

радиоэлектроники

А. Оппенгейм,
Р. Шафер

Цифровая обработка
сигналов

Издание 3-е, исправленное



ТЕХНОСФЕРА

*Издано при финансовой поддержке
Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям
в рамках Федеральной целевой программы
«Культура России (2012-2018 годы)»*



Издание осуществлено при поддержке ОАО «РТИ»

УДК 621.391

ББК 32.811

О62

О62 Оппенгейм А., Шафер Р.

Цифровая обработка сигналов

Издание 3-е, исправленное

Москва: Техносфера, 2012. – 1048 с., ISBN 978-5-94836-329-5

Предлагаемая вниманию читателя книга — третье переработанное издание всемирно известного классического учебника «Цифровая обработка сигналов», опубликованного в 1975 году. В ее основу лег развернутый курс по цифровой обработке сигналов, преподававшийся в течение ряда лет в Массачусетском технологическом институте. Учебник посвящен математическим алгоритмам, реализуемым в цифровых системах. В нем опущены сложные доказательства математических утверждений, но все приемы и методы иллюстрированы многочисленными примерами и задачами.

Книга будет полезна как студентам, осваивающим предмет, так и инженерам-разработчикам и системотехникам.

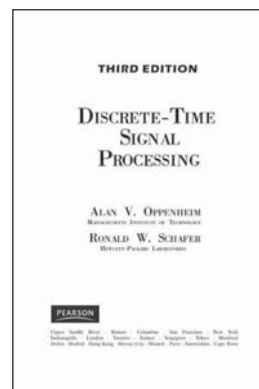
УДК 621.391

ББК 32.811

Authorized translation from the English language edition, entitled DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING, 3rd Edition; ISBN 0131988425, by OPPENHEIM, ALAN V.; and SCHAFER, RONALD W.; published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall. Copyright ©2010 by Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc. RUSSIAN language edition published by TECHNOSPHERA publishers. Copyright ©2012

Авторизованный перевод издания на английском языке, под названием DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING (ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ), 3-е издание; ISBN 0131988425, OPPENHEIM, ALAN V.; and SCHAFER, RONALD W.; изданного компанией Pearson Education, Inc, опубликованного Prentice Hall. Copyright ©2010 by Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. Все права защищены. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена или передана в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотокопирование, запись или извлечение любой информации из поисковой системы без получения разрешения от компании Pearson Education, Inc.



© 2012, ЗАО «РИЦ «Техносфера», перевод на русский язык, оригинал-макет, оформление.

ISBN 978-5-94836-329-5

ISBN 978-0-13-198842-2 (англ.)

Содержание

Предисловие к русскому изданию	14
Предисловие	16
Благодарности	23
Глава 1.	
Введение	26
Глава 2.	
Дискретные сигналы и системы	35
2.1. Введение	35
2.2. Дискретные сигналы	36
2.3. Дискретные системы	42
2.3.1. Системы без памяти	43
2.3.2. Линейные системы	44
2.3.3. Стационарные системы	45
2.3.4. Причинность	46
2.3.5. Устойчивость	47
2.4. Линейные стационарные системы	48
2.5. Свойства линейных стационарных систем	53
2.6. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	58
2.7. Представление сигналов и систем в частотной области	63
2.7.1. Собственные функции линейных стационарных систем	63
2.7.2. Мгновенно поданный экспоненциальный сигнал	68
2.8. Преобразование Фурье	70
2.9. Симметрии преобразования Фурье	76
2.10. Теоремы о преобразовании Фурье	79
2.10.1. Линейность преобразования Фурье	79
2.10.2. Временной и частотный сдвиги	79
2.10.3. Обращение времени	80
2.10.4. Дифференцирование по частоте	80
2.10.5. Теорема Парсеваля	80
2.10.6. Теорема о свертке	80
2.10.7. Модуляция, или теорема о произведении сигналов	81
2.11. Случайные дискретные сигналы	84
2.12. Краткое содержание главы	90
Задачи	90
Глава 3.	
Z-преобразование	117
3.1. Введение	117
3.2. Z-преобразование	117
3.3. Область сходимости z -преобразования	126
3.4. Обратное z -преобразование	132
3.4.1. Табличный метод	132
3.4.2. Метод простейших дробей	132

3.4.3.	Разложение в степенные ряды	137
3.5.	Свойства z -преобразования	138
3.5.1.	Линейность	139
3.5.2.	Задержка	140
3.5.3.	Умножение на экспоненциальную последовательность	141
3.5.4.	Дифференцирование $X(z)$	142
3.5.5.	Сопряжение комплексной последовательности	143
3.5.6.	Обращение времени	143
3.5.7.	Свертка последовательностей	144
3.5.8.	Теорема о начальном значении	145
3.5.9.	Несколько слов в заключение	145
3.6.	Z -преобразование и ЛС-системы	146
3.7.	Одностороннее z -преобразование	148
3.8.	Краткое содержание главы	150
	Задачи	151

Глава 4.

Дискретизация непрерывного сигнала	164	
4.1.	Введение	164
4.2.	Периодическая дискретизация	164
4.3.	Частотное представление дискретизации	167
4.4.	Восстановление сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам	173
4.5.	Дискретная обработка непрерывных сигналов	176
4.5.1.	Дискретная обработка непрерывных сигналов ЛС-системами	177
4.5.2.	Импульсная инвариантность	182
4.6.	Непрерывная обработка дискретных сигналов	184
4.7.	Изменение частоты дискретизации с помощью дискретной обработки ..	187
4.7.1.	Уменьшение частоты дискретизации в целое число раз	188
4.7.2.	Увеличение частоты дискретизации в целое число раз	192
4.7.3.	Простые и практичные интерполяционные фильтры	195
4.7.4.	Изменение частоты дискретизации с рациональным множителем	198
4.8.	Многоскоростная обработка сигналов	201
4.8.1.	Смена порядка фильтрации и понижающей/повышающей дискретизации	202
4.8.2.	Многоступенчатые прореживание и интерполирование	203
4.8.3.	Полифазное разложение	204
4.8.4.	Полифазная реализация прореживающих фильтров	206
4.8.5.	Полифазная реализация интерполяционных фильтров	207
4.8.6.	Банки многоскоростных фильтров	209
4.9.	Цифровая обработка аналоговых сигналов	212
4.9.1.	Предварительная фильтрация для устранения эффекта наложения спектров	213
4.9.2.	Преобразование аналогового сигнала в цифровой	215
4.9.3.	Анализ ошибок квантования	220
4.9.4.	Преобразование цифрового сигнала в аналоговый	226
4.10.	Избыточная дискретизация и формирование шумов в АЦП и ЦАП	230
4.10.1.	Избыточно дискретизированный АЦП с простым квантованием	230
4.10.2.	Избыточно дискретизированный АЦП с формированием шумов	234

