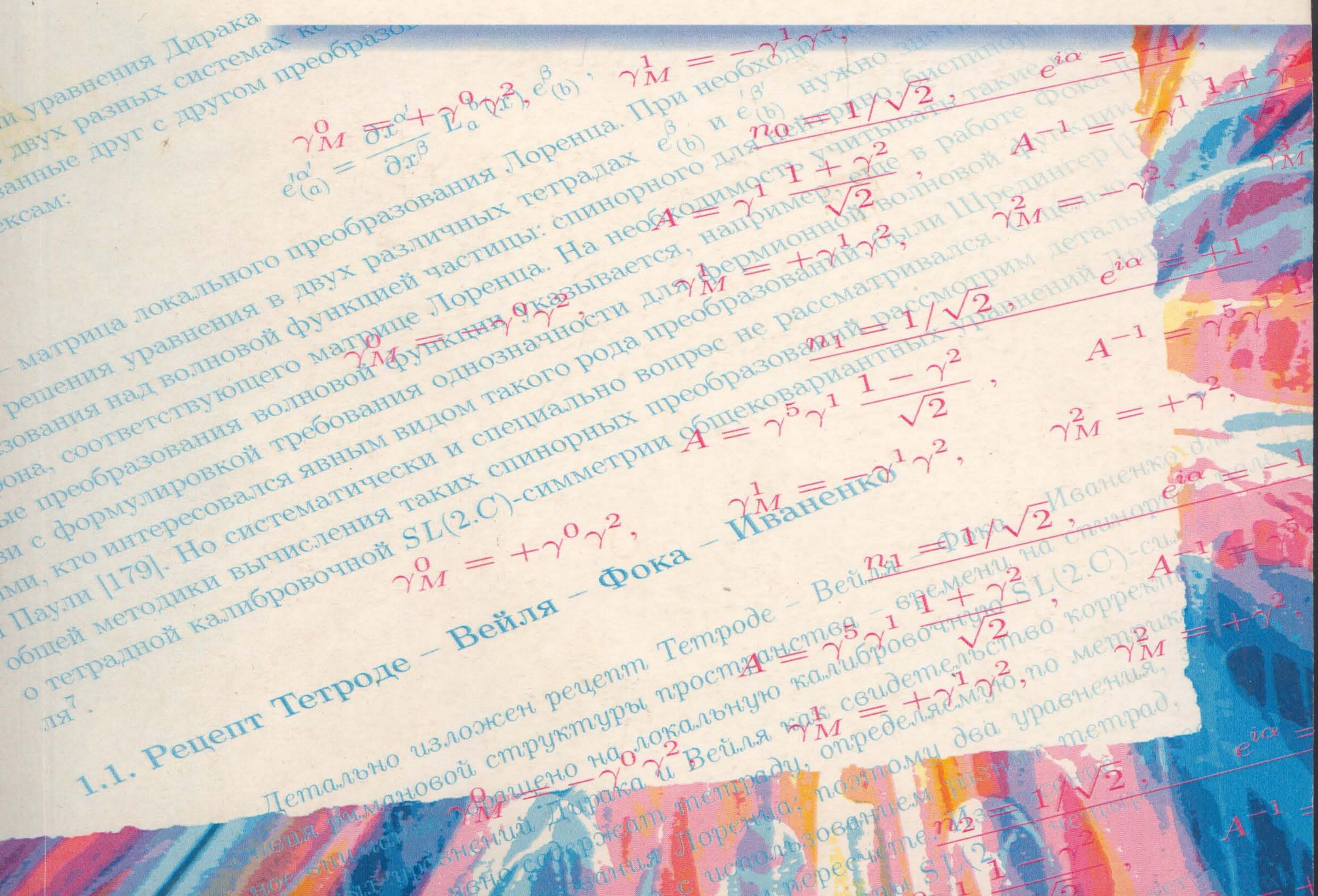
Нацыянальная акадэмія навук Беларусі
1929 80 2009

В. М. Редьков

Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца



НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт физики им. Б. И. Степанова

В. М. РЕДЬКОВ

ПОЛЯ ЧАСТИЦ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ГРУППА ЛОРЕНЦА

Минск
«Белорусская наука»
2009

УДК 539.12:514.764.2

Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 495 с. – ISBN 978-985-08-1003-8.

