

ВВЕДЕНИЕ в математическое моделирование транспортных потоков

УДК 519.1, 519.2, 519.6, 519.8(075)

ББК 22.1я73

В24

Введение в математическое моделирование транспортных потоков

Учебное пособие

А. В. Гасников и др.

Под ред. А. В. Гасникова

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2014

426 с.

ISBN 978-5-4439-2150-1

В книге излагается математический аппарат и некоторые физические концепции, которые могут пригодиться при создании (модернизации) интеллектуальной транспортной системы (ИТС).

Первое издание вышло в 2010 году в издательстве МФТИ. В настоящее второе издание среди прочего были добавлены материалы практического характера от компаний «А+С Консалт» (PTV Vision ®), «Яндекс.Пробки».

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов физико-математических специальностей (МФТИ, НМУ, МГУ, МГТУ, ВШЭ). Рекомендуется научным работникам, интересующимся вопросами математического моделирования.

Подготовлено на основе книги: Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / А. В. Гасников и др. Под ред. А. В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-74-83.
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-2150-1

© Коллектив авторов, 2013

© МЦНМО, 2014

Оглавление

Вступительное слово руководителя Департамента транспорта и развития дорожно-транспортной инфраструктуры г. Москвы М. С. Ликсутова	6
Предисловие к новому изданию	10
Предисловие	12
Введение	19
Глава 1. Исследование транспортных потоков с помощью теории экономического равновесия	25
Введение	25
1.1. Задача транспортного равновесия	26
1.1.1. Моделирование транспортных потоков как задача принятия решений	26
1.1.2. Формализация проблемы	27
1.1.3. Сведение к вариационному неравенству	30
1.1.4. Разрешимость задач транспортного равновесия	33
1.1.5. Симметричные задачи транспортного равновесия	36
1.2. Построение функций транспортных затрат	37
1.2.1. Аддитивные функции затрат	38
1.2.2. Неаддитивные функции затрат	40
1.2.3. Модель стационарной динамики	41
1.3. Соотношение между системным оптимумом и конкурентным равновесием	42
1.4. Численные методы решения задач транспортного равновесия	48
1.4.1. Проекционные методы решения задачи транспортного равновесия	49
1.4.2. Декомпозиция проекционных методов для поиска равновесных потоков	51
1.4.3. Проекционный метод с генерацией маршрутов	52
1.4.4. Ступенчатая регулировка шага проекционного метода	55
1.5. Построение матрицы корреспонденций	58
1.5.1. Гравитационная модель	58
1.5.2. Энтропийная модель	60
1.5.3. Связь между гравитационной и энтропийной моделями	64
1.6. Парадоксы транспортного равновесия	65
1.6.1. Парадокс Браесса	65
1.6.2. Транспортно-экологические парадоксы	68

1.7. Практическая работа	72
Литература	75
Глава 2. Математические модели транспортных потоков	79
2.1. Макроскопические модели	79
2.1.1. Модель Лайтхилла—Уизема—Ричардса (LWR)	79
2.1.2. Модель Танака	89
2.1.3. Модель Уизема	90
2.1.4. Модель Пейна и ее обобщения	98
2.1.5. Кинетические модели	103
2.1.6. Практические приложения моделей	104
2.2. Микроскопические модели	106
2.2.1. Модель оптимальной скорости Ньюэлла	107
2.2.2. Модель следования за лидером «Дженерал Моторс»	112
2.2.3. Модель Трайбера «разумного водителя»	113
2.2.4. Модели клеточных автоматов	115
2.3. Модельные задачи	121
2.3.1. Эволюции глобального затора в транспортном потоке, описываемом моделями LWR и Уизема	122
2.3.2. Эволюции локального затора в транспортном потоке, описываемом моделями LWR и Уизема	135
2.3.3. Задача о светофоре: при каких условиях перед светофором не будет скапливаться очередь	140
2.4. Теория Кернера—Конхойзера движущихся локальных кластеров в моделях класса «Дженерал Моторс»	142
2.4.1. Фундаментальные эмпирические свойства перехода от свободного транспортного потока к плотному и модели транспортного потока	143
2.4.2. Характеристические параметры широкого движущегося кластера	148
2.4.3. Линия J Кернера	150
Литература	152
Глава 3. Теория Кернера трех фаз в транспортном потоке — новый теоретический базис для интеллектуальных транспортных технологий 162	
3.1. Три фазы транспортного потока	164
3.1.1. Предварительные сведения	164
3.1.2. Свободный транспортный поток — фаза F	165
3.1.3. Плотный транспортный поток	165
3.1.4. Определение фаз J и S в плотном транспортном потоке	166
3.1.5. Возникновение плотного потока — фазовый переход $F \rightarrow S$	168
3.1.6. Бесконечное число значений пропускных способностей скоростной автомагистрали	172
3.1.7. Широкие движущиеся кластеры (локальные движущиеся заторы) — фаза J	175
3.1.8. Синхронизированный транспортный поток — фаза S	176

3.1.9. Фазовый переход $S \rightarrow J$	176
3.1.10. Неоднородные пространственно-временные структуры транспортного потока, состоящие из фаз S и J	178
3.2. Стохастические модели в рамках теории трех фаз Кернера	180
3.2.1. Стохастическая микроскопическая трехфазная модель транспортного потока	180
3.2.2. Моделирование свойств пространственно-временных структур в транспортном потоке вблизи въезда на скоростную автомагистраль	185
3.2.3. Трехфазная модель клеточных автоматов для транспортного потока (ККВ-модель)	188
3.2.4. Новая трехфазная модель клеточных автоматов для транспортного потока (ККШ-модель)	189
3.3. Применение теории трех фаз Кернера для интеллектуальных транспортных технологий	191
Литература	192
Приложения	199
<i>М.Л. Бланк.</i> Процессы с запретами в моделях транспортных потоков	199
<i>К.В. Воронцов, Ю.В. Чехович.</i> Интеллектуальный анализ данных в задачах моделирования транспортных потоков	224
<i>Е.В. Гасникова.</i> О возможной динамике в модели расчета матрицы корреспонденций	248
<i>А.А. Замятин, В.А. Малышев.</i> Введение в стохастические модели транспортных потоков	271
<i>А.В. Колесников.</i> Транспортная задача и концентрация	304
<i>Ю.Е. Нестеров, С.В. Шпирко.</i> Стохастическое транспортное равновесие	314
<i>А.М. Райгородский.</i> Модели случайных графов и их применения	325
Задачи	349
Задачи к главам пособия и приложениям	349
Задача Штейнера и задачи на графах транспортных сетей	378
Задачи от «Яндекс.Пробки»	391
Исследовательские вычислительные задачи, предлагавшиеся в 2011 г.	398
Практическое приложение	415
<i>А.В. Прохоров, В.Л. Швецов.</i> О практическом опыте моделирования транспортных потоков с помощью пакета программ PTV Vision ®	415

Глава 1

Исследование транспортных потоков с помощью теории экономического равновесия

Введение

Одним из наиболее агрегированных способов описания транспортных систем является экономический подход, суть которого заключается в соотношении интенсивности использования тех или иных технологий, ресурсов и пр. и итогового результата, выражающего конечный выпуск продуктов, оказание определенного объема услуг и т. п. Схематически этот взгляд на экономику отраслей, в том числе и на транспорт, представлен на рис. 1, где x — это усилия, предпринятые для перевозки, нагрузка на транспортную систему, y — объем грузов или количество людей, перевезенные системой. Помимо этого у системы — черного ящика присутствует социально-экономическая оценка q технологического процесса (x, y) .

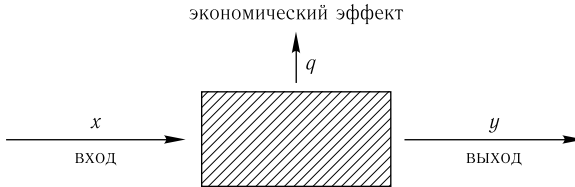


Рис. 1. Представление экономиста о транспорте и не только

Допустимые сочетания затрат x и выпусков y образуют технологическое множество, описанием которого экономист не занимается, в его задачу входит формирование понятия эффективного функционирования системы и отбор и анализ эффективных вариантов.

В данной главе описан один из подходов к моделированию и исследованию транспортных потоков, основанный на теории конкурентного бескоалиционного равновесия, которая позволяет описать достаточно адекватный механизм функционирования автомобильных улично-дорожных сетей (УДС). Будут рассмотрены основные элементы транспортной системы, включающие в себя УДС, факторы, определяющие потребность в перевозках, критерии эффективности транспортной системы и принципы ее функционирования.

Рассматриваемые модели применяются для получения прогнозных оценок загрузки элементов транспортной сети. Подобные задачи интересны

в частности тем, что являются одним из инструментов для объективной оценки эффективности проектов по модификации УДС с точки зрения разгрузки наиболее проблемных участков дорог и улучшения качества транспортного обслуживания.

1.1. Задача транспортного равновесия

1.1.1. Моделирование транспортных потоков как задача принятия решений

Для определения объемов загрузки УДС в первую очередь необходимо выявить правила, по которым водители выбирают тот или иной маршрут следования. Поведенческие принципы пользователей транспортной сети окончательно были сформулированы в работе [64], где постулировались следующие две возможные ситуации.