4.10.3. Избыточная дискретизация и формирование шумов в ЦАП	239
4.11. Краткое содержание главы	241
Задачи	242
Глава 5.	
Анализ линейных стационарных систем	276
5.1. Введение	276
5.2. Комплексная частотная характеристика ЛС-систем	277
5.2.1. Фаза частотной характеристики и групповая задержка	277
5.2.2. Иллюстрация эффекта групповой задержки и затухания	280
5.3. Системы, характеризующиеся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами	284
5.3.1. Устойчивость и причинность	286
5.3.2. Обратные системы	287
5.3.3. Импульсная характеристика систем с рациональной системной функцией	289
5.4. КЧХ систем с рациональной системной функцией	291
5.4.1. КЧХ системы первого порядка	292
5.4.2. Примеры с кратными полюсами или нулями	296
5.5. Взаимосвязь АЧХ и ФЧХ	299
5.6. Все пропускающие системы	304
5.7. Минимально-фазовые системы	309
5.7.1. Минимально-фазовое и все пропускающее разложение	309
5.7.2. Компенсация воздействия КЧХ неминимально-фазовых систем	311
5.7.3. Свойства минимально-фазовых систем	315
5.8. Линейные системы с обобщенной линейной фазой	319
5.8.1. Системы с линейной фазой	320
5.8.2. Обобщенная линейная фаза	323
5.8.3. Причинные системы с обобщенной линейной фазой	325
5.8.4. Связь линейно-фазовых КИХ-систем с минимально-фазовыми	333
5.9. Краткое содержание главы	334
Задачи	337
Глава 6.	
Структуры для дискретных систем	368
6.1. Введение	368
6.2. Блок-схемы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами	369
6.3. Сигнальный потоковый граф линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами	375
6.4. Основные структуры БИХ-систем	380
6.4.1. Прямые формы	381
6.4.2. Каскадные формы	381
6.4.3. Параллельные формы	385
6.4.4. Обратная связь в БИХ-системах	387
6.5. Транспонированные формы	389
6.6. Основные структуры КИХ-систем	392
6.6.1. Прямая форма	392

6.6.2.	Каскадная форма	393
6.6.3.	Структуры КИХ-систем с линейной фазой	393
6.7.	Решетчатые фильтры	396
6.7.1.	Решетчатые КИХ-фильтры	396
6.7.2.	Решетчатая структура с одними полюсами (All-Pole Lattice Structure)	402
6.7.3.	Обобщение решетчатых систем	404
6.8.	Обзор проблем цифрового представления	405
6.8.1.	Численное представление	405
6.8.2.	Квантование при реализации систем	408
6.9.	Квантование коэффициентов	411
6.9.1.	Квантование коэффициентов в БИХ-системах	411
6.9.2.	Пример квантования коэффициентов в эллиптическом фильтре	412
6.9.3.	Полюсы квантованных секций второго порядка	417
6.9.4.	Квантование коэффициентов в КИХ-системах	418
6.9.5.	Пример квантования оптимального КИХ-фильтра	420
6.9.6.	Поддержка линейной фазы	423
6.10.	Шумы округления в цифровых фильтрах	424
6.10.1.	Анализ прямой формы БИХ-структур	425
6.10.2.	Масштабирование в реализациях БИХ-систем с фиксированной точкой	432
6.10.3.	Пример анализа каскада БИХ-структур	436
6.10.4.	Анализ прямой формы КИХ-систем	440
6.10.5.	Реализация дискретных систем в арифметике с плавающей точкой ..	444
6.11.	Предельные циклы при отсутствии входного сигнала в реализациях цифровых БИХ-фильтров	446
6.11.1.	Предельные циклы, возникающие при округлении и усечении	446
6.11.2.	Предельные циклы, вызываемые переполнениями	448
6.11.3.	Предупреждение предельных циклов	449
6.12.	Краткое содержание главы	450
	Задачи	451
Глава 7.		
Техника проектирования фильтров		
7.1.	Введение	477
7.2.	Спецификации фильтров	478
7.3.	Проектирование дискретных БИХ-фильтров, основанное на непрерывных фильтрах	480
7.3.1.	Разработка фильтров с помощью импульсной инвариантности	481
7.3.2.	Билинейное преобразование	486
7.4.	Дискретные фильтры Баттерворта, Чебышева и эллиптический	491
7.4.1.	Примеры проектирования БИХ-фильтров	492
7.5.	Преобразования частоты БИХ-фильтров нижних частот	503
7.6.	Разработка КИХ-фильтров оконным методом	511
7.6.1.	Стандартные окна и их свойства	515
7.6.2.	Обобщенная линейная фаза	516
7.6.3.	Метод Кайзера проектирования фильтров	520
7.7.	Примеры проектирования КИХ-фильтров методом Кайзера	524

7.7.1.	Фильтр нижних частот	524
7.7.2.	Фильтр верхних частот.....	526
7.7.3.	Дискретный дифференциатор	529
7.8.	Оптимальная аппроксимация КИХ-фильтров	531
7.8.1.	Оптимальный фильтр нижних частот I типа.....	538
7.8.2.	Оптимальный фильтр нижних частот II типа	543
7.8.3.	Алгоритм Паркса –Макклеллана	544
7.8.4.	Характеристики оптимальных КИХ-фильтров	547
7.9.	Примеры равнопульсирующей КИХ-аппроксимации.....	548
7.9.1.	Фильтр нижних частот	549
7.9.2.	Компенсация для схемы запоминания нулевого порядка.....	551
7.9.3.	Полосовой фильтр	553
7.10.	Комментарии к дискретным БИХ- и КИХ-фильтрам	554
7.11.	Проектирование фильтров для повышения частоты дискретизации	556
7.12.	Краткое содержание главы.....	559
	Задачи	560
Глава 8.		
	Дискретное преобразование Фурье	601
8.1.	Введение	601
8.2.	Представление периодических последовательностей: дискретные ряды Фурье.....	601
8.3.	Свойства дискретных рядов Фурье	605
8.3.1.	Линейность	606
8.3.2.	Сдвиг последовательности.....	606
8.3.3.	Дуальность.....	606
8.3.4.	Симметричность	607
8.3.5.	Периодическая свертка	607
8.3.6.	Обзор свойств представления периодических последовательностей дискретными рядами Фурье	609
8.4.	Преобразование Фурье периодических сигналов.....	609
8.5.	Дискретизация Фурье-образа.....	614
8.6.	Представление Фурье конечных последовательностей: дискретное преобразование Фурье.....	617
8.7.	Свойства дискретного преобразования Фурье.....	620
8.7.1.	Линейность	621
8.7.2.	Циклический сдвиг последовательности	622
8.7.3.	Дуальность.....	624
8.7.4.	Симметрия	625
8.7.5.	Циклическая свертка	628
8.7.6.	Обзор свойств дискретного преобразования Фурье	631
8.8.	Вычисление линейной свертки через ДПФ	632
8.8.1.	Линейная свертка двух конечных последовательностей.....	633
8.8.2.	Циклическая свертка как линейная с наложением во времени.....	634
8.8.3.	Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье....	637
8.9.	Дискретное косинусное преобразование	643
8.9.1.	Определение дискретного косинусного преобразования	644
8.9.2.	Определение ДКП-1 и ДКП-2	644

8.9.3.	Связь между ДПФ и ДКП-1.....	647
8.9.4.	Связь между ДПФ и ДКП-2.....	648
8.9.5.	Уплотнение энергии при ДКП-2	649
8.9.6.	Приложения ДКП.....	652
8.10.	Краткое содержание главы.....	653
	Задачи.....	654
Глава 9.		
Вычисление дискретного преобразования Фурье.....		
9.1.	Введение.....	683
9.2.	Прямое вычисление дискретного преобразования Фурье	684
9.2.1.	Прямое вычисление по определению ДПФ.....	685
9.2.2.	Алгоритм Герцеля.....	686
9.2.3.	Использование как симметрии, так и периодичности	689
9.3.	Прореживание по времени.....	689
9.3.1.	Обобщение и программирование БПФ	695
9.3.2.	Вычисления на месте	695
9.3.3.	Альтернативные формы.....	698
9.4.	Прореживание по частоте	701
9.4.1.	Вычисление на месте	704
9.4.2.	Альтернативные формы.....	705
9.5.	Подробное исследование алгоритма	706
9.5.1.	Нумерация	707
9.5.2.	Коэффициенты	709
9.6.	Более общие алгоритмы БПФ.....	709
9.6.1.	Алгоритмы для составных N	709
9.6.2.	Оптимизированные алгоритмы БПФ	712
9.7.	Реализация дискретного преобразования Фурье с помощью свертки.....	712
9.7.1.	Обзор алгоритма Винограда–Фурье.....	712
9.7.2.	Преобразование с линейной частотной модуляцией.....	713
9.8.	Эффекты, связанные с конечной длиной регистров.....	718
9.9.	Краткое содержание главы.....	725
	Задачи.....	725
Глава 10.		
Приложение ДПФ к Фурье-анализу.....		
10.1.	Введение.....	753
10.2.	ДПФ и Фурье-анализ сигналов.....	753
10.3.	ДПФ-анализ синусоидальных сигналов.....	757
10.3.1.	Эффект обработки методом окна.....	757
10.3.2.	Свойства окон.....	760
10.3.3.	Спектральная дискретизация.....	762
10.4.	Преобразование Фурье, зависящее от времени	769
10.4.1.	Обратимость $X[n, \lambda]$	775
10.4.2.	Интерпретация $X[n, \lambda]$ в терминах банков фильтров.....	775
10.4.3.	Эффект обработки окном.....	776
10.4.4.	Дискретизация по времени и по частоте.....	778
10.4.5.	Восстановление сигнала методом перекрытия с суммированием	780