Исследованы волновые уравнения элементарных частиц в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых как псевдориманова структура пространства – времени. Общековариантные обобщения волновых уравнений, установленных в пространстве Минковского, представлены для бозонов и фермионов в равной степени как результат применения единого универсального тетрадного рецепта Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко, базирующегося на представлениях группы Лоренца. Группа Лоренца играет определяющую и унифицирующую роль для описания полей частиц как в плоском, так и в искривленном пространстве – времени; отличие состоит в том, что в плоском пространстве группа Лоренца играет роль глобальной симметрии для волновых уравнений, в псевдоримановом пространстве – роль зависящей от координат локальной группы симметрии.

Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов-старшекурсников, специализирующихся в области теоретической физики.

Библиогр.: 1220 назв.

Р е ц е н з е н т ы :

доктор физико-математических наук Ю. А. Курочкин,
доктор физико-математических наук, профессор В. А. Плетюхов

ISBN 978-985-08-1003-8

© Редьков В. М., 2009
© Оформление. РУП «Издательский дом «Белорусская наука», 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В отсутствие последовательной квантовой теории гравитации в настоящее время действительно работающей является квантовая теория на фоне псевдориманова пространства – времени (другими словами, классической общей теории относительности). Концентрированное выражение сути и роли такого подхода в физике дает следующее высказывание Хокинга[1]:
"... Несмотря на большой объем проведенной в последние 15 лет работы, ... еще нет вполне удовлетворительной и непротиворечивой квантовой теории гравитации. Классическая общая теория относительности по-прежнему остается наиболее эффективным способом описания гравитации. В классической общей теории относительности мы имеем классическую метрику, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна, правую часть которых мы понимаем как тензор энергии – импульса классических полей материи. Но, хотя и могут быть основания пренебрегать квантовыми гравитационными эффектами ввиду их предполагаемой малости, мы знаем, что квантовая механика играет очень важную роль в определении поведения полей материи. Поэтому встает задача выработать последовательный подход, при котором метрика пространства – времени рассматривалась бы с классических позиций, но была бы связана с полями материи, рассматриваемыми на основе квантовой механики ... Я использую .... приближение, в котором материальные поля, такие как скалярное, электромагнитное или поле нейтрино, подчиняются обычным волновым уравнениям, если в них метрику Минковского заменить классической метрикой пространства – времени g_{ab}".

Целью монографии является разработка некоторых вопросов классической теории поля на фоне риманова пространства – времени. Другими словами, речь идет о полях частиц в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых, в свою очередь, как некоторое заданное искривление пространства – времени. Основные структурообразующие понятия, на базе которых строится конкретное содержание настоящей работы, следующие: поля частиц в искривленном пространстве; унифицирующая роль группы Лоренца; гравитационное поле и локальная группа Лоренца; принципы симметрии и локальной калибровочной инвариантности.

Работа в целом является естественным продолжением многих исследований, проведенных ранее в Институте физики НАН Беларуси. На ее конкретное содержание – выбранные для исследования задачи – существенное влияние оказала прежде всего монография Ф.И. Федорова [2]. Настоящая работа выполнена полностью в рамках идеи об определяющей роли группы Лоренца для описания полей частиц в искривленном пространстве – времени. Далее следует отметить две книги О.С. Иваницкой [3], стимулирующие интерес к исследованию роли локальной группы Лоренца в римановом пространстве – времени.

---

[1] Hawking S.W. Particle creation by black holes // Commun. Math. Phys. 1975. Vol. 43, N. 3. P. 199 – 200; рус. перев. в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 479 – 509.

[2] Федоров Ф.И. Группа Лоренца. М.: Наука, 1979 (для автора вдохновляющей была его вера в огромную унифицирующую роль группы Лоренца в физике, а также его убежденность в полезности детальной разработки новых подходов для уже, казалось бы, исследованных областей)

[3] Иваницкая О.С. Обобщенные преобразования Лоренца и их приложения. Минск: Наука и техника, 1969; Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории гравитации. Минск: Наука и техника, 1976.

Выбор в качестве главного объекта исследования классической теории поля в римановом пространстве – результат влияния книги А.А. Богуша и Л.Г. Мороза[4]. В значительной степени книгой А.А. Богуша[5] был определен интерес к калибровочной инвариантности и роли симметрии; в связи с этим настоящая работа строится целиком в рамках принципа локальной калибровочной инвариантности, при этом тетрадам отводится роль основного инструмента, через который реализуется динамический принцип, позволяющий ввести взаимодействие полей частиц с внешними гравитационным полем.

Возможно первым систематическим исследованием специфической роли симметрии в физике вообще была работа Кюри (1984 г.) [1]. Интересна история возникновения понятия спинора. Уже (1900 г.) Дарбу [4] описывал свойства инвариантности комплексной сферы нулевой длины, т.е. в современной терминологии спиноры.

В поисках непротиворечивого осмысления свойств уравнений Максвелла для электромагнитного поля в исследованиях Лоренца [2], Пуанкаре [5] и Эйнштейна [6] (и многих других) была создана специальная теория относительности. Сразу же была проведена большая работа по осмыслению свойств релятивистской инвариантности и вообще принципов симметрии в физике – в основном тогда речь шла об электромагнитном поле (Планк [7], Лауэ [11, 20], Зильберштейн [9], Минковский [10], Абрахам [12], Левис [13, 18], Бейтмен [14], Кунингхэм [15], Зоммерфельд [16], Клейн [17], Варисак [19], Алькемаде [21], Марколонго [22]).

В математику в 1913 г. Картаном [23] в явном виде введены спиноры. Очень важными были исследования Гильберта по уравнениям для гравитационного поля [8]. Систематическое и глубокое изучение математических аспектов уравнений Максвелла было выполнено Ланцошем [27] в 1919 г. (см. также работу Райнича [41] 1925 г.). Отметим также работу Гордона [35] и работы Тамма, Мандельштама [36], в которых была открыта возможность моделирования материальных уравнений в теории Максвелла использованием неевклидовой геометрии пространства – времени.

Заметную роль в распространении идей теории относительности сыграла работа Паули [31]. Появились революционнын работы де Бройля о волновых свойствах электронов [32]. Огромную роль в проникновении в физику теории групп сыграли исследования Вейля [37].

В 1926 г. Шредингер [43] выводит свое знаменитое уравнение. Интересно, что, стремясь получить формулу для спектра энергий, согласующуюся с экспериментальными данными, он сознательно отбросил полученное им релятивистское уравнение, которое в этом же году было переоткрыто в работах Клейна [45], Фока [46], Гордона [47], Кудара [48]. Вопрос о правильной форме волнового уравнения исследовался также в работе Иваненко, Ландау [49] и Маделунга [51]. Истории открытия уравнения Шредингера специально посвящена работа Караза, Гидети [773].

С 1924–1927 гг. начинается выработка понятия спина (Уленбек, Гаудсмит [39], Томас [44], Френкель [50], Паули [40, 52]).

В 1927 г. Дирак открыл [42] релятивистское уравнение для частицы со спином 1/2; об истории вопроса см. Мойер [777, 778], Краг [789]. Это уравнение сразу же вызвало огромный интерес, и его основные свойства были изучены очень детально (Дарвин [53], Эдингтон [56], Мёглих [57], Нейман [61], Иваненко, Ландау [58]). Большую роль в распространении идей специальной и общей теории относительности в СССР сыграли работы Фредерикса [38].

В 1928–1929 гг. в работах Тетроде [59], Вейля [63–65], Фока, Иваненко [66–70, 77] волновое уравнение для частицы со спином было обобщено на случай риманова пространства – времени, описывающего внешнее гравитационное поле в соответствии с общей теорией относительности. При этом Вейль с самого начала рассматривает общековариантный случай P-неинвариантного

[4]А.А. Богуш, Л.Г. Мороз Введение в теорию классических полей. Минск: Наука и техника, 1968.

[5]Богуш А.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981.

2-компонентного уравнения (см. работы по истории вопроса: Владимировой [890] и Шольца [1149]).

Не следует думать, что ситуация с правильностью выбора основных уравнений сразу же стала всем понятной и не требующей дополнительного анализа. Дело обстояло как раз наоборот. Начался золотой век для теоретиков, и появляется огромное число работ, в которых добавляются все новые штрихи к уже известному, исследуются альтернативные возможности, развивается спинорный анализ по подобию векторного, устанавливаются детальные соотношения между тензорами и спинорами, систематически исследуются вопросы теории группы Лоренца, изучаются связи между теориями Максвелла и Дирака (Ланцош [71, 72], Маделунг [73], ван дер Верден [74], Схоутен [75, 94, 117], Хичкок [76], Прока [79, 80, 97, 147, 148], Жюве [81, 102, 139], Иваненко, Никольский [82], Розен [84], Сохон [85], МакВитти [86], Лапорт, Уленбек [88, 88], Брейт [90], де Бройль [105], Майорана [99]).

Роль теории групп в квантовой механики была осознана полностью: в 1931 г. появились книги Вигнера [91] и Вейля [95, 96]. В 1932 г. вышла работа Вигнера об операции обращения времени в квантовой механике [100], которая включала в себя комплексное сопряжение. Важную роль сыграли работы Шредингера [103, 104] и Баргмана [106] по исследованию общих свойств уравнения Дирака при наличии внешних гравитационных полей.

Важную роль с долгой последующей историей вопроса сыграли работы Эйнштейна, Майера [107, 115, 116, 128]. Они предложили новую математическую трактовку теории группы Лоренца и ее простейших представлений, существенным элементом которой являлось представление 4-мерной матрицы Лоренца в виде произведения двух коммутирующих между собой элементов; развили понятие полувекторов как простейших представлений группы Лоренца; впоследствии оказалось, что эти 4-мерные объекты эквивалентны 2-компонентным спинорам.

На протяжении длительного периода можно отметить устойчивый интерес к спинорным объектам. Почти каждый из известных теоретиков оставил свой вклад в анализ спиноров, группы Лоренца и уравнения Дирака (Паули [108, 109, 142], Ми [113], Веблен [114], Схоутен [117], Инфельд, ван дер Верден [129], Гус [119, 120], Баргман [121], Фарри, Опенгеймер [122], Тауб, Веблен, Нейман [123, 130], Инфельд [129], Ульмо [131], Мерсье [134], Дирак [135, 143, 144], Блатон [136], Брауер, Вейль [137], Жюве [139], Шререр [140], Йехле [141], Хальперн, Хеллер [138], Ямамото [145, 171, 191], Прока [147, 148, 167], Зоммерфельд [151], Румер [152], Руз [149], Саката, Юкава [160], Бенедиктус [169], Хилл [163]).

Формируется представление о волновом уравнении для отдельного фотона и массивной векторной частицы (де Бройль, Винтер [124–127, 182, 183], Петьё [146], Иватзуки, Мимура, Моринага [161, 170], Даффин [168], Баба [187], Белинфанте [188, 189, 198], Тауб [185, 186], Саката, Такенати [197], Тоннела [208], Эриксон [214], Шредингер [196, 215, 216], Гайтлер [222, 232], Кеммер [184], Гофман [234], Бруно [237], Утияма [241]).

В 1937 г. появляется работа Майораны [153] о возможных электрически нейтральных частицах со спином 1/2. Сюда же примыкают исследования Дирака [154], Рака [155], Крамерса [156], Фари [175], де Бройля [192]. Стала понятна особая роль комплексных переменных в квантовой теории и особая роль операции комплексного сопряжения. Эти вопросы неоднократно будут обсуждаться и исследоваться впоследствии другими авторами (см. работы Гельмана [252], и Зайцева [340] о вещественных спинорах в ОТО).

Заметный след оставили работы Конвея [157], Бриллюэна [162], Хилла, Ландшофа [163], Уитеккера [158], Тауба [185, 186], Вигнера [190], Паули, Белинфанте [193], Шредингра [196]. Классическим для физиков стал обзор Картана по теории спиноров Картана [164].

В 1939 г. появилась работа Паули о двузначных и однозначных волновых функциях в квантовой механике [179], в 1940 г. – работа Паули [199] о конформной инвариантности уравнения безмассовой частицы со спином1/2, продолжившей исследование конформной инвариантности уравнений Максвелла, установленной Кунингхэмом [15] и Бейтманом [14].

В 1938 – 1939 гг. опубликованы работы Фирца, Паули [178, 180, 181] о волновых уравнениях для частиц с высшими спинами – они породили целое направление новых исследований, продолжающееся и поныне. Укажем наиболее заметные из них до 1950 г.: де Бройль [182, 183, 192, 204, 223], Паули, Белинфанте [193], Вигнер [190], Белинфанте [198], Фирц [200], Мерсье [206], Рарита, Швингер [207], Паули [210], Гинзбург [211], Любански, Розенфельд [213], Давыдов [217], Гирзбург, Смородинский [220, 221], Гардинг [225], Баба [187, 226, 248], Прока [228, 235], Хариш-Чандра [229–231], Вилд [236], Тамм, Давыдов, Гинзбуг [238, 239], Баргман, Вигнер [240, 243], Гельфанд, Яглом [246], Схоутен [247, 251], Фрадкин [256].

Мы упомянули работы, появившиеся в основном до 1950 г. Казалось бы, поток публикаций по данной тематике давно должен был прекратиться. Однако этого не происходит, и работы продолжают появляться вплоть до настоящего времени. Удивительно, но авторы находят все новые факты и акценты в этой области, обнаруживают новые точки развития. Медленно и неуклонно, не прекращаясь ни на один год, накопление фактов и развитие теории продолжаются.

Очень трудно, не вникая в детали, объяснить, что собственно происходило на каждом этапе – детальное описание истории вопроса все еще ждет своего исследования, и это сложная задача. Безусловно, многие вещи неоднократно повторялись и переоткрывались, даже если исследователи иногда и не осознавали этого, что в полной мере относится и к данной работе. Как правило, все авторы без воодушевления встречают утверждение – *это уже было*, поэтому ниже не будет даже попытки расставлять окончательные акценты. Вообще, складывается впечатление, что иногда незнание или сознательное игнорирование уже сделанного оказывается полезным, поскольку при этом вырабатывают новые пути анализа уже, казалось бы, изученных явлений.

Продолжим краткий обзор библиографии. Отмечается устойчивый интерес к различным общим вопросам релятивистской теории поля и, в частности, к роли дискретной симметрии в теории элементарных частиц, чему свидетельствует очень большой список авторов (Вигнер [253, 365], МакДафи [254], Мерсье [255], Фок [259], Вейль [261], Фолди, Воутхазен [262, 280], Гупта [263, 303], Блейер [264], Гюрши [265, 266, 332–335, 356, 357, 384], Лекутэ [267], Шремп [268, 281], Иваненко, Соколов [272], де Бройль [273, 274], Федоров [275, 367], Широков [276], Хеллер, Бергман [277], Схоутен [278], Брулин, Хйялмарс [282], Риз [290, 364], Бэйд, Йехле [291], Корсон [292], Фудживара [293, 316], Румер [294], Боргардт [295, 350, 351, 386], Уено [296], Икеда [297], Инграхэм [298], Прока [299, 313, 314, 338], Хаталкар [300], Людерс [306], Умедзава, Камефучи, Танака [307, 341], Новаку [310], Финкельштейн [315], Шредингер [317], Лишнеровиц [309], Кэйз [318–320], Файнберг [321], Петраш [322, 323], Ватанабе [324, 325], Паули [327], Рашевский [328], Гуд [312, 380], Форманек [329], Фам [330, 352], Якоби, Лошак [337], Прока [338], Молдауер [339], Зайцев [340], Такабаяши [347], Гинзбург [348], Секерес [354], Улегла [358], Редже [359], Фрадкин [360], Клаудер, Уиллер [361], Брилл, Уиллер [362], Бергман [363], Куосьен [375], Мозес [385, 411], Ломонт [387], Дуань И-ши [388], Фешбах, Велларс [389], Фешбах, Николс [390], Флетчер [391], Бухдал [393, 399]).

В 1950 г. Янг, Тиомно [269], а также Жарков [270] анализируют способы описания различия фермионов по внутренним четностям и возможные физические проявления этих различий. Эти работы продолжили Вик, Вигнер, Вайтман [283], Шапиро [285, 305], Людерс [306], Ли, Янг [366, 366], Гольфанд [344], Ландау [369], Лее, Оехмо, Янг [368], Виноградски [349, 374, 396–398], Йост [370], Соколик [371], Кейз [372], Хейне [373], Шремп [377, 408], Широков [379, 421], Файнберг, Вайнберг [403], Ли, Вик [519], Голдберг [551], Ебнер [715], Хартунг [758], Кокеро [859], Альтман [868, 881], Будинич, Траутман [908], Шарма [914], Силагадзе [936], Ердем [1022], Варламов [1060, 1140, 1141], Бухбиндер и др. [1088], Ербер [1148], Соколовский и др. [1147, 1169], Траутман [1174]. Вопрос о классификации фермионов по внутренним четностям не нашел своего окончательного решения и поныне.

Практически в одно и то же время появились работы, специально анализирующие свойства группы Лоренца в контексте теории релятивистских полей: Наймарк [308], Гельфанд, Минлос, Шапиро [342], Паули [327], Йост [370], Широков [379], Наймарк [394], Федоров [395], Гравертс, Людерс, Рольник [402], Халбваш, Хилион, Вижье [404–407], Лошак [414], Вайтман [417], Йост [418], ван дер Верден [419], Вигнер [420], Курсуноглу [429], Макфарлайн [447, 516], Федоров, Богуш и др. [437–440, 446, 450, 451, 529, 572, 573, 613–615, 635, 636, 681, 749].

В определенном смысле достижения наибольшей унификации методов работы удалось достичь в трактовке теории группы Лоренца в книге Федорова [749]. Автором дано замкнутое построение теории группы Лоренца, берущее начало из подхода Гиббса к теории трехмерной группы вращения. Данная трактовка теории группы Лоренца стоит как бы в стороне от методов работы, используемых другими авторами, хотя нужно специально обратить внимание, что эта трактовка является не чем иным, как детализацией и развитием подхода Эйнштейна и Майера в их работах о полувекторах (1932 – 1934 гг.). Произвольное преобразование Лоренца с самого начала конструируется как произведение двух взаимно коммутирующих 4-мерных матриц, каждая из которых строится как линейная функция от некоторого 3-мерного комплексного параметра. Затем показывается, что строящиеся таким специальным образом матрицы являются ни чем иным, как собственными ортохронными преобразованиями Лоренца.

Примерно после 1960 г. появляется огромное число публикаций, развивающих спинорный подход в общей теории относительности. Это было почти глобальное обращение к спинорам в физике вообще. Нужно заметить, что, конечно, спиноры полностью никогда и "не забывались", но это возвращение к ним в столь больших масштабах и в разных аспектах – *фермион в условиях невклидовой геометрии, классификация пространств, спиноры в классической физике, спиноры при описании бозонных полей, уравнения Эйнштейна – тетрады и спиноры, спиноры и комплексификация физики* – представляется поразительным. Приведенная в конце книги библиография работ, относящихся к этим направлениям исследований, ни в коем случае не является полной: по-видимому, многие работы оказались не включенными. В этом не было злого умысла автора – только ограниченность его возможностей. Дальше мы будем упоминать о многих отдельных авторах, когда очевидны и понятны связи с рассматриваемыми ниже вопросами[6].

Автор считает своим долгом выразить благодарность уