движения математиков в математическую физику, о котором говорилось выше. Члены этой группы в то время часто общались друг с другом, и Алик Березин по праву считался их лидером. Особенно плодотворным было сотрудничество Ф. Березина с Л. Д. Фаддеевым, на которого Березин, по-видимому, оказал в то время немалое влияние. В дальнейшем — уже в середине шестидесятых годов — научные интересы у всех этих математиков разошлись, несколько увял и дух прежнего товарищества, но воспоминания о той поре, видимо, у многих ещё живы.

В самом начале 1960-х годов Ф. Березин выполнил свою работу по формализму вторичного квантования, изложенную позднее в его известной монографии «Метод вторичного квантования» [6]. Этот формализм, издавна используемый физиками, основан на представлении линейных операторов, действующих в фоковском пространстве, в виде функций (чаще всего полиномов) от некоторых специальных образующих в алгебре всех таких операторов — так называемых операторов рождения и уничтожения.

Ф. Березин придал этому исчислению элегантную форму. Он так сопоставил каждому такому полиному некоторый полиномиальный функционал на алгебре функций в случае симметрического фоковского пространства или элемент некоторой грассмановой алгебры в случае антисимметрического фоковского пространства, что при действиях с операторами (перемножении, сопряжении, преобразованиях, возникающих от канонической замены исходных образующих, и т. д.) соответствующие функционалы преобразуются тем или иным привычным математику способом: дифференцированием, перемножением, заменой переменных, континуальным интегрированием. Этот метод применялся самим Березиным и его учениками при изучении некоторых одномерных моделей квантовой теории поля: модели Тирринга (как для случая нулевой, так и для случая положительной массы), нелинейного вторично-квантованного уравнения Шрёдингера и др. (см. [7]–[9]). Следует отметить, что эти работы в значительной мере повлияли на появление и развитие нынешней конструктивной теории поля.

Работа по вторичному квантованию составила содержание докторской диссертации Ф. Березина, которую он защитил на механико-математическом факультете в 1965 году.

Занятия Ф. Березина вторичным квантованием имели ряд важных научных последствий. Во-первых, благодаря им вновь пробудился интерес к старой задаче об описании представлений так называемых коммутационных (или антикоммутационных) соотношений (см. по этому поводу обзор В. Я. Голодца в УМН, [10]).

Другая тема, родившаяся отчасти из занятий вторичным квантованием и развивавшаяся Ф. Березиным в течение многих лет, — общее осмысление процедуры квантования. Хотя этими вопросами Ф. Березин занимался с середины 1960-х годов, наиболее полно его концепция выражена в цикле статей 1973–1976 гг. (см. [11]–[13]). Согласно основной идее этих работ квантование имеет следующий точный математический смысл: алгебра квантовых наблюдаемых является деформацией алгебры классических наблюдаемых, причём параметром деформации служит постоянная Планка, а направление деформации (первая производная по параметру в нуле) задаётся скобкой Пуассона. В случае плоского фазового пространства эта точка зрения эквивалентна обычной. В остальных случаях она приводит к новой содержательной теории. В частности, в статьях Ф. А. Березина в Известиях АН СССР [11], [13] рассмотрен случай, когда фазовым пространством служит однородная симметрическая область в комплексном пространстве. Им был обнаружен новый интересный эффект: множество возможных значений постоянной Планка дискретно и ограничено сверху.

Ещё раньше, во второй половине 1960-х годов, в связи со своими занятиями вторичным квантованием Ф. Березин публикует работу [14], в которой изучаются представления операторов в гильбертовом пространстве с помощью различных систем образующих в алгебре таких операторов (pq -символы, qp -символы, символы Вейля, виковский символ, используемый обычно во вторичном квантовании). Отметим, что во многих своих аспектах эта работа близка к возникшей в это же время теории псевдодифференциальных операторов, играющей теперь важную роль в математической физике. Таким образом, в работах Ф. Березина независимо появились многие важные идеи этой теории, хотя, к сожалению, значение работ Ф. Березина в этом плане было далеко не сразу осознано.

Примером конкретной деятельности Ф. Березина в этой области, приведшей его к открытию красивых и важных математических объектов, являются размышления по поводу неравенства Фейнмана:

$$\mathrm{Tr} e^{-t\hat{H}} < (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH(p,q)} dp dq, \quad (1)$$

где $H(p, q) = p^2 + V(q)$, (где $V(q)$ — потенциал), а $\hat{H} = -\Delta + V(q)$ — соответствующий квантовый гамильтониан — оператор Шрёдингера, действующий в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Ф. Березин пытался понять, для каких более общих гамильтонианов \hat{H} верно это неравенство. Стало ясно, что ответ существенно зависит от выбранного квантования, т. е. соответствия между H и \hat{H} . В конце концов оказалось, что для любых операторов верны следующие замечательные неравенства:

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH_W(p,q)} dp dq \leq \mathrm{Tr} e^{-t\hat{H}} < (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH_{aW}(p,q)} dp dq, \quad (2)$$

где $H_W(p, q)$ — виковский символ оператора \hat{H} , $H_{aW}(p, q)$ — так называемый антивиковский символ этого оператора, впервые введённый и рассмотренный Ф. Березиным в связи с неравенством (2). В работе [15] было доказано, что экспоненту e^{-t} в (2) можно заменить любой выпуклой вниз функцией. В дальнейшем неравенство (2) и указанное его обобщение было распространено Ф. Березиным на тот случай, когда вместо $H_W(p, q)$ и $H_{aW}(p, q)$ рассматриваются введённые Ф. Березиным в [16] ковариантный и контравариантный символы, определяемые с помощью переполненной системы векторов в гильбертовом пространстве. Абстрактная схема введения символов в [16] в дальнейшем использовалась Ф. Березиным при построении квантования на кэлеровых многообразиях. Кроме того, уже в работах [15], [16] неравенства типа (2) были использованы Ф. Березиным для нахождения различных спектральных асимптотик оператора \hat{H} при достаточно больших значениях спектрального параметра, а также квазиклассических асимптотик. В частности, в работе [15] квазиклассическая асимптотика функции распределения собственных значений впервые была строго доказана для достаточно общих гамильтонианов.