10.4.6.	Обработка сигналов, основанная на зависящем от времени преобразовании Фурье.....	784
10.4.7.	Интерпретация зависящего от времени преобразования Фурье как банка фильтров.....	785
10.5.	Примеры Фурье-анализа нестационарных сигналов.....	788
10.5.1.	Зависящий от времени Фурье-анализ речевых сигналов	789
10.5.2.	Зависящий от времени Фурье-анализ радарных сигналов	791
10.6.	Фурье-анализ стационарных случайных сигналов: периодограмма	794
10.6.1.	Периодограмма	796
10.6.2.	Свойства периодограмм	797
10.6.3.	Усреднение периодограмм	801
10.6.4.	Вычисление усредненных периодограмм через ДПФ	802
10.6.5.	Пример периодограммного анализа	803
10.7.	Спектральный анализ случайных сигналов с помощью оценки автокорреляционной функции	807
10.7.1.	Вычисление корреляции и оценка спектра мощности с помощью ДПФ	810
10.7.2.	Оценка спектра мощности шума квантования	812
10.7.3.	Оценка спектра мощности речи	817
10.8.	Краткое содержание главы.....	820
	Задачи	822
Глава 11.		
	Параметрическое моделирование сигнала	849
11.1.	Введение	849
11.2.	Полосное моделирование сигналов	850
11.2.1.	Аппроксимация методом наименьших квадратов	851
11.2.2.	Модель, обратная методу наименьших квадратов	851
11.2.3.	Формулировка задачи линейного предсказания для полюсной модели	853
11.3.	Модели детерминированных и случайных сигналов.....	854
11.3.1.	Полосное моделирование детерминированных сигналов с конечной энергией	855
11.3.2.	Моделирование случайных сигналов.....	855
11.3.3.	Минимальный средний квадрат ошибки	856
11.3.4.	Свойство согласования автокорреляции	857
11.3.5.	Определение коэффициента усиления G	857
11.4.	Оценка корреляционной функции	859
11.4.1.	Автокорреляционный метод.....	859
11.4.2.	Ковариационный метод.....	861
11.4.3.	Сравнение методов.....	863
11.5.	Порядок модели	864
11.6.	Анализ полюсного спектра	866
11.6.1.	Полюсный анализ речевых сигналов.....	867
11.6.2.	Расположение полюсов	870
11.6.3.	Полюсное моделирование синусоидальных сигналов	871
11.7.	Решение автокорреляционных нормальных уравнений.....	874
11.7.1.	Рекурсия Левинсона – Дарбина.....	875

11.7.2. Вывод алгоритма Левинсона–Дарбина	876
11.8. Решетчатые фильтры	879
11.8.1. Решетчатый фильтр ошибки предсказания	880
11.8.2. Решетчатая полюсная модель	882
11.8.3. Прямое вычисление k -параметров	883
11.9. Краткое содержание главы	885
Задачи	885
Глава 12.	
Дискретное преобразование Гильберта	902
12.1. Введение	902
12.2. Вещественная и мнимая части Фурье-образа причинной последовательности	904
12.3. Теоремы достаточности для конечных последовательностей	908
12.4. Взаимосвязь абсолютного значения и фазы	914
12.5. Соотношения преобразования Гильберта для комплекснозначных последовательностей	915
12.5.1. Проектирование преобразователя Гильберта	919
12.5.2. Представление полосовых сигналов	922
12.5.3. Полосовая дискретизация	924
12.6. Краткое содержание главы	927
Задачи	927
Глава 13.	
Кепстральный анализ и гомоморфное обращение свертки	937
13.1. Введение	937
13.2. Определение кепстра	938
13.3. Определение комплексного кепстра	939
13.4. Свойства комплексного логарифма	941
13.5. Другие выражения для комплексного кепстра	942
13.6. Свойства комплексного кепстра	943
13.6.1. Экспоненциальные последовательности	943
13.6.2. Минимально- и максимально-фазовые последовательности	946
13.6.3. Соотношения между вещественным и комплексным кепстрами	947
13.7. Вычисление комплексного кепстра	949
13.7.1. Развертка фазы	950
13.7.2. Расчет комплексного кепстра с помощью логарифмической производной	953
13.7.3. Минимально-фазовая реализация для минимально-фазовых последовательностей	955
13.7.4. Рекурсивные вычисления комплексного кепстра для минимально- и максимально-фазовых последовательностей	955
13.7.5. Использование экспоненциального взвешивания	956
13.8. Вычисление комплексного кепстра с помощью корней многочлена	957
13.9. Обращение свертки с помощью комплексного кепстра	959
13.9.1. Гомоморфное обращение свертки минимально-фазового и фазового компонентов	960

13.9.2. Гомоморфное обращение свертки минимально- и максимально-фазового компонентов	961
13.10. Комплексный кепстр для простой многолучевой модели	963
13.10.1. Расчет комплексного кепстра путем анализа z -преобразования	966
13.10.2. Вычисление кепстра с помощью ДПФ	967
13.10.3. Гомоморфное обращение свертки для многолучевой модели	970
13.10.4. Минимально-фазовое разложение	974
13.10.5. Обобщения	979
13.11. Приложения кепстра для обработки речи	980
13.11.1. Модель речевых сигналов	980
13.11.2. Пример гомоморфного обращения свертки для речевого сигнала	983
13.11.3. Оценка параметров модели речи	985
13.11.4. Приложения	988
13.12. Краткое содержание главы	988
Задачи	988

Приложение А.

Случайные сигналы	1000
А.1. Дискретные случайные процессы	1000
А.2. Средние	1001
А.2.1. Определения	1001
А.2.2. Временные средние	1004
А.3. Свойства корреляционной и ковариационной последовательностей	1005
А.4. Преобразование Фурье случайных сигналов	1007
А.5. Использование z -преобразования при вычислении средней мощности	1009

Приложение Б.

Непрерывные фильтры	1012
Б.1. Фильтры Баттерворта нижних частот	1012
Б.2. Фильтры Чебышева	1013
Б.3. Эллиптические фильтры	1015

Приложение В.

Ответы к избранным задачам	1017
---	------

Литература	1027
-------------------------	------

Литература на русском языке	1041
--	------

Предметный указатель	1044
-----------------------------------	------

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

Обработка сигналов имеет долгую и богатую историю. Это технология, охватывающая огромный набор приложений, включая развлечения, коммуникации, космические исследования, медицину, геофизику и археологию. Перечислено лишь несколько направлений, выбранных наугад из большого списка. Сложнейшие алгоритмы обработки сигналов и соответствующее аппаратное оборудование используются в широком диапазоне систем: от узкоспециализированных военных и промышленных до недорогой широко распространенной бытовой электроники. Мы воспринимаем как само собой разумеющееся работу домашних приборов, например телевизоров или высококачественных музыкальных центров и интерактивных игр, не задумываясь о том, что своим существованием они в большой степени обязаны развитой теории и практике обработки сигналов. Сложные цифровые сигнальные процессоры являются «сердцем» всех современных сотовых телефонов. Стандарты сжатия изображений и видеопотоков (JPEG и MPEG¹) опираются на многочисленные принципы и технологии обработки сигналов, рассматриваемые в этой книге. Хранение данных с высокой плотностью на дисковых носителях, а также реализация современной твердотельной памяти все больше опираются на достижения обработки сигналов, чтобы придать надежность этим хрупким по своей природе технологиям. В общем и целом при взгляде в будущее становится ясно, что роль обработки сигналов в нашем обществе становится все более заметной частично благодаря сближению средств коммуникации, компьютеров и обработки сигналов как в потребительской сфере, так и в более грандиозных индустриальных и правительственных проектах.

Возрастающее число приложений и повышенный спрос на все более и более сложные алгоритмы идут «рука об руку» с быстро развивающейся технологией реализации систем обработки сигналов. По некоторым оценкам, несмотря на ограниченную применимость закона Мура, производительность как специализированных сигнальных микропроцессоров, так и персональных компьютеров за следующие 10 лет может увеличиться на несколько порядков. Кажется абсолютно очевидным, что необходимость и роль обработки сигналов в современном обществе постоянно растут и ширятся.

Обработка сигналов имеет дело с представлением и преобразованием сигналов и информации, которую они несут. Например, нам может потребоваться разделить два или более сигнала, которые тем или иным способом были объединены (например сложением, перемножением или сверткой), может возникнуть необходимость усилить некоторые компоненты или оценить параметры сигнала. В коммуникационных системах сигнал перед передачей нужно подвергать предварительной обработке,

¹Аббревиатуры MPEG и JPEG используются даже неспециалистами при ссылках на стандарты, разработанные «Moving Picture Expert Group (MPEG)» (экспертная группа по движущемуся изображению) и «Joint Photographic Expert Group (JPEG)» (объединенная группа экспертов по фотографии) из «International Organization for Standardization (ISO)» (международная организация по стандартизации).

например модуляции, обеспечивая выполнение определенных требований к передающемуся сигналу, или сжатию для более быстрой передачи по каналу, а затем выполнить обратные операции на приемной стороне, чтобы получить копию исходного сигнала. До 1960-х годов технология обработки сигналов сводилась почти исключительно к непрерывной, аналоговой, технологии¹. Быстрое развитие цифровых компьютеров и микропроцессоров вместе с важными теоретическими достижениями типа быстрого преобразования Фурье, параметрическое моделирование сигналов, многоскоростные методы, полифазная фильтрация, а также новые методы представления сигналов, например вейвлет-анализ, привели к существенному изменению в цифровых технологиях — возникновению направления ЦОС. Приведем всего лишь один пример: аналоговые радиосистемы превращаются в «программное радио» с перестраиваемой конфигурацией, реализуемое почти исключительно с помощью цифровых вычислений.

Основное отличие ЦОС от классической теории состоит в том, что сигнал в ЦОС — это числовая последовательность. Сигналы в ЦОС представляются последовательностями чисел конечной точности (имеется в виду, что значения элементов последовательностей лежат в дискретной области), а обработка осуществляется с помощью операций над числами. Более общий термин «*обработка сигналов, дискретизированных по времени*», или «*обработка дискретных сигналов*» (ОДС), посвящен области, включающей ЦОС как частный случай, в которой последовательности отсчетов (данные дискретизации) обрабатываются с применением других дискретных технологий. Различие между понятиями «обработка дискретных сигналов» и «цифровая обработка сигналов» часто не принимается в расчет, поскольку оба термина относятся к областям науки, имеющим дело с дискретными сигналами. Это особенно справедливо, когда речь идет о высокоточных вычислениях. Хотя существует много примеров, когда обрабатываемые сигналы действительно являются числовыми последовательностями, большинство приложений используют дискретные технологии для обработки непрерывных сигналов. В последнем случае непрерывные сигналы преобразуются в последовательности отсчетов, т. е. дискретный сигнал. Действительно, одним из самых мощных стимулов к широкому использованию цифровой обработки сигнала послужило появление дешевых АЦП/ЦАП, основанных на дифференциальном квантовании с формированием шума. После дискретной обработки ее результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал. Для таких систем часто необходима или предпочтительна работа в режиме реального времени. С ростом доступных скоростей вычислений дискретная обработка непрерывных сигналов в режиме реального времени стала типичной в системах связи, радарх и сонарах (гидролокаторах), аудио- и видеосистемах, биомедицине и многих других областях применения. Есть применения и у обработки не в реальном времени. Проигрыватель компакт-дисков (CD-плеер) и MP3-плеер — примеры асимметричных систем, где входной сигнал обрабатывается лишь один раз. Эта исходная обработка может выполняться как в реальном времени, так и медленнее или даже быстрее. Обработанный сигнал хранится на компакт-диске или в микросхеме памяти, а реконструкция исходного сигнала производится в реальном времени в тот момент, когда это необходимо. Как записывающая, так и воспроизводящая сис-

¹Обычно переменную, от которой зависит сигнал, мы называем временем, хотя в отдельных ситуациях независимую переменную можно выбирать из довольно широкого класса измеряемых величин. Поэтому к непрерывному и дискретному времени нужно относиться как к общему термину, обозначающему непрерывную и дискретную независимую переменную.

тема компакт-дисков и MP3-плееров основывается на многих результатах теории обработки сигналов, которая обсуждается в нашей книге.

Еще одна область применения понятий и методов цифровой обработки сигналов — это финансовый инжиниринг. Эффективное моделирование, прогнозирование и фильтрация экономической информации могут привести к значительным положительным результатам в производительности и к повышению экономической стабильности. Например, специалисты по инвестированию все больше используют результаты цифровой обработки, поскольку даже незначительное увеличение в предсказуемости сигнала или отношении сигнал–шум может привести к значительному увеличению производительности.

Другой важный класс задач обработки сигналов касается *интерпретации сигналов*. Цель такой задачи состоит не в получении выходного сигнала, а в описании характеристик входного. Например, при записи или распознавании речи система направлена на интерпретацию входного сигнала, иными словами, на извлечение из него информации. Обычно такие системы сначала подвергают получаемый сигнал цифровой обработке (фильтрация, оценка параметров и т. д.), а затем применяют технологии распознавания образов, чтобы создать символьное представление сигнала, такое как, например, знаки транскрипции. Символьный выходной сигнал, в свою очередь, может подаваться на вход экспертной системы для получения окончательной интерпретации исходного сигнала.

Еще один относительно новый аспект обработки сигналов состоит в манипулировании аналитическими выражениями, описывающими обработку сигналов. Такое манипулирование потенциально полезно для рабочих станций, обрабатывающих сигналы, и для автоматизированного проектирования устройств обработки сигналов. При этом сигналы и системы представляются и обрабатываются как абстрактные объекты данных. Объектно-ориентированные языки программирования обеспечивают удобную среду для работы с сигналами, системами и операциями обработки сигналов, без явных вычислений последовательностей данных. Сложность систем, предназначенных для оперирования с символьными представлениями, определяется внедрением в них фундаментальных концепций теории, различного рода теорем и свойств, именно таких, которые служат объектом изучения нашей книги. Например, устройство, содержащее информацию о том, что свертка сигналов во временной области соответствует их произведению в частотном представлении, может анализировать многообразные перестановки фильтрующих структур, включая те, которые напрямую используют алгоритмы дискретного и быстрого преобразования Фурье. Аналогично прибор, «знающий» о связи между частотой дискретизации и наложением спектров, может эффективно выбирать стратегию прореживания и интерполяции при реализации фильтров. Похожие идеи в данный момент исследуются для реализации распределенной обработки сигналов. В таких системах данные сопровождаются высокоуровневыми описаниями необходимой обработки, а реализация этой обработки организуется динамически, исходя из доступных в данный момент ресурсов сети.

Многое из концепций и техники проектирования, обсуждаемых здесь, включено сейчас в структуру сложных программных пакетов, таких как, например, MATLAB, Simulink, Mathematica и LabVIEW. Во многих случаях, когда дискретные сигналы записаны в компьютер, инструментарий пакетов программ позволяет сконструировать из базисных функций чрезвычайно сложные процедуры обработки сигналов. В этих случаях совсем не обязательно знать подробности алгоритмов, реализующих

вычисления, например алгоритм быстрого преобразования Фурье, но важно понимать, что именно вычисляется и как следует интерпретировать результат. Другими словами, хорошее понимание концепций, изложенных в этом тексте, необходимо для грамотного использования программ, обрабатывающих сигналы, которые сейчас широко распространены и легко доступны.

Задачи обработки сигналов не ограничиваются, естественно, одномерными сигналами. Хотя существует фундаментальное отличие в теориях одномерных и многомерных сигналов, многое из изложенного здесь имеет параллель в теории многомерных систем. Теория обработки многомерных дискретных сигналов подробно изложена в книгах¹ Даджена (Dudgeon) и Мерсере (Mersereau) [56], Лима (Lim) [125] и Брэйсвела (Bracewell) [25]. Многие приложения по обработке изображений опираются на технику обработки двумерных сигналов. К ним относятся кодирование видеосигналов, обработка медицинских изображений, увеличение и анализ аэрофотоснимков, анализ спутниковых фотографий метеослужбы, а также устройства для космических исследований. Приложения теории обработки многомерных сигналов к распознаванию изображений представлены такими авторами, как Маковски (Macovski) [128], Каслман (Castleman) [30], Джойн (Jain) [101], Бовик (Bovic (ed.)) [22], Вудс (Woods) [238], Гонсалес и Вудс (Gonzalez and Woods) [75] и Пратт (Pratt) [168]. Анализ сейсмических данных, требующийся при разведке нефтяных месторождений, предсказаниях землетрясений и контроле за ядерными испытаниями, также требует обработки многомерных сигналов. Приложение многомерной теории к сейсмологии — тема изданий Робинсона (Robinson) и Трейтеля (Treitel) [188], Робинсона и Даррани (Durrani) [187].

Обработка многомерных сигналов — только одна из многих современных специализированных тем, не вошедших в нашу книгу. Спектральный анализ, основанный на ДПФ, и моделирование сигналов — другие чрезвычайно богатые и важные аспекты обработки сигналов. В главах 10 и 11 мы знакомим читателя с большим числом понятий из этих тем, концентрируя внимание на основных концепциях и технике, имеющей отношение к применению ДПФ и параметрического моделирования сигналов. В гл. 11 мы также рассмотрим класс методов спектрального анализа с высоким разрешением, основанный на представлении анализируемого сигнала как реакции дискретного стационарного линейного фильтра на импульсный сигнал или белый шум. Спектральный анализ делается с помощью оценки параметров (например коэффициентов разностного уравнения) системы и вычисления квадрата амплитудно-частотной характеристики полученной модели фильтра. Подробное обсуждение соответствующей теории можно найти у Кея (Kay) [116], Марпла (Marple) [133], Хайеса (Hayes) [81] и Стойка и Моузес (Stoica and Moses) [219].

Моделирование сигналов играет не последнюю роль при сжатии и кодировании данных, и вновь основы разностных уравнений служат базисом для понимания многого из соответствующего раздела техники. Например, один из методов кодирования сигналов, называемый *кодированием с линейным предсказанием*, эксплуатирует следующее наблюдение: если сигнал — отклик подходящего класса дискретных фильтров, то его значения в произвольный момент времени — линейная функция от предыдущих значений (поэтому они поддаются *линейному предсказанию*). Следовательно, эффективные представления сигналов могут быть получены на основе параметров предсказания и остаточной ошибки предсказания. После этого сигнал

¹ Литература, на которую будут появляться ссылки в этом тексте, расположена в конце книги.

можно при необходимости восстановить, исходя из значений этих параметров модели. Упомянутый класс методов работы с сигналами, особенно эффективный при кодировании речевых сигналов, подробно описан Джейнентом (Jayant) и Ноллом (Noll) [102], Маркелом (Markel) и Грейем (Gray) [132], Рабинером (Rabiner) и Шафером (Schafer) [175] и Куатьери (Quatieri) [170], а также частично освещен в гл. 11.

Другое сложное направление огромной важности — адаптивная обработка сигналов. Адаптивные системы представляют собой специфический класс меняющихся во времени и, в некотором смысле, нелинейных систем с обширными приложениями и хорошо развитыми эффективными методами проектирования и анализа. И здесь многие подходы строятся на фундаментальных принципах обработки дискретных сигналов. Детальное изложение адаптивной обработки можно найти в учебниках Уидроу (Widrow) и Стернза (Stearns) [240], Хайкина (Haykin) [83] и Сайеда (Sayed) [192].

Мы упомянули лишь о нескольких из многих развитых направлений техники, активно использующих математический аппарат, которому посвящен наш учебник. Остальные включают в себя специализированные процедуры проектирования фильтров, множество узконаправленных алгоритмов, вычисляющих преобразование Фурье, специфические структуры фильтров и разнообразную технику многоскоростной обработки сигналов, в том числе банки фильтров и вейвлет-преобразование (см. Баррас, Гопимас и Гуо (Burrus, Gopimath and Guo) [14], Вайдинатан (Vaidyanathan) [227] и Веттерли и Ковачевич (Vetterli and Kovačević) [230] для начального ознакомления с этими темами).

Фундаментальный учебник, по общему мнению, должен скорее ярко освещать предмет, чем затенять его излишними сложностями. При выборе обсуждаемых тем и степени глубины их проработки мы руководствовались именно этим принципом. Краткий обзор современных направлений научной мысли, которым мы предвараем основной материал, и список литературы в конце книги наглядно показывают широчайший диапазон теоретических и практических задач для тех, кто вдумчиво подготовится к ним, освоив фундаментальные основы ЦОС.

Исторический обзор

Обработка дискретных сигналов развивается уже долгое время, но несколько неравномерно, можно даже сказать, скачкообразно. Ретроспективный взгляд на историю становления этой отрасли знаний помогает выделить те фундаментальные принципы, которые будут занимать центральное место в ЦОС еще многие годы. Начиная с изобретения математического анализа в XVII веке, ученые и инженеры разрабатывают модели физических явлений в терминах функций непрерывных переменных и дифференциальных уравнений. Если аналитических методов решения соответствующих задач не хватает, к делу подключаются численные методы. Уже Ньютон, один из авторов «исчисления флюкций», активно эксплуатировал метод конечных разностей, которые, как мы убедимся, являются частным случаем описания дискретных систем. Математики XVIII века, например Эйлер, Бернулли и Лагранж, работали над численным интегрированием и интерполяцией функций непрерывной переменной. Интересное историческое исследование Хейдмана (Heideman), Джонсона (Johnson) и Барраса (Burrus) [85] показывает, что Гаусс открыл основные принципы быстрого преобразования Фурье (обсуждаемого в гл. 9) уже в 1805 г., опере-

див публикацию трактата самого Фурье о представлении функций гармоническими рядами.

Как мы уже говорили, вплоть до начала 1950-х годов обработка сигналов обычно ограничивалась аналоговыми системами, реализуемыми электронными схемами или даже механическими устройствами. Несмотря на то, что в то время первые вычислительные машины уже работали в бизнесе и крупных научных лабораториях, они были еще слишком дороги и обладали крайне малыми вычислительными ресурсами. В то же время постоянно возрастающая потребность в более сложной обработке сигналов в некоторых прикладных областях увеличивала интерес к обработке дискретных сигналов. Одна из первых попыток привлечения компьютеров к цифровой обработке сигналов была предпринята в геофизических исследованиях, где сейсмические данные можно было зафиксировать на магнитной ленте для последующей обработки. Естественно, такая обработка не могла проводиться в режиме реального времени. Минуты и даже часы тратились на обсчет сигналов секундной длительности с помощью первых ЭВМ. Однако возможности компьютера и потенциальная выгода такого метода обработки были весьма привлекательны.

Тогда же работа по привлечению вычислительных машин к обработке сигналов пошла по разным направлениям. Благодаря усиливающейся мощности компьютеров оказалось возможным моделировать на них системы обработки сигналов перед воплощением в железе. Таким образом, новые алгоритмы, обрабатывающие сигналы, равно как и системы, стали изучать в удобной экспериментальной среде перед привлечением (часто очень дорогостоящих) экономических и технических средств для их реализации. Типичным примером такого приема служит моделирование вокодера, выполненное в лабораториях Линкольна при Массачусетском технологическом институте и компании *Bell Laboratory*. При проектировании аналогового тракта вокодера необходимо было рассчитать характеристики фильтра, которые воздействуют на качество закодированного речевого сигнала настолько тонко, что без моделирования и соответствующих вычислений крайне трудно было оценить их эффект достаточно объективно. С помощью же компьютерного моделирования эти характеристики и качество системы кодирования речи можно было точно отрегулировать перед проектированием аналоговой части.

Очевидно, что в изложенных примерах компьютер значительно расширяет возможности по обработке сигналов. Однако процесс расчета все еще не мог идти в режиме реального времени. Поэтому было принято считать, что ЭВМ можно использовать лишь для *приблизительной* обработки или *моделирования* аналоговых систем. В соответствии с этим принципом ранние работы по цифровым фильтрам были в основном направлены на поиск путей программирования фильтров на компьютере так, чтобы при конвертировании аналогового сигнала в цифровой, обработке его цифровым фильтром и обратном преобразовании цифрового сигнала в аналоговый получалась хорошая аппроксимация аналогового фильтра. Мысль о практическом применении *цифровых систем* к актуальным задачам обработки в режиме реального времени — в речевой связи, в радарх или иных многообразных приложениях — даже в наиболее оптимистические времена казалась достаточно спекулятивной. Скорость, стоимость и размер — вот три основных фактора, влиявших на выбор аналоговых, а не дискретных компонентов.

Поскольку сигналы обрабатывались на цифровых компьютерах, скорость работы и память которых постоянно увеличивались, исследователи, естественно, экспериментировали со все более и более сложными сигналами и алгоритмами. Неко-

торые из этих алгоритмов появлялись благодаря возможностям вычислительных машин и не имели реального воплощения в аналоговом оборудовании. Иными словами, многие из этих алгоритмов считались интересными, но далекими от практического применения разработками. Однако развитие алгоритмов обработки сигналов делало идею создания полностью цифровых систем обработки сигналов все более заманчивой. Активная работа, начатая с исследования цифрового вокодера, цифровых анализаторов спектра и других полностью цифровых систем, подкреплялась надеждой, что в конечном счете такие системы станут востребованными.

Развитие новой точки зрения на перспективы обработки дискретных сигналов было ускорено изобретением Кули (Cooley) и Тьюки (Tukey) эффективного класса алгоритмов вычисления преобразования Фурье [47]. Сейчас подобные алгоритмы известны как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Открытие БПФ оказалось революционным по нескольким причинам. Многие алгоритмы обработки сигналов, разработанные для компьютеров, работали в несколько раз медленнее реального времени. Происходило это из-за необходимости анализа спектра, эффективных методов которого не существовало. Алгоритм БПФ сильно ускорил вычисление преобразования Фурье, допуская применение все более сложных алгоритмов за короткое время, что позволило производить интерактивные эксперименты с разрабатываемыми системами. Кроме того, алгоритмы, включающие в себя БПФ, стало возможно реализовать в узкоспециализированных аппаратных средствах. Поэтому абстрактные до этого момента алгоритмы стали приобретать и практическое значение.

Другим важным следствием изобретения БПФ стала его дискретная природа. БПФ было направлено на вычисление преобразования Фурье дискретных сигналов или последовательностей и включало в себя множество свойств и математический аппарат из дискретной области обработки сигналов. Короче говоря, ДПФ — не простое приближение к непрерывному преобразованию Фурье. Оно оказало стимулирующий эффект к переформулировке многих концепций и алгоритмов обработки сигналов в терминах дискретной математики, что привело к появлению множества точных соотношений в дискретной области. Отход от отношения к обработке сигналов на компьютерах как к приближительной модели аналоговой обработки привел к тому, что обработка дискретных сигналов стала считаться важной самостоятельной областью знаний.

Еще одно важное достижение в истории обработки дискретных сигналов произошло в области микроэлектроники. Изобретение и быстрое распространение микропроцессоров дало возможность создания дешевых систем, обрабатывающих сигналы. Хотя первые микропроцессоры были слишком медлительны для реализации большинства систем, которые работали бы в реальном времени (за исключением очень малой частоты дискретизации), к середине 1980-х годов технологии интегральных схем подошли к уровню, позволившему конструировать очень быстрые микрокомпьютеры, производящие вычисления как с фиксированной, так и с плавающей запятой, архитектура которых была разработана специально для реализации алгоритмов обработки дискретных сигналов. Стремительный рост микроэлектроники также значительно повлиял на развитие алгоритмов обработки сигналов и в другом отношении. Например, на заре цифровой обработки сигналов в режиме реального времени память была относительно дорогостояща, и одним из важнейших показателей разрабатываемых алгоритмов было эффективное использование памяти. В наше время память настолько дешевая, что многие алгоритмы пред-

намеренно используют больший объем памяти, чем это минимально необходимо, чтобы снизить энергопотребление процессора. Еще одна область, где технические ограничения поставили серьезную преграду быстрому развитию ЦОС, — это преобразование сигналов из аналоговой формы в цифровую. Первые АЦП и ЦАП представляли собой автономные устройства стоимостью в тысячи долларов. Благодаря объединению теории ЦОС и микроэлектроники появились дешевые преобразователи, с помощью которых стало возможно решать множество практических задач в реальном времени.

Подобным образом уменьшение числа арифметических операций, таких как умножение и сложение с плавающей запятой, теперь не так существенно, поскольку многоядерные процессоры часто имеют несколько доступных умножителей, и теперь становится важным уменьшить обмен данными между ядрами, даже если в результате потребуется большее число умножений. В многоядерном варианте, например, прямое вычисление ДПФ (или использование алгоритма Герцеля) более эффективно, нежели использование БПФ, поскольку, хотя и требуется много умножений, необходимость в обмене данными значительно меньше, так как обработку можно эффективно распределить между несколькими процессорами или ядрами. В более широком смысле изменение структуры алгоритмов и разработка новых алгоритмов, ориентированных на параллельную или распределенную обработку сигналов, становится новым перспективным направлением развития алгоритмов обработки сигналов.

Прогнозы на будущее

Инженеры продолжают исследования, направленные на увеличение плотности микросхем и объемов их производства, и, как результат, сложность микроэлектронных схем постоянно возрастает. Действительно, сложность, скорость и возможности цифровых сигнальных процессоров экспоненциально растут начиная с 1980-х годов, и пока нет никаких признаков замедления темпов развития. Пока техника интегральных схем ускоренно развивается, можно создавать все более сложные, но дешевые системы обработки дискретных сигналов с миниатюрными размерами и низкой потребляемой мощностью. Следовательно, значение обработки дискретных сигналов будет постоянно повышаться, и будущее развитие этой области будет еще более впечатляющим, чем то течение событий, которое мы только что описали.

Техника обработки дискретных сигналов уже содействует революционному прорыву в некоторых областях приложений. Примечательный пример лежит в области телекоммуникаций, где техника обработки дискретных сигналов, технологии микроэлектроники и волоконно-оптическая передача данных комбинируются для постигания революционного изменения природы систем связи. Подобные процессы можно ожидать и во многих других областях. Действительно, ЦОС всегда была, есть и будет областью, которая развивается благодаря новым практическим применениям. Иногда для новой прикладной задачи могут быть адаптированы достижения из других областей, но зачастую новое практическое применение стимулирует появление новых алгоритмов и нового «железа» для их реализации. Ранее развитию многих ключевых концепций ЦОС, которые рассматриваются в настоящем издании, способствовали прикладные задачи сейсмологии, радарной и телекоммуникационной техники. Разумеется, обработка сигналов всегда будет занимать видное место в

национальной обороне, индустрии развлечений, связи и медицине. В последнее время методы ЦОС стали использовать в таких полярных областях, как финансы и анализ ДНК.

Хотя предсказать новые области применения ЦОС весьма затруднительно, нет сомнения в том, что они будут очевидны для того, кто готов их распознать. Ключ к готовности решать проблемы цифровой обработки сигналов всегда был и будет в глубоком понимании фундаментальной математики сигналов и систем, а также неразрывно связанных с ними алгоритмов проектирования и обработки. В то время как обработка дискретных сигналов динамично развивается, ее фундаментальные принципы остаются неизменными. Наша цель в этой книге состоит в обеспечении логически связанной трактовки теории дискретных линейных систем, фильтрации, дискретизации, дискретного анализа Фурье и моделирования сигналов. Представленный материал должен наделить читателя знанием, необходимым для понимания широких возможностей приложения обработки дискретных сигналов и основ для вклада в будущее развитие этой удивительной области техники.

ГЛАВА 2

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

2.1. Введение

Сигналом обычно называют то, что несет в себе какие-то данные. Сигналы могут, например, передавать информацию о состоянии или поведении физической системы и часто синтезируются в целях обмена информацией между людьми, а также между людьми и механизмами. Хотя сигналы могут быть представлены многими способами, во всех случаях информацию несут некие изменения. На математическом языке сигналы — это функции одной или нескольких независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а фотографический образ — как функция яркости от двух пространственных переменных. По общему соглашению (чего мы, как правило, будем придерживаться в этой книге) независимой переменной в математическом представлении сигнала выступает время, хотя в отдельных примерах независимая переменная в сигнале фактически временем не является.

Независимая переменная в математической реализации сигнала может быть как непрерывной, так и дискретной. Сигналы с непрерывным временем определяются на непрерывных промежутках, зависят от непрерывной переменной и обычно называются *аналоговыми*. *Сигналы с дискретным временем*, или просто *дискретные сигналы*, определены в дискретные моменты времени и, как следствие, имеют независимую переменную с дискретными значениями. Тем самым они отождествляются с числовыми последовательностями. Такие сигналы, как речь или изображение, могут иметь как непрерывное, так и дискретное представление, и при выполнении определенных условий эти представления полностью эквивалентны. Кроме независимой переменной, дискретным или непрерывным может быть уровень (величина) сигнала. К *цифровым сигналам* относят те, у которых дискретны как переменная, так и уровень.

Аналогично и системы обработки сигналов могут быть разбиты на два класса. *Системой, непрерывной по времени*, или просто *непрерывной системой*, принято называть такую систему, у которой как входной сигнал, так и реакция на него — непрерывные сигналы, а *дискретной по времени (дискретной)* называют систему, у которой входной и выходной сигналы дискретны. *Цифровой* системой называют систему, перерабатывающую цифровой сигнал в цифровой же. Таким образом, цифровая обработка сигналов имеет дело с преобразованием сигналов, дискретных как по времени, так и по уровню. Основное внимание в этой книге уделено дискретным (а не цифровым) сигналам и системам. Однако теория дискретных сигналов

и систем чрезвычайно полезна для исследования цифровых сигналов и систем, особенно когда шаг квантования мал. Эффект квантования (дискретизации) сигналов по уровню разбирается в § 4.9, 6.9–6.11 и 9.8.

В этой главе мы даем основные определения, систему обозначений, а также рассматриваем основные понятия, связанные с дискретными сигналами и системами. Изложение материала подразумевает, что читатель уже знаком с данным материалом хотя бы в каком-либо объеме и, вероятно, в другой системе обозначений. Таким образом, эта глава в первую очередь предназначена для подготовки читателя к освоению материала, заключенного в последующих главах. В разделе 2.2 мы обсуждаем дискретные сигналы как последовательности и описываем основные последовательности, например единичный импульс, единичный скачок и комплексную экспоненту, которые играют ключевую роль и представляют собой строительный материал для более общих последовательностей. В разделе 2.3 представлены основные свойства и простые примеры дискретных систем. Разделы 2.4 и 2.5 посвящены важному классу стационарных ЛС-систем и их представлению во времени с помощью сверточной суммы, а в разделе 2.6 рассматривается класс ЛС-систем, представленных линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. В разделе 2.7 дискретные системы представлены в частотной области через понятие комплексных экспонент как собственных функций, а в разделах 2.8, 2.9 и 2.10 дискретные сигналы рассматриваются с помощью преобразования Фурье как линейные комбинации комплексных экспонент. В разделе 2.11 дано краткое введение к случайным дискретным сигналам.

2.2. Дискретные сигналы

Математически дискретные сигналы представляются последовательностями чисел. Числовая последовательность x , n -й член в которой обозначают через¹ $x[n]$, формально записывается как

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

где n — целое число. На практике такие последовательности возникают, например, при преобразовании аналогового (т. е. непрерывного) сигнала в дискретную форму. В этом случае численное значение n -го члена последовательности равно величине аналогового сигнала $x_a(t)$ в момент времени nT , т. е.

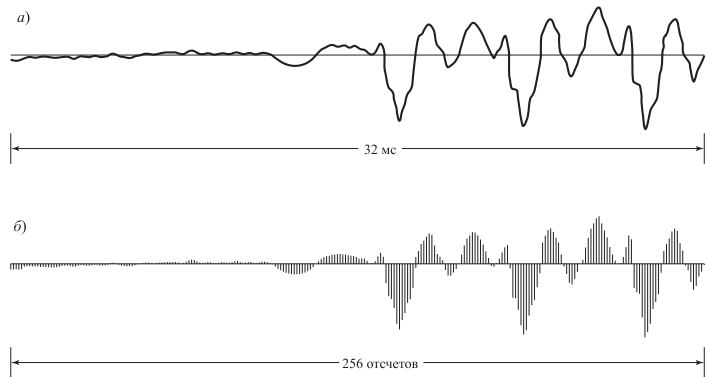
$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.2)$$

Число T называют *шагом дискретизации*, а обратное к нему — *частотой дискретизации*. Хотя последовательность может возникать не только при преобразовании аналоговых сигналов, ее член $x[n]$ удобно называть n -м отсчетом. Кроме того, обозначение последовательности (2.1) довольно громоздко, и мы будем говорить о «последовательности $x[n]$ », подобно выражению «аналоговый сигнал $x_a(t)$ », хотя запись $x[n]$, строго говоря, относится к отдельному члену последовательности. Дискретные сигналы (т. е. последовательности) обычно изображают, как показано на рис. 2.1. Абсцисса графика показана в виде непрерывной прямой, но важно отдавать себе отчет, что величина $x[n]$ определена только при целых значениях аргумента n .

¹Заметим, что мы используем квадратные скобки для обозначения независимой переменной дискретной функции, а аргумент непрерывной функции заключается в круглые скобки.

Неверно думать, что $x[n]$ равно нулю, если n не является целым числом, просто при таких аргументах $x[n]$ не определено.

Рис. 2.1. Графическое представление дискретного сигнала



В качестве примера последовательности, полученной в результате дискретизации, на рис. 2.2, *а* показан фрагмент речевого сигнала, соответствующего вариациям акустического давления, в виде функции времени, а на рис. 2.2, *б* приведена последовательность отсчетов этого сигнала. В то время как исходный речевой сигнал определен в любой момент времени t , последовательность несет информацию об этом сигнале только в определенные моменты времени. Из теоремы о дискретном представлении (Котельникова–Найквиста), обсуждаемой в гл. 4, следует, что исходный сигнал можно восстановить из последовательности отсчетов с любой желаемой степенью точности, если отсчеты были произведены с достаточной частотой.

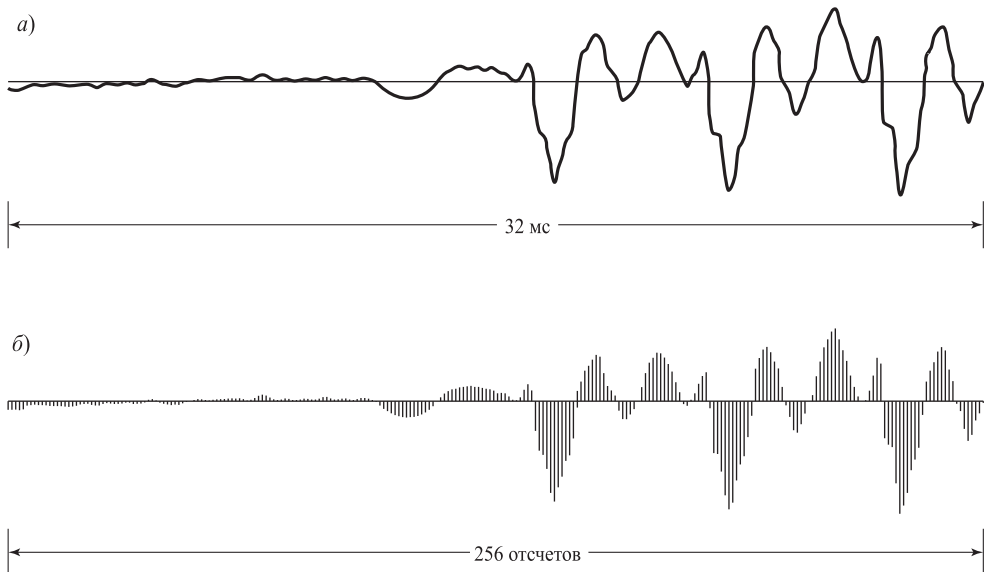


Рис. 2.2. *а*) Фрагмент непрерывного речевого сигнала ($x_a(t)$); *б*) последовательность отсчетов $x[n] = x_a(nT)$, полученная из фрагмента *а*, при шаге $T = 125$ мкс

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем. Они представлены на рис. 2.3 и описываются ниже.

Единичный импульс (рис. 2.3, а) определяется как

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Единичный импульс играет ту же роль в теории дискретных сигналов, что и дельта-функция Дирака в теории непрерывных сигналов. Последовательность с единственным ненулевым отсчетом удобно называть *дискретным импульсом* или просто *импульсом*. Стоит отметить, что дискретный импульс — понятие существенно более простое и понятное, чем дельта-функция.

К одному из важных свойств единичного импульса относится тот факт, что любая последовательность может быть выражена в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов. Например, последовательность $p[n]$ из рис. 2.4 представляется в виде

$$p[n] = a_{-3}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7], \quad (2.4)$$

а для произвольной последовательности справедливо соотношение

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) будет использована для представления дискретных линейных систем.

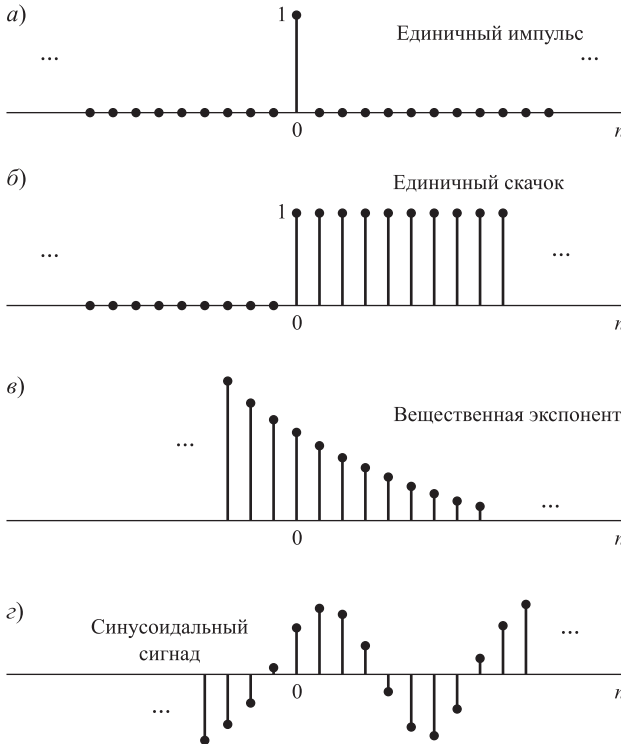


Рис. 2.3. Некоторые стандартные последовательности

Единичный скачок (рис. 2.3, б) определяется формулой

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Единичный скачок выражается через импульс как

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (2.7)$$

т. е. n -й отсчет единичного скачка равен сумме всех членов импульсной последовательности вплоть до n -го. Альтернативное представление единичного скачка в терминах импульса получается в результате суммы сдвинутых импульсов, как в уравнении (2.5). Все ненулевые члены единичного скачка равны 1, поэтому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (2.8)$$

Импульсная последовательность может быть выражена через единичный скачок как разность:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (2.9)$$

Экспоненциальная последовательность наиболее важна при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем. В общем виде такие последовательности записываются как

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (2.10)$$

Если A и α — вещественные числа, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < \alpha < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают с ростом n , как на рис. 2.3, в. Когда $-1 < \alpha < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают. Наконец, при $|\alpha| > 1$ последовательность возрастает по абсолютной величине с ростом n .

Экспоненциальная последовательность $A\alpha^n$ с комплексным α имеет вещественную и мнимую части, являющиеся экспоненциально взвешенными синусоидами. Более точно, если¹ $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ и $A = |A|e^{j\varphi}$, то последовательность $A\alpha^n$ может быть записана одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\varphi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|\alpha| > 1$, или с экспоненциально затухающей огибающей при $|\alpha| < 1$. (В качестве простейшего примера разберите случай $\omega_0 = \pi$.)

Когда $|\alpha| = 1$, последовательность выглядит как

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad (2.12)$$

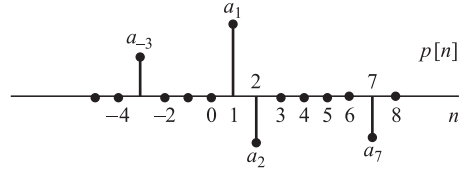


Рис. 2.4. Пример последовательности, представляющей в виде конечной линейной комбинации сдвинутых импульсов

¹Символом j обозначается мнимая единица, т. е. $\sqrt{-1}$. — *Примеч. перев.*