- 1) Пользователи сети независимо друг от друга выбирают маршруты следования, соответствующие их минимальным транспортным расходам.
- 2) Пользователи сети выбирают маршруты следования исходя из минимизации общих транспортных расходов в сети.

С тех пор в транспортной науке приведенные поведенческие принципы получили названия соответственно *первого* и *второго принципов Вардропа*.

Распределение транспортных потоков согласно первому принципу Вардропа соответствует конкурентному бескоалиционному равновесию, предполагающему совершенный эгоизм участников дорожного движения — каждый стремится достигнуть конечного пункта своей поездки как можно выгоднее для себя и из имеющихся возможных вариантов следования выбирает тот маршрут, по которому будет нести минимальные затраты (временные, финансовые, моральные и т. п.) на проезд. Поэтому данный принцип также называют *пользовательской оптимизацией* (user optimization).

Стоит отдельно отметить, что первый поведенческий принцип предполагает определенные допущения. Во-первых, это совершенная информированность участников движения о ситуации на дорогах — каждый знает затраты на передвижения по тем или иным маршрутам. В настоящее время такое предположение не выглядит изрядной идеализацией, поскольку интенсивно развиваются и внедряются в практическое использование автоматизированные автонавигаторы и интеллектуальные транспортные системы, идет активное оповещение о ситуациях на дорогах через интернет, радио и другие средства информации. Во-вторых, предполагается ничтожно малое влияние отдельного участника движения на затраты по всем маршрутам. Хотя такое предположение и заведомо неверно для

крупногабаритных транспортных средств, для легковых автомобилей оно представляется достаточно разумным, исключая случаи аварийных ситуаций или неопытных водителей за рулем.

Второй принцип Вардропа предполагает централизованное управление движением в сети. Соответствующее ему распределение транспортных потоков называют *системным оптимумом*, а сам принцип — *системной оптимизацией* (system optimization). Примером пользователей, передвигающихся согласно второму принципу, служат водители маршрутизированного транспорта.

Несмотря на то что приведенные поведенческие принципы широко цитируются как принципы Вардропа, на самом деле чуть ранее их сформулировали Ф. Найт [48] и А. Пигу [60], утверждая, что все участники движения, направляющиеся из одного узла сети в другой, распределяются по различным маршрутам таким образом, чтобы удельные (в расчете на один автомобиль) затраты на проезд были одни и те же для всех.

В ситуации массовой автомобилизации, имеющей место практически во всех странах, подавляющее большинство участников дорожного движения любого города составляют легковые автомобили, совершающие преимущественно маятниковые поездки: место проживания — место работы и обратно. Именно такие поездки создают пиковые нагрузки на УДС, вызывают основные потери времени и других ресурсов, повышают аварийность и усложняют социально-экономическую ситуацию. Вместе с тем маятниковые поездки трудовой миграции имеют ряд особенностей, делающих их удобными для моделирования. В первую очередь в силу их повторяемости характеристики таких поездок можно считать стационарными, а самих водителей — имеющих полную информацию о возможных издержках на различных маршрутах. Более того, разумно предполагать совершенный эгоизм участников этих поездок и стремление нести минимальные потери при проезде. Очевидно также и отсутствие возможностей организовать коалиционное поведение, за исключением разовых акций, которые в общем-то не связаны с ежедневными регулярными поездками. Такое поведение явно соответствует первому принципу Вардропа, поэтому при исследовании загрузки УДС рассмотрим потоки, порождаемые именно легковым частным автотранспортом в утренне-вечерние часы пик.

1.1.2. Формализация проблемы

Исходя из приведенных соображений, построим экономико-математическую модель распределения транспортных потоков в УДС, соответствующую первому поведенческому принципу Вардропа.

Транспортную сеть опишем в виде ориентированного графа $\Gamma(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество дуг сети. Каждая дуга соответствует реальному участку автодороги без перекрестков. Каждая вер-

шина представляет узел (перекресток) или место существенного изменения характеристик дороги. Направление дуги определяет ход следования автотранспорта. Магистралы с двусторонним движением соответственно имеют парные противоположно ориентированные дуги.

При исследовании потокообразующих факторов в множестве вершин V выделим два подмножества. Первое, $S \subseteq V$, содержит пункты, порождающие потоки; элементы множества S назовем *источниками*. Второе, $D \subseteq V$, содержит пункты, поглощающие потоки; элементы множества D назовем *стоками*. Применительно к задаче моделирования потоков, порождаемых ежедневной трудовой миграцией для утренних часов пик, источниками являются спальные районы и пригороды, стоками — деловые районы города. Множество всех потокообразующих пар представим в виде декартова произведения

$$W = S \times D = \{\omega = (i, j) : i \in S, j \in D\}.$$

Путем (маршрутом) в сети Γ , соединяющим вершины i и j , назовем последовательность дуг

$$e_1 = (i \rightarrow k_1), e_2 = (k_1 \rightarrow k_2), \dots, e_m = (k_{m-1} \rightarrow k_m), e_{m+1} = (k_m \rightarrow j),$$

где $e_l \in E$ при всех $l = 1, \dots, m + 1$. В маршрутах предполагается отсутствие петель и циклов. Обозначим через P_ω множество альтернативных маршрутов, связывающих пару $\omega \in W$. Совокупность всех путей в сети Γ обозначим через $P = \bigcup_{\omega \in W} P_\omega$.

Перемещаясь от источников к стокам, пользователи сети выбирают тот или иной маршрут следования. Обозначим через x_p величину потока, идущего по пути $p \in P$; тогда загрузку всей сети задает вектор $x = (x_p : p \in P)$.

Преодоление каждого из путей $p \in P$ сопровождается некоторыми затратами (время, топливо, деньги, амортизация автомобиля, износ дороги и т. п.). Количественная характеристика таких затрат зависит от интенсивности и плотности движения в сети. Как правило, в моделях рассматриваются временные или финансовые затраты. Обозначим через G_p удельные затраты пользователей на проезд по пути p . Поскольку на затраты по одному маршруту может влиять загрузка других путей (естественным примером тому служат пересечения главных и второстепенных дорог, дублирующие дороги и т. д.), в общем случае G_p представляют собой функции от загрузки всей сети, то есть $G_p = G_p(x)$.

Во введенных обозначениях первый принцип Вардропа можно формализовать следующим образом. Водители выбирают путь с наименьшими транспортными расходами, поэтому для каждой пары ω выполнены условия: если по пути $p \in P_\omega$ идет ненулевой поток x_p , то затраты по этому

пути минимальны, то есть

$$\text{если } x_p^\dagger > 0, \text{ то } G_p(x^\dagger) = \min_{q \in P_w} G_q(x^\dagger) = u_w(x^\dagger), \quad (1)$$

где $u_w(x^\dagger)$ — минимальные транспортные затраты по маршрутам, соединяющим пару $w \in W$, при загрузке сети, определяемой вектором x^\dagger .

Соотношения (1), определенные для каждой пары $w \in W$, задают так называемые *условия равновесия транспортных потоков*. Потоки $x^\dagger = (x_p^\dagger: p \in P)$, удовлетворяющие условию (1), называются *равновесными*. Для полноты картины необходимо ввести ограничения на допустимость потоков.

Каждой паре источник-сток $w = (i, j) \in W$ соответствует свой спрос на перевозку ρ_w — общий объем пользователей, которые из пункта i должны прибыть в пункт j . Набор $(\rho_w: w \in W)$ называется *матрицей корреспонденций*. В общем случае предполагается, что корреспонденции являются функциями от минимальных затрат на передвижения в сети, то есть $\rho_w = \rho(u_w^\dagger)$, где $u_w^\dagger = u_w(x^\dagger)$.

Традиционно для транспортных задач потоковые переменные должны быть неотрицательными и удовлетворять балансовым ограничениям. Поэтому допустимой областью для рассматриваемых потоков x является множество

$$X(x^\dagger) = \left\{ x \geq 0: \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w(u_w(x^\dagger)), w \in W \right\} \quad (2)$$

(запись $x \geq 0$ означает, что все компоненты $x_p \geq 0$).

Как видно из определения (2), допустимая область $X(x^\dagger)$ является «подвижной» и непосредственно зависит от равновесного распределения потоков x^\dagger . Однако если объемы корреспонденций известны и имеют стационарные значения $\rho_w(u_w(x^\dagger)) \equiv \rho_w$, что вполне характерно для трудовых миграций в УДС, то допустимое множество имеет фиксированную структуру:

$$X = \left\{ x \geq 0: \sum_{p \in P_w} x_p = \rho_w, w \in W \right\}. \quad (3)$$

Проблема поиска равновесных потоков $x^\dagger \in X(x^\dagger)$ называется *задачей транспортного (потокового) равновесия с эластичным спросом*. При заданных корреспонденциях проблема поиска равновесных потоков $x^\dagger \in X$ называется *задачей транспортного (потокового) равновесия с фиксированным спросом*.

Допустимое множество X , определенное в (3), обладает замечательными свойствами. Во-первых, это полиэдральное¹⁾ и ограниченное мно-

¹⁾Полиэдральным (многогранным) множеством называется множество решений конечной системы неравенств $Ax \leq b$, это замкнутое выпуклое множество.

жество. Во-вторых, X естественным образом можно представить в виде декартова произведения непересекающихся обобщенных симплексов, т. е.

$X = \prod_{\omega \in W} X_{\omega}$, где

$$X_{\omega} = \left\{ x_p \geq 0 : p \in P_{\omega}, \sum_{p \in P_{\omega}} x_p = \rho_{\omega} \right\}. \quad (4)$$

Эти свойства X качественно влияют на построение теоретического и алгоритмического аппаратов задач транспортного равновесия.

Основной подход к решению и исследованию задач транспортного равновесия состоит в сведении исходной проблемы к эквивалентной оптимизационной задаче или вариационному неравенству. Прямое влияние на то, какая из эквивалентных форм будет рассматриваться, оказывают свойства функций транспортных затрат $G_p(x)$. Для компактности последующего изложения объединим компоненты $G_p(x)$ в вектор-функцию $G(x) = (G_p(x) : p \in P)$.

Отметим, что все результаты настоящей работы получены в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n со скалярным произведением xu и нормой $\|x\| = \sqrt{x\bar{x}}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Элементами пространства являются вектор-столбцы, однако знак транспонирования и дополнительные скобки при скалярном умножении будем опускать, чтобы не загромождать запись формул.

1.1.3. Сведение к вариационному неравенству

Предположим, что имеет место непрерывная монотонная зависимость транспортных издержек от объемов загрузки УДС. Традиционно в этом случае поиск равновесных потоков сводится к решению вариационного неравенства (в частном случае к оптимизационной задаче) [23, 39, 50, 54, 59]. Обоснование для такого сведения дает следующий результат.

Теорема 1. *Вектор $x^{\dagger} \in X(x^{\dagger})$ удовлетворяет условию равновесия (1) тогда и только тогда, когда является решением квазивариационного неравенства*

$$G(x^{\dagger})(x - x^{\dagger}) \geq 0 \quad \forall x \in X(x^{\dagger}). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть вектор $x^{\dagger} = (x_p^{\dagger} : p \in P) \in X(x^{\dagger})$ является решением квазивариационного неравенства (5). Покажем, что в x^{\dagger} выполнено условие (1). Предположим противное, а именно, что для пары ω существует такой путь $\bar{p} \in P_{\omega}$, что $x_{\bar{p}}^{\dagger} > 0$ и $G_{\bar{p}}(x^{\dagger}) > G_{\bar{q}}(x^{\dagger})$ для некоторого $\bar{q} \in P_{\omega}$, $\bar{q} \neq \bar{p}$. Рассмотрим такой вектор $x^{\varepsilon} = (x_p^{\varepsilon} : p \in P)$, что

$$x_p^{\varepsilon} = \begin{cases} x_p^{\dagger}, & p \neq \bar{p}, \quad p \neq \bar{q}, \\ x_{\bar{p}}^{\dagger} - \varepsilon, & p = \bar{p}, \\ x_{\bar{q}}^{\dagger} + \varepsilon, & p = \bar{q}, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало и не нарушает условия неотрицательности $x^\varepsilon \geq 0$. Нетрудно видеть, что $x^\varepsilon \in X(x^\dagger)$, при этом

$$G(x^\dagger)(x^\varepsilon - x^\dagger) = G_{\bar{p}}(x^\dagger)(x_{\bar{p}}^\varepsilon - x_{\bar{p}}^\dagger) + G_{\bar{q}}(x^\dagger)(x_{\bar{q}}^\varepsilon - x_{\bar{q}}^\dagger) = \varepsilon(G_{\bar{q}}(x^\dagger) - G_{\bar{p}}(x^\dagger)) < 0,$$

что противоречит тому, что x^\dagger — решение неравенства (5). Следовательно, в точке x^\dagger условие (1) всегда выполнено.

Покажем обратное, а именно, если $x^\dagger \in X(x^\dagger)$ удовлетворяет условию (1), то x^\dagger — решение квазивариационного неравенства (5). Нетрудно видеть, что для всех $p \in P_\omega$, $\omega \in W$ и $x \in X(x^\dagger)$ выполнены соотношения

$$G_p(x^\dagger) - u_\omega(x^\dagger) \geq 0, \quad (G_p(x^\dagger) - u_\omega(x^\dagger))x_p^\dagger = 0, \quad (G_p(x^\dagger) - u_\omega(x^\dagger))x_p \geq 0,$$

следовательно, имеет место оценка

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} (G_p(x^\dagger) - u_\omega(x^\dagger))(x_p - x_p^\dagger) = \\ &= \sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} G_p(x^\dagger)(x_p - x_p^\dagger) - \sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} u_\omega(x^\dagger)(x_p - x_p^\dagger) = \\ &= G(x^\dagger)(x - x^\dagger) - \sum_{\omega \in W} u_\omega(x^\dagger) \left(\sum_{p \in P_\omega} x_p - \sum_{p \in P_\omega} x_p^\dagger \right) = \\ &= G(x^\dagger)(x - x^\dagger) - \sum_{\omega \in W} u_\omega(x^\dagger)(\rho_\omega(u^\dagger) - \rho_\omega(u^\dagger)) = G(x^\dagger)(x - x^\dagger), \end{aligned}$$

то есть x^\dagger — решение квазивариационного неравенства (5). \square

Для задач транспортного равновесия с фиксированным спросом квазивариационное неравенство заменяется на классическое вариационное неравенство вида:

$$G(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (6)$$

Очевидно, что вариационное неравенство (6) представляет частный случай квазивариационного неравенства (5). Теория и методы решения обоих классов неравенств к настоящему времени уже достаточно хорошо разработаны. Познакомиться с достижениями в этой области можно, например, по работам [3, 5, 41, 49–51, 54].

Далее, для того чтобы изучать свойства задач транспортного равновесия в рамках единого математического аппарата, примем дополнительные соглашения и сведем решение задачи транспортного равновесия с эластичным спросом к решению именно вариационного неравенства.

Предположим, что для каждого маршрута $p \in P$ транспортные затраты $G_p(x)$ строго положительны, а для всех пар $\omega \in W$ функция спроса $\rho_\omega(u_\omega)$ принимает только неотрицательные значения.

Объединим величины u_ω в вектор $u = (u_\omega: \omega \in W)$, функции $\rho_\omega(u_\omega)$ — в вектор $\rho(u) = (\rho_\omega(u_\omega): \omega \in W)$. Рассмотрим векторы

$$z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad F(z) = \begin{pmatrix} G(x) - \Xi u \\ \Xi^T x - \rho(u) \end{pmatrix},$$

где $\Xi = (\xi_{p\omega}: p \in P, \omega \in W)$ — матрица инцидентности путей и пар источник-сток:

$$\xi_{p\omega} = \begin{cases} 1, & \text{если путь } p \text{ соединяет пару } \omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Допустимое множество для вектора z представляет собой неотрицательный ортант $Z = \{z: z \geq 0\}$.

Утверждение 1. Вектор $z^\dagger = (x^\dagger, u^\dagger) \geq 0$ является решением вариационного неравенства

$$F(z^\dagger)(z - z^\dagger) \geq 0 \quad \forall z \in Z \quad (7)$$

тогда и только тогда, когда x^\dagger — решение квазивариационного неравенства (5).

Доказательство. Пусть $x^\dagger \in X(x^\dagger)$ — решение квазивариационного неравенства (5). Тогда для любых $x \geq 0$ и $u \geq 0$ выполнены условия

$$\begin{aligned} (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)x^\dagger &= 0, & (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)x &\geq 0, \\ (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))u^\dagger &= 0, & (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))u &= 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$0 \leq (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)(x - x^\dagger) + (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))(u - u^\dagger) = F(z^\dagger)(z - z^\dagger).$$

Покажем обратное. Пусть $z^\dagger = (x^\dagger, u^\dagger) \geq 0$ — решение вариационного неравенства (7), то есть для любых $z \geq 0$ выполнено

$$F(z^\dagger)z^\dagger \leq F(z^\dagger)z.$$

Рассмотрим точки $z^\sigma = \sigma z^\dagger \geq 0$ для всех $\sigma \geq 0$. Имеем

$$F(z^\dagger)z^\dagger \begin{cases} \leq 0 & \text{при } \sigma = 0, \\ \geq \frac{F(z^\dagger)z^\dagger}{\sigma} \rightarrow 0 & \text{при } \sigma \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, $F(z^\dagger)z^\dagger = 0$ и $F(z^\dagger)z \geq 0$.

Если предположить существование такого индекса l , что соответствующий ему элемент вектора $F(z^\dagger)$ отрицательный, $F_l(z^\dagger) < 0$, то, выбирая $z_l \rightarrow +\infty$, получаем нарушение неравенства $F(z^\dagger)z \geq 0$. Отсюда $F(z^\dagger) \geq 0$. Таким образом, точка $z^\dagger = (x^\dagger, u^\dagger) \geq 0$ удовлетворяет системе

$$F(z^\dagger) \geq 0, \quad z^\dagger \geq 0, \quad F(z^\dagger)z^\dagger = 0, \quad (8)$$

известной как *нелинейная задача дополнителности* (см., например, [23, 41]).

Перепишем условия (8) в виде

$$G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger \geq 0, \quad x^\dagger \geq 0, \quad (G(x^\dagger) - \Xi u^\dagger)x^\dagger = 0, \quad (9)$$

$$\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger) \geq 0, \quad u^\dagger \geq 0, \quad (\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger))u^\dagger = 0. \quad (10)$$

Система (9) показывает, что вектор u^\dagger соответствует минимальным транспортным затратам в сети при загрузке, определяемой потоками x^\dagger . При условии положительности транспортных затрат из (10) следует, что $\Xi^T x^\dagger - \rho(u^\dagger) = 0$, тогда неравенство (7) можно переписать в виде

$$G(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq u^\dagger(\Xi^T x - \rho(u^\dagger)) = 0 \quad \forall x \in X(u^\dagger),$$

что окончательно доказывает утверждение. \square

Очевидно, что допустимая область Z вариационного неравенства (7) является полиэдральным множеством, однако в отличие от допустимой области X вариационного неравенства (6) множество Z неограничено. Это критическим образом влияет на условия разрешимости транспортных задач с эластичным и фиксированным спросом.

1.1.4. Разрешимость задач транспортного равновесия

Критерии существования равновесных транспортных потоков формулируются на базе теории разрешимости вариационных неравенств. Рассмотрим вариационное неравенство (6) как общую форму задачи, специально не оговаривая свойства вектор-функции G и допустимого множества X . Для изложения основных результатов данного раздела понадобятся следующие определения.

Определение 1. Проекцией точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется точка $\pi_X(y) = \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : x \in X\}$.

Определение 2. Точка x^* называется неподвижной точкой отображения $T: X \rightarrow X$, если $x^* = T(x^*)$.

Критерием проверки, является ли вектор p проекцией точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество X , служит выполнение условия

$$(p - y)(x - p) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (11)$$

Решение вариационного неравенства (6) тесно связано с поиском неподвижных точек проекционного отображения

$$H(x) = \pi_X(x - \lambda G(x)),$$

где $\lambda > 0$ — некоторое фиксированное число.

Утверждение 2. Множество решений $X^\dagger \subseteq X$ вариационного неравенства (6) совпадает с множеством неподвижных точек отображения $H(x)$, то есть $X^\dagger = \{x^\dagger \in X: x^\dagger = H(x^\dagger)\}$.

Доказательство. Пусть $x^\dagger \in X^\dagger$ и $\lambda > 0$, тогда выполнено неравенство

$$(x^\dagger - (x^\dagger - \lambda G(x^\dagger)))(x - x^\dagger) \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

следовательно, в силу свойства (11) имеем

$$x^\dagger = \pi_X(x^\dagger - \lambda G(x^\dagger)) = H(x^\dagger).$$

Пусть $x^\dagger = H(x^\dagger)$, тогда в силу свойства (11) для любого $x \in X$ выполнено условие

$$0 \leq (x - x^\dagger)(x^\dagger - (x^\dagger - \lambda G(x^\dagger))) = G(x^\dagger)(x - x^\dagger),$$

то есть $x^\dagger \in X^\dagger$. □

Теорема 2. Пусть вектор-функция G непрерывна, множество X непусто, выпукло и замкнуто. Если X ограничено, то вариационное неравенство (6) разрешимо.

Доказательство. Для выпуклого множества X отображение $H(x): X \rightarrow X$ является непрерывным и однозначным. Множество X по условию теоремы компактно, следовательно, по теореме Брауэра (см., например, [2, 14, 24]) у $H(x)$ существует неподвижная точка $x^\dagger = H(x^\dagger)$, которая в силу утверждения 2 одновременно является решением вариационного неравенства (6). □

Из теоремы 2 следует, что если затраты на передвижение $G_p(x)$ являются непрерывными функциями от потоков $x \in X$, то транспортная задача с фиксированным спросом всегда разрешима.

В случаях неограниченного допустимого множества X вводят дополнительные предположения о свойствах задачи, например, ограниченность потенциального множества решений, коэрцитивность, сильную монотонность и прочие. Общая идея выявления таких свойств состоит в следующем. Выберем такой радиус $R > 0$, что пересечение замкнутого шара $B = \{x: \|x\| \leq R\}$ с выпуклым замкнутым множеством X непусто, положим $X_R = X \cap B \neq \emptyset$. По теореме 2 существует такая точка $x_R^\dagger \in X_R$, что

$$G(x_R^\dagger)(x - x_R^\dagger) \geq 0 \quad \forall x \in X_R. \quad (12)$$

Теорема 3. Пусть вектор-функция G непрерывна, множество X непусто, выпукло и замкнуто. Если существует такой радиус $R > 0$, что $X_R \neq \emptyset$ и решение $x_R^\dagger \in X_R$ вариационного неравенства (12) удовлетворяет условию $\|x_R^\dagger\| < R$, то вариационное неравенство (6) разрешимо.

Доказательство. Для произвольного $x \in X$ выберем такое $\lambda \in (0, 1]$, что точка $\bar{x} = x_R^\dagger + \lambda(x - x_R^\dagger) \in X_R$. Имеем

$$0 \leq G(x_R^\dagger)(\bar{x} - x_R^\dagger) = G(x_R^\dagger)(x_R^\dagger + \lambda(x - x_R^\dagger) - x_R^\dagger) = \lambda G(x_R^\dagger)(x - x_R^\dagger),$$

то есть x_R^\dagger одновременно является решением вариационного неравенства (6). \square

Из теоремы 3 можно получить ряд следствий (см., например, [23]).

Следствие 1. Пусть вектор-функция G непрерывна, множество X непусто, выпукло и замкнуто. Если вектор-функция $G(x)$ коэрцитивна относительно X , то есть для некоторого $\bar{x} \in X$ выполнено

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in X} \frac{G(x)(x - \bar{x})}{\|x\|} \rightarrow \infty, \quad (13)$$

то вариационное неравенство (6) разрешимо.

Доказательство. Условие коэрцитивности (13) позволяет для каждого фиксированного $C > 0$ подобрать достаточно большое $R_C > 0$ такое, что

$$G(x)(x - \bar{x}) \geq C\|x\| \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = R_C,$$

для какого-то $\bar{x} \in X_{R_C}$, не зависящего от C и R_C .

В силу теоремы 2 разрешимо вариационное неравенство

$$G(x_{R_C}^\dagger)(x - x_{R_C}^\dagger) \geq 0 \quad \forall x \in X_{R_C}.$$

Если $\|x_C^\dagger\| < R_C$, то по теореме 3 точка $x_{R_C}^\dagger$ является решением исходного вариационного неравенства (6).

Если $\|x_{R_C}^\dagger\| = R_C$, то получаем

$$G(x_{R_C}^\dagger)(\bar{x} - x_{R_C}^\dagger) \leq -C\|x_{R_C}^\dagger\| = -CR < 0,$$

что противоречит определению $x_{R_C}^\dagger$. \square

Таким образом, для разрешимости задачи транспортного равновесия с эластичным спросом нужны более сильные, чем непрерывность, предположения о свойствах вектор-функции $F(z)$.

Вопрос единственности равновесного распределения транспортных потоков решается за счет свойств строгой монотонности функции транспортных издержек.

Определение 3. Вектор-функция $G: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется строго монотонной на X , если для любых таких $x, y \in X$, что $x \neq y$, выполнено неравенство $(G(x) - G(y))(x - y) > 0$.

Теорема 4. Если вектор-функция $G(x)$ строго монотонна, то вариационное неравенство (6) может иметь не более одного решения.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существуют два различных решения $x^1, x^2 \in X, x^1 \neq x^2$, задачи (6). Очевидно, при этом выполнены неравенства

$$G(x^1)(x^2 - x^1) \geq 0, \quad G(x^2)(x^1 - x^2) \geq 0,$$

складывая которые, получаем

$$(G(x^1) - G(x^2))(x^2 - x^1) \geq 0,$$

что противоречит свойству строгой монотонности $G(x)$. \square

С точки зрения задачи транспортного равновесия утверждение теоремы 4 означает, что если транспортные затраты возрастают с увеличением загрузки сети — а это весьма естественное предположение, — то существует единственное равновесное распределение транспортных потоков.

1.1.5. Симметричные задачи транспортного равновесия

Задачу транспортного равновесия будем называть *симметричной*, если для вектор-функции транспортных издержек $G(x)$ матрица Якоби $\nabla G(x) = \left(\frac{\partial G_p(x)}{\partial x_q} : p, q \in P \right)$ симметрична для всех $x \in X$.

Свойство симметричности матрицы $\nabla G(x)$ является достаточным условием для того, чтобы гарантировать существование дифференцируемой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\nabla f(x) = G(x)$ для всех $x \in X$. Вектор-функция G в таком случае называется *потенциальной*, а вариационное неравенство (6) можно переписать в виде

$$\nabla f(x^\dagger)(x - x^\dagger) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (14)$$

Из теории оптимизации известно, что условие (14) представляет необходимый критерий оптимальности в задаче

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (15)$$

где X — выпуклое замкнутое множество.

В самом деле, пусть $x^\dagger = \operatorname{argmin}\{f(x) : x \in X\}$. Рассмотрим точку $x_\lambda = x^\dagger + \lambda(x - x^\dagger) \in X$, где $\lambda \in (0, 1)$ достаточно мало. Имеет место следующая оценка:

$$0 \leq \frac{f(x_\lambda) - f(x^\dagger)}{\lambda} = \frac{f(x^\dagger) + \lambda \nabla f(x^\dagger)(x - x^\dagger) + o(\lambda) - f(x^\dagger)}{\lambda} = \nabla f(x^\dagger)(x - x^\dagger) + \frac{o(\lambda)}{\lambda}.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем (14).

Считается, что решить оптимизационную задачу намного проще, чем вариационное неравенство [56]. Теория методов оптимизации богата разнообразными алгоритмами. Кроме того, существует множество программных пакетов для решения этого класса задач, чего нельзя сказать о вариационных неравенствах. Однако основная трудность состоит в построении

функции $f(x)$. Для потенциальных отображений такую функцию можно построить, проведя следующие рассуждения.

Рассмотрим кривую L , зафиксируем на ней точку x^0 и вычислим интеграл $G(x)$ вдоль этой кривой до некоторой точки $x \in L$.

Пусть кривая L задана параметрически: $L = \{x(t) : t \in [0, 1]\}$, где $x(t)$ — гладкая вектор-функция, при этом $x(0) = x^0$, $x(1) = x$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{x^0}^x G(x(t)) d(x(t)) = \int_0^1 G(x(t)) x'_t(t) dt = \int_0^1 \nabla f(x(t)) x'_t(t) dt = \\ &= \int_0^1 df(x(t)) = f(x(t)) \Big|_0^1 = f(x(1)) - f(x(0)) = f(x) - f(x^0). \end{aligned}$$

Видим, что значение интеграла \mathcal{I} не зависит от параметрического задания кривой L . Рассмотрим простейший пример такого задания: $x(t) = x^0 + t(x - x^0)$, тогда при $G(x) = \nabla f(x)$ вариационное неравенство (6) эквивалентно следующей оптимизационной задаче:

$$f(x) = f(x^0) + \int_0^1 G(x^0 + t(x - x^0))(x - x^0) dt \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (16)$$

Таким образом, решение симметричной задачи транспортного равновесия эквивалентно решению некоторой оптимизационной задачи. Именно этому классу задач посвящена большая часть работ по исследованию транспортного равновесия [22, 28, 29, 35, 37, 45, 46].

1.2. Построение функций транспортных затрат

Сложность численного решения задачи транспортного равновесия во многом зависит от аналитического задания функций $G_p(x)$. Интуитивно вполне очевидно, что на транспортные затраты при проезде из источника в сток в первую очередь влияют издержки на дугах, составляющих маршрут следования. В литературе, посвященной изучению проблем моделирования транспортных потоков, рассматриваются разные формы такой зависимости.

Обозначим через y_e величину потока по дуге $e \in E$. Зная распределение потоков по путям, можно рассчитать загрузку каждой дуги по следующей формуле:

$$y_e = \sum_{p \in P} \theta_{ep} x_p, \quad (17)$$

где

$$\theta_{ep} = \begin{cases} 1, & \text{если путь } p \text{ проходит через дугу } e; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим $\Theta = (\theta_{ep} : e \in E, p \in P)$ — матрицу инцидентности дуг и путей, $y = (y_e : e \in E)$ — вектор, описывающий загрузку дуг сети Γ . В матричной форме взаимосвязь потоков по путям и дугам описывается уравнением $y = \Theta x$.

В ряде случаев рассматриваются транспортные задачи в терминах только потоковых переменных по дугам. Отметим, что в множестве X , определенном в (3), от потоковых переменных по путям x можно легко перейти к вектору y ; обратный переход неоднозначен.

Затраты на прохождение единицы потока по дуге e (удельные затраты) обозначим через τ_e . В общем случае значение τ_e зависит не только от величины потока y_e , но и от потоков по другим дугам сети. Характерным примером тому служат нерегулируемые перекрестки, где порядок движения определяется приоритетом дорог, регулируемые перекрестки с дополнительной стрелкой сигнала светофора — движение в так называемом режиме «просачивания» и т. п. Поэтому правильно предположить, что $\tau_e = \tau_e(y)$. Сформируем вектор-функцию $\tau(y) = (\tau_e(y) : e \in E)$.

1.2.1. Аддитивные функции затрат

Самым распространенным и простым предположением о свойствах функций транспортных затрат является аддитивная зависимость $G(x)$ от $\tau(y)$, означающая, что транспортные затраты на прохождение каждого пути $p \in P$ складываются только из затрат на проезд по дугам, составляющим этот путь [38, 39, 54]:

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y). \quad (18)$$

В результате получаем, что вектор-функция $G(x)$ вариационного неравенства (6) имеет вид

$$G(x) = \Theta^T \tau(y), \quad y = \Theta x. \quad (19)$$

Рассмотрим частный случай, когда затраты на проезд по дуге $\tau_e(y)$ зависят только от объема идущего по ней потока y_e , то есть $\tau_e(y) \equiv \tau_e(y_e)$. В этом случае для любых $p, q \in P, p \neq q$, имеем

$$\frac{\partial G_p}{\partial x_q} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \frac{\partial \tau_e}{\partial y_e} \frac{\partial y_e}{\partial x_q} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \theta_{eq} \frac{\partial \tau_e}{\partial y_e} = \frac{\partial G_q}{\partial x_p}.$$

Следовательно, матрица Якоби $\nabla G(x)$ симметрична для любых $x \in X$, то есть вектор-функция $G(x)$ потенциальна и равновесные транспортные потоки можно определить как решение оптимизационной задачи (16). Учи-

таявая соотношения (19), вид целевой функции $f(x)$ определяется как:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 \sum_{p \in P} G_p(x^0 + t(x - x^0))(x_p - x_p^0) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{p \in P} \left(\sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) \right) (x_p - x_p^0) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{p \in P} \sum_{e \in E} \theta_{ep} (x_p - x_p^0) \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{e \in E} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) \sum_{p \in P} \theta_{ep} (x_p - x_p^0) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{e \in E} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) (y_e - y_e^0) dt = \\
 &= \int_0^1 \sum_{e \in E} \tau_e(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) d(y_e^0 + t(y_e - y_e^0)) = \sum_{e \in E} \int_{y_e^0}^{y_e} \tau_e(z) dz.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при $\tau_e(y) \equiv \tau_e(y_e)$ задача (16) переписывается в виде:

$$\sum_{e \in E} \int_0^{y_e} \tau_e(z) dz \rightarrow \min, \quad y = \Theta x, \quad x \in X. \quad (20)$$

От потоковых переменных по путям x в модели (20) можно избавиться, если ввести следующие обозначения. В общем потоке y_e по каждой дуге $e \in E$ отдельно выделим поток y_e^s , порождаемый источником $s \in S$ и идущий по e . Вектор $y^s = (y_e^s: e \in E)$ определяет загрузку дуг транспортной сети, порожденную источником s . Очевидно, должны быть выполнены условия:

$$y = \sum_{s \in S} y^s, \quad y^s \geq 0, \quad s \in S.$$

Через ρ_{sv} обозначим объем потока, который из источника $s \in S$ должен достичь вершины $v \in V$. При заданной матрице корреспонденций ($\rho_w: w \in W = S \times D$) величины ρ_{sv} определяются по правилу:

$$\rho_{sv} = \begin{cases} \rho_w, & \text{если } v \neq s, w = (s, v) \in W, \\ 0, & \text{если } v \neq s, w = (s, v) \notin W, \\ -\rho_w, & \text{если } v = s. \end{cases}$$

Балансовые ограничения при переходе к новым переменным y_e^s запишутся в виде

$$\sum_{e \in E_v^+} y_e^s - \sum_{e \in E_v^-} y_e^s = \rho_{sv}, \quad (s, v) \in S \times V, \quad (21)$$

где

$$E_v^+ = \{e \in E: \text{дуга } e \text{ входит в вершину } v\},$$

$$E_v^- = \{e \in E: \text{дуга } e \text{ выходит из вершины } v\}.$$

Определим множество $Y_s = \{y^s \geq 0: \text{выполнены условия (21)}\}$. В результате симметричная задача транспортного равновесия (20) переписывается в виде:

$$\sum_{e \in E} \int_0^{y_e} \tau_e(z) dz \rightarrow \min, \quad y = \sum_{s \in S} y^s, \quad y^s \in Y_s. \quad (22)$$

Одной из широко используемых форм функции затрат $\tau_e(y)$ является так называемая BPR-функция (Bureau of Public Road), описывающая временные затраты на проезд следующим образом:

$$\tau_e(y) = \tau_e^0 \left(1 + \mu \left(\frac{y_e}{c_e} \right)^n \right),$$

где τ_e^0 — время проезда по свободной дуге e , c_e — пропускная способность дуги e , μ и n — некоторые положительные константы. При использовании BPR-функции задача транспортного равновесия сводится к оптимизационной задаче (20).

1.2.2. Неаддитивные функции затрат

В общем случае, построение функции затрат $\tau_e(y)$ является задачей, требующей отдельных исследований. Здесь окажутся полезными как натурные замеры потоков и соответствующих им задержек в реальных УДС (улично-дорожных сетях), так и результаты компьютерного моделирования, например, при помощи специальных программ для агентного моделирования, так активно развивающиеся в последние годы.

Существуют ситуации, когда предположение об аддитивности функций $G_p(x)$ не подходит для описания транспортных затрат. Стремление к более адекватному моделированию автомобильных потоков привело к новым формам аналитического описания затрат [32, 43, 52]. Неаддитивные транспортные затраты возникают, например, в случаях, когда при моделировании одновременно учитываются и временные, и финансовые расходы. Так, в работе [43] предложена функция, характеризующая финансовые затраты, на которые, в свою очередь, влияют временные затраты:

$$G_p(x) = \Phi_p \left(\sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) \right) + \Psi_p(x) + \eta \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y),$$

где $\tau_e(\cdot)$ — время, потраченное на прохождение дуги e , $\Phi_p(\cdot)$ — функция, преобразующая временные затраты для пути p в финансовые затраты, $\Psi_p(\cdot)$ — финансовые затраты, характеризующие маршрут p , которые могут меняться в зависимости от загрузки сети, $\eta > 0$ — эксплуатационные

расходы в единицу времени. В работе [32] предложен более общий вид неаддитивной функции затрат:

$$G_p(x) = U_\omega \left(\sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) + g_p(\Psi_p) \right), \quad p \in P_\omega,$$

где Ψ_p — фиксированные финансовые затраты, характеризующие маршрут p , $g_p(\cdot)$ — функция, преобразующая финансовые затраты во временные, $U_\omega(\cdot)$ — функция потерь (отрицательной полезности) для пары $\omega \in W$.

С одной стороны, неаддитивные затраты более реалистично могут описать функционирование транспортной системы, с другой — вариационное неравенство (6) (а тем более (7)) при сложных функциях $G_p(x)$ весьма трудоемко для анализа и решения.

1.2.3. Модель стационарной динамики

С формальной точки зрения, если объемы потоков не ограничены сверху пропускной способностью транспортной сети, то монотонные функции затрат допускают сколь угодно большие значения потоков, что едва ли согласуется с реальностью и справедливо критикуется. Однако полученный опыт моделирования транспортных потоков в реальной УДС [18, 19, 25, 26] показывает, что именно монотонное возрастание затрат является сдерживающим фактором для получения нереально больших потоков на дугах.

Одна из попыток избавить представление τ_e от упомянутого недостатка описана в работе [57]. Здесь для каждой дуги $e \in E$ транспортной сети предлагается ввести два вполне измеримых показателя: пропускную способность c_e и время проезда по свободной дуге (минимальное время проезда) τ_e^0 . Далее естественным образом предполагается, что в транспортной сети поток по дуге не может превышать ее пропускную способность, а потраченное на проезд время не может быть меньше, чем минимальное. Согласно [57], ситуация потокового равновесия в транспортной сети теперь определяется как загрузка ее дуг $y^\dagger = (y_e^\dagger : e \in E)$ и временные затраты на дугах $\tau^\dagger = (\tau_e^\dagger : e \in E)$, которые удовлетворяют ограничениям:

$$0 \leq y_e^\dagger \leq c_e, \quad \tau_e^\dagger \geq \tau_e^0, \quad e \in E, \quad (23)$$

при этом выполнены условия пользовательской оптимальности (1):

$$\tau_e^\dagger \begin{cases} = \tau_e^0, & \text{если } y_e^\dagger < c_e, \\ \geq \tau_e^0, & \text{если } y_e^\dagger = c_e. \end{cases} \quad (24)$$

Условие (24) показывает, что временные затраты зависят от потока, но эта зависимость не является монотонной. В случае полной загрузки сети можно гарантировать лишь только то, что временные затраты на дугах

будут не меньше минимального времени проезда. Пара $(y^\dagger, \tau^\dagger)$, удовлетворяющая условиям (23), (24), называется стационарным динамическим решением задачи транспортного равновесия.

На взгляд авторов, независимость времени проезда по дуге от загрузки вплоть до достижения предельного значения выглядит весьма идеализированным, поскольку реальная практика вождения показывает, что с увеличением числа автомобилей на дороге скорость движения все-таки уменьшается. Однако этот подход сопровождается весьма интересными теоретическими результатами, о которых вкратце стоит упомянуть.

Для каждой потокообразующей пары $\omega \in W$ длину кратчайшего (по времени) пути при временных затратах на дугах, определяемых вектором τ , задает вогнутая кусочно-линейная функция

$$u_\omega(\tau) = \min_{q \in P_\omega} \left\{ G_q = \sum_{e \in E} \theta_{eq} \tau_e \right\}.$$

В качестве стационарного динамического решения задачи транспортного равновесия авторы [57] предлагают брать такое решение $(y^\dagger, \tau^\dagger)$ негладкой оптимизационной задачи

$$\sum_{\omega \in W} d_\omega u_\omega(\tau) - \sum_{e \in E} y_e \tau_e \rightarrow \max, \quad \tau_e \geq \tau_e^0, \quad e \in E, \quad (25)$$

на котором бы выполнялись равенства $\eta_e^\dagger = c_e - y_e^\dagger$, где η_e^\dagger — оптимальные значения двойственных переменных задачи (25).

Интересным результатом является тот факт, что сложную во всех отношениях задачу (25) можно заменить на двойственную к ней, которая в свою очередь является задачей линейного программирования, интерпретируемой как задача минимизации издержек в многопродуктовой транспортной задаче:

$$\tau^0 y \rightarrow \min, \quad y = \sum_{s \in S} y^s \leq c, \quad y^s \in Y_s, \quad (26)$$

где $\tau^0 = (\tau_e^0: e \in E)$ — вектор минимальных временных затрат в сети, $c = (c_e: e \in E)$ — вектор пропускной способности сети, переменные y^s и множество Y_s определены в разделе 1.2.1.

Практика применимости задачи (26) к УДС Владивостока описана в работе [19].

1.3. Соотношение между системным оптимумом и конкурентным равновесием

Очевидно, что общие затраты при системной оптимизации не могут превышать общих затрат при пользовательской оптимизации. Поэтому разность между совокупными транспортными затратами, которые несут

пользователи сети, перемещаясь согласно либо только первому, либо только второму поведенческим принципам Вардропы, можно рассматривать как цену анархии, и существуют примеры, когда эта цена составляет существенную долю от общих расходов.

На принципиальную разницу между конкурентным транспортным равновесием и системным оптимумом одним из первых обратил внимание А. Пигу [60]. Он рассмотрел простейшую транспортную сеть, состоящую из двух дуг, соединяющих два пункта, скажем, спальньй район A и бизнес-зону B (см. рис. 2).

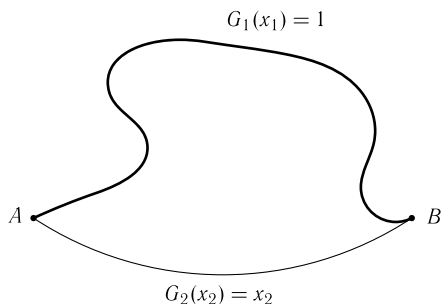


Рис. 2. Пример транспортной сети Пигу

Жители пункта A вольны выбирать, по какой из двух дорог им лучше добираться до работы. Обозначим через x_1 и x_2 доли общего объема трудового потока, едущего по первой и второй дорогам соответственно. Дороги в рассматриваемой сети неравноценны. Первая представляет магистральное шоссе, которое способно принять весь поток автомобилей из пункта A в пункт B без всякого замедления движения. Однако эта дорога достаточно длинная и проезд по ней требует определенного времени G_1 , которое будем считать равным, например, одному часу, то есть $G_1(x_1) = 1$. По второй дороге путь существенно короче, но это дорога узкая и движение сильно замедляется при наличии на ней потока автомобилей. Чтобы подчеркнуть суть примера, будем считать, что время проезда по второй дороге G_2 линейно зависит от потока x_2 по этой дороге и задается соотношением $G_2(x_2) = x_2$. Тогда в соответствии с первым принципом Вардропы (Пигу—Найта—Вардропы) равновесному состоянию будет соответствовать такое распределение потоков $(x_1^\dagger, x_2^\dagger)$, что

$$G_1(x_1^\dagger) = G_2(x_2^\dagger), \quad x_1^\dagger + x_2^\dagger = 1, \quad x_1^\dagger, x_2^\dagger \geq 0,$$

откуда немедленно следует, что $x_1^\dagger = 0$, $x_2^\dagger = 1$, при этом системные затраты $c(x_1^\dagger, x_2^\dagger) = 1 \cdot x_1^\dagger + x_2^\dagger \cdot x_2^\dagger = 1$.

Распределение потоков в соответствии со вторым принципом Вардропа (системный оптимум) определяется как решение оптимизационной задачи:

$$x_1 + x_2^2 \rightarrow \min: \quad x_1 + x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad (27)$$

минимум которой достигается в точке $x_1^* = x_2^* = 0,5$, минимальные затраты $c(x_1^*, x_2^*) = 0,75$, что на 25% уменьшает системные издержки в сети.

Приведенный пример Пигу показывает, что суммарные затраты в конкурентном равновесии могут составлять $4/3$ от суммарных затрат системного оптимума. Оказывается, это соотношение представляет собой неуплучшаемую оценку сверху для конкурентного потокового равновесия с аффинными функциями затрат и не зависит от топологии сети. Для подробного изложения этого результата установим некоторые полезные соотношения, характеризующие равновесные и оптимальные потоки.

Из условия равновесия (1), очевидно, следует, что если $x_p^\dagger > 0$ и $x_q^\dagger > 0$ для путей $p, q \in P_\omega$, то $G_p(x^\dagger) = G_q(x^\dagger) = u_\omega^\dagger$. Поскольку вклад в суммарные системные затраты (обозначим их $c(x^\dagger)$) при равновесном распределении x^\dagger вносят только ненулевые потоки $x_p^\dagger > 0$, а для них все удельные затраты в пределах одной пары ω одинаковы и равны u_ω^\dagger , то значение $c(x^\dagger)$ можно рассчитать следующим образом:

$$c(x^\dagger) = \sum_{p \in P} G_p(x^\dagger) x_p^\dagger = \sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} G_p(x^\dagger) x_p^\dagger = \sum_{\omega \in W} u_\omega^\dagger \sum_{p \in P_\omega} x_p^\dagger = \sum_{\omega \in W} u_\omega^\dagger \rho_\omega. \quad (28)$$

Распределение потоков по второму принципу Вардропа x^* и системный оптимум $c(x^*)$ соответствуют решению оптимизационной задачи:

$$c(x) = \sum_{p \in P} G_p(x) x_p \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (29)$$

Положим $c_p(x) = G_p(x) x_p$ и будем предполагать, что для всех $p \in P$ функции $c_p(x)$ являются выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть x^* — решения задачи (29), то есть оптимальное распределение потоков в сети. Тогда для всякой пары $\omega \in W$ верно следующее: если $x_p^* > 0$, $p \in P_\omega$, то $\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} \leq \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_q}$ для всех $q \in P_\omega$.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что для пары ω существует такой путь $\bar{p} \in P_\omega$, что $x_{\bar{p}}^* > 0$ и $\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_{\bar{p}}} > \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_{\bar{q}}}$ для некоторого $\bar{q} \in P_\omega$, $\bar{q} \neq \bar{p}$. Рассмотрим такой вектор $x^\varepsilon = (x_p^\varepsilon: p \in P)$, что

$$x_p^\varepsilon = \begin{cases} x_p^*, & p \neq \bar{p}, p \neq \bar{q}, \\ x_{\bar{p}}^* - \varepsilon, & p = \bar{p}, \\ x_{\bar{q}}^* + \varepsilon, & p = \bar{q}, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало и не нарушает условия неотрицательности $x^\varepsilon \geq 0$. Нетрудно видеть, что $x^\varepsilon \in X$, при этом в силу выпуклости функции $c(x)$ имеем оценку

$$c(x^\varepsilon) - c(x^*) \leq \nabla c(x^\varepsilon)(x^\varepsilon - x^*) = \varepsilon \left(\frac{\partial c(x^\varepsilon)}{\partial x_q} - \frac{\partial c(x^\varepsilon)}{\partial x_p} \right) < 0,$$

что противоречит оптимальности x^* . □

В частном случае, когда $G_p(x) \equiv G_p(x_p)$, из теоремы 5 непосредственно следует, что в оптимальном распределении потоков x^* для всякой пары $\omega \in W$ верно следующее: если $x_p^* > 0$, $p \in P_\omega$, то $\frac{\partial c_p(x^*)}{\partial x_p} \leq \frac{\partial c_q(x^*)}{\partial x_q}$ для всех $q \in P_\omega$. При этом, как и в случае равновесных потоков, для оптимальных потоков справедливы равенства $\frac{\partial c_p(x^*)}{\partial x_p} = \frac{\partial c_q(x^*)}{\partial x_q}$ для тех $p, q \in P_\omega$, для которых $x_p^* > 0$, $x_q^* > 0$. Эти условия известны также как условия Гиббса (см., например, [11]).

Рассмотрим случай, когда транспортные затраты на прохождение каждого пути $p \in P$ складываются только из затрат на проезд по дугам, составляющим этот путь, то есть $G_p(x)$ определяются по формуле (18), при этом затраты по дугам $\tau_e(y)$ описываются аффинными функциями $\tau_e(y) = a_e y_e + b_e$, где a_e и b_e — неотрицательные коэффициенты для всех $e \in E$. При этом функция системных затрат и ее частные производные определяются как

$$c(x) = \sum_{p \in P} \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) x_p = \sum_{e \in E} \tau_e(y) y_e = \sum_{e \in E} (a_e y_e^2 + b_e y_e),$$

$$\frac{\partial c(x)}{\partial x_p} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} (2a_e y_e + b_e).$$

Обозначим через $y^\dagger = (y_e^\dagger : e \in E)$ и $y^* = (y_e^* : e \in E)$ загрузку дуг сети, порожденную потоками x^\dagger и x^* соответственно. Опираясь на приведенные выше результаты для равновесных x^\dagger и оптимальных x^* потоков, можем утверждать, что выполнены следующие условия:

равновесие: если $x_p^\dagger > 0$, $p \in P_\omega$, то для любого $q \in P_\omega$ выполнено

$$\sum_{e \in E} \theta_{ep} (a_e y_e^\dagger + b_e) \leq \sum_{e \in E} \theta_{eq} (a_e y_e^\dagger + b_e); \quad (30)$$

оптимальность: если $x_p^* > 0$, $p \in P_\omega$, то для любого $q \in P_\omega$ выполнено

$$\sum_{e \in E} \theta_{ep} (2a_e y_e^* + b_e) \leq \sum_{e \in E} \theta_{eq} (2a_e y_e^* + b_e). \quad (31)$$

Любопытно, что при линейных функциях задержек $\tau_e(y) = a_e y_e$ из неравенств (30) и (31) следует совпадение равновесных и оптимальных потоков.

Следуя работе [61], через тройку $[\Gamma, \rho, G(x)]$ обозначим транспортную модель, определенную на сети Γ , с матрицей корреспонденций $\rho = (\rho_\omega: \omega \in W)$ и затратами $G(x) = (G_p(x): p \in P)$. Везде далее будем полагать

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \tau_e(y) = \sum_{e \in E} \theta_{ep} (a_e y_e + b_e). \quad (32)$$

Имеет место следующий результат.

Лемма 1. Пусть x^\dagger — решение задачи транспортного равновесия для модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$. Тогда вектор $\frac{1}{2}x^\dagger$ является решением оптимизационной задачи для модели $[\Gamma, \frac{1}{2}\rho, G(x)]$.

Доказательство. Если x^\dagger является допустимым решением равновесной модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$, то, очевидно, $\frac{1}{2}x^\dagger$ — допустимое решение оптимизационной модели $[\Gamma, \frac{1}{2}\rho, G(x)]$, при этом неравенства (31) для $\frac{1}{2}x^\dagger$ переходят в (30). \square

Более того, для каждого такого маршрута $p \in P_\omega$, что $x_p^\dagger > 0$, выполнено

$$\frac{\partial c\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right)}{\partial x_p} = \sum_{e \in E} \theta_{ep} \{a_e y_e^\dagger + b_e\} = u_\omega(x^\dagger).$$

Лемма 2. Пусть x^* — оптимальное распределение потоков, отвечающее транспортной модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$. Тогда для любого допустимого потока x^δ в модели $[\Gamma, (1 + \delta)\rho, G(x)]$ справедлива оценка

$$c(x^\delta) \geq c(x^*) + \delta \sum_{\omega \in W} v_\omega(x^*) \rho_\omega, \quad (33)$$

где $\delta \geq 0$, $v_\omega(x^*) = \min_{p \in P_\omega} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}$.

Доказательство. Рассмотрим допустимые относительно модели $[\Gamma, (1 + \delta)\rho, G(x)]$ потоки x^δ . При затратах $G_p(x)$, определенных в (32), где все коэффициенты $a_e \geq 0$, функция $c(x)$ выпукла, отсюда

$$\begin{aligned} c(x^\delta) &\geq c(x^*) + \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} (x_p^\delta - x_p^*) = c(x^*) + \sum_{p \in P} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} (x_p^\delta - x_p^*) = c(x^*) + \\ &+ \sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} (x_p^\delta - x_p^*) = c(x^*) + \sum_{\omega \in W} \left(\sum_{p \in P_\omega} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} x_p^\delta - \sum_{p \in P_\omega} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} x_p^* \right). \end{aligned}$$

Поскольку для таких p , что $x_p^* > 0$, производная $\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p}$ принимает минимальное значение:

$$\frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} = \min_{q \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_q} = v_w(x^*),$$

то

$$\sum_{p \in P_w} \frac{\partial c(x^*)}{\partial x_p} x_p^* = \sum_{p \in P_w} v_w(x^*) x_p^*.$$

Следовательно, продолжая оценку снизу для $c(x^\delta)$, получаем

$$\begin{aligned} c(x^\delta) &\geq c(x^*) + \sum_{w \in W} \left(\sum_{p \in P_w} v_w(x^*) x_p^\delta - \sum_{p \in P_w} v_w(x^*) x_p^* \right) = \\ &= c(x^*) + \sum_{w \in W} v_w(x^*) \left(\sum_{p \in P_w} x_p^\delta - \sum_{p \in P_w} x_p^* \right) = \\ &= c(x^*) + \sum_{w \in W} v_w(x^*) ((1 + \delta) \rho_w - \rho_w) = c(x^*) + \delta \sum_{w \in W} v_w(x^*) \rho_w. \quad \square \end{aligned}$$

Итоговый результат текущего раздела устанавливает следующая теорема.

Теорема 6. Для транспортной модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$ с аффинными функциями задержек (32) для оптимального x^* и равновесного x^\dagger распределений потоков выполняется соотношение

$$\frac{c(x^\dagger)}{c(x^*)} \leq \frac{4}{3}.$$

Доказательство. Согласно (28) системные затраты для равновесного распределения x^\dagger рассчитываются как

$$c(x^\dagger) = \sum_{w \in W} u_w(x^\dagger) \rho_w,$$

по лемме 1 поток $\frac{1}{2}x^\dagger$ оптимален для транспортной модели $\left[\Gamma, \frac{1}{2}\rho, G(x)\right]$, при этом $v_w\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right) = u_w(x^\dagger)$.

Положим $\delta = 1$ в оценке (33). Тогда для произвольного потока x , допустимого в модели $\left[\Gamma, 2 \cdot \frac{1}{2}\rho, G(x)\right] = [\Gamma, \rho, G(x)]$, имеем

$$\begin{aligned} c(x) &\geq c\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right) + \sum_{w \in W} \frac{1}{2}v_w\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right)\rho_w = \\ &= c\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right) + \frac{1}{2} \sum_{w \in W} u_w(x^\dagger)\rho_w = c\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right) + \frac{1}{2}c(x^\dagger). \quad (34) \end{aligned}$$

Осталось получить оценку снизу $c\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right)$ в терминах $c(x^\dagger)$, что легко сделать, учитывая вид функций задержки:

$$c\left(\frac{1}{2}x^\dagger\right) = \sum_{e \in E} \frac{1}{2}y_e^\dagger \left(\frac{1}{2}a_e y_e^\dagger + b_e\right) \geq \frac{1}{4} \sum_{e \in E} y_e^\dagger (a_e y_e^\dagger + b_e) = \frac{1}{4}c(x^\dagger),$$

где для промежуточных вычислений использовались потоки по дугам $(y_e^\dagger, e \in E)$, индуцированные равновесными потоками по маршрутам x^\dagger . Очевидно, что при этом потоки $\frac{1}{2}x^\dagger$ будут индуцировать загрузку дуг $\left(\frac{1}{2}y_e^\dagger, e \in E\right)$.

В результате, продолжая оценку (34), получим

$$c(x) \geq \frac{1}{4}c(x^\dagger) + \frac{1}{2}c(x^\dagger) = \frac{3}{4}c(x^\dagger).$$

Вычисляя в последнем неравенстве минимум левой части по всем x , допустимым в модели $[\Gamma, \rho, G(x)]$, получаем

$$\frac{c(x^\dagger)}{c(x^*)} \leq \frac{4}{3}. \quad \square$$

Относительно общего случая нелинейных функций транспортных затрат нетрудно убедиться в том, что цена анархии может быть сколь угодно большой.

1.4. Численные методы решения задач транспортного равновесия

Эквивалентность задачи транспортного равновесия вариационному неравенству, а в частном случае оптимизационной задаче, позволяет адаптировать численные методы решения последних для поиска равновесных потоков. В данном разделе рассматриваются подходы к решению задачи транспортного равновесия с фиксированным спросом.

В зависимости от того, в каком пространстве переменных рассматривается исходная задача, выделяют два основных подхода к построению алгоритмических схем. Если равновесие моделируется только через потоковые переменные по дугам y_e , то применяют так называемые *дуговые алгоритмы* (arc-based algorithms). Если основными переменными задачи являются потоки по путям x_p и, соответственно, итерирование ведется по допустимым маршрутам, то такие алгоритмы называются *маршрутными* (path-based algorithms) [34, 59].

Основным преимуществом поиска равновесия через переменные x_p является возможность «убить двух зайцев одним выстрелом»: зная распределение потоков по маршрутам и используя соотношение (17), всегда

можно определить загрузку дуг транспортной сети. Обратное преобразование, очевидно, неоднозначно. Информация о распределении потоков по путям сама по себе является важной при моделировании других задач, например, проблем загрязнения окружающей среды, оценки матрицы корреспонденций, планирования транспортных развязок и модернизации улично-дорожной сети, эффективного регулирования движения и т. п.

Несомненным плюсом в пользу работы в пространстве потоковых переменных по путям с алгоритмической точки зрения является возможность естественной проверки выполнения условия равновесия (1) и поиска распределения потоков, удовлетворяющих заданной точности. Информация только о потоках по дугам такой возможности не дает. Кроме того, структура допустимого множества X , определенного в (3), представляет собой декартово произведение непересекающихся симплексов X_w , и такое свойство может породить целый класс методов, использующих принципы декомпозиции и идеи параллелизации итерационных схем.

Последним аргументом в пользу исследования задачи транспортного равновесия именно в терминах потоковых переменных по путям является тот простой факт, что при общем задании функции издержек $G_p(x)$, не обязательно складывающихся из затрат на передвижение по дугам, переформулировка условия равновесия (1) в терминах переменных y_e невозможна.

Основной недостаток работы с потоковыми переменными по путям — это необходимость априорного задания множества всех допустимых маршрутов P . Такая задача является очень трудоемкой, особенно для реальных транспортных сетей. Как вариант, для каждой потокообразующей пары можно ограничиться рассмотрением k кратчайших маршрутов, заведомо исключить неперспективные пути, но от этого проблема проще не становится. На практике используется не так много вариантов движения, поэтому нет необходимости знать все элементы множества P . Более того, существует стандартная техника, часто называемая методом генерации столбцов, когда входные данные непосредственно строятся в процессе решения задачи. Применение такой техники к проблеме поиска транспортного равновесия позволит строить множество допустимых и перспективных для использования маршрутов непосредственно в процессе решения задачи.

Таким образом, из приведенных аргументов видно, что потоковое равновесие предпочтительней искать как решение вариационного неравенства (6) в пространстве потоковых переменных по путям.

1.4.1. Проекционные методы решения задачи транспортного равновесия

Среди существующих методов решения вариационных неравенств отдельно можно выделить проекционные алгоритмы, отличающиеся просто-

той своих итерационных схем и гибкостью к различного рода модификациям.

В основу проекционных методов положена связь между множеством решений вариационного неравенства и неподвижными точками проекционного отображения, установленная в утверждении 2.

Далее понадобятся следующие определения.

Определение 4. Отображение $G: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ на множестве X называется:

- липшицевым, если существует константа $L > 0$ такая, что $\|G(x) - G(y)\| \leq L\|x - y\|$ для всех $x, y \in X$;
- сильно монотонным с константой $\tau > 0$, если $(G(x) - G(y))(x - y) \geq \tau\|x - y\|^2$ для всех $x, y \in X$;
- обратно сильно монотонным (ко-коэрцитивным) с константой $\tau > 0$, если $(G(x) - G(y))(x - y) \geq \tau\|G(x) - G(y)\|^2$ для всех $x, y \in X$;
- монотонным, если $(G(x) - G(y))(x - y) \geq 0$ для всех $x, y \in X$;
- псевдомонотонным, если из неравенства $G(x)(y - x) \geq 0$ следует $G(y)(y - x) \geq 0$ для всех $x, y \in X$;
- строго псевдомонотонным, если из неравенства $G(x)(y - x) \geq 0$ следует $G(y)(y - x) > 0$ для всех $x, y \in X, x \neq y$.

В самой простой форме проекционный метод строит последовательность $\{x^k\} \in X$, генерируемую рекуррентным соотношением

$$x^{k+1} = \pi_X(x^k - \lambda_k G(x^k)), \quad \lambda_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

На текущий момент известно, что сходимость процесса (35) гарантируется при выполнении одного из следующих условий (см. [50] и библиографию в ней):

- 1) отображение G сильно монотонно с константой τ и липшицево с константой $L, \lambda_k \in (0, 2\tau/L^2)$;
- 2) отображение G ко-коэрцитивно с константой $\mu, \lambda_k \in (0, 2\mu)$;
- 3) для любых $x \in X \setminus X^*$ и $x^* \in X^*$ выполнено

$$G(x)(x - x^*) > 0, \quad (36)$$

где X^* — множество решений вариационного неравенства, $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{\|G(x^k)\|}, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$.

Нетрудно показать, что любое сильно монотонное липшицево отображение является ко-коэрцитивным и влечет выполнение неравенства (36). Обратное, очевидно, неверно, поэтому второе и третье условия являются менее ограничительными, чем первое, однако остаются достаточно сильными предположениями, что существенно сужает круг задач, для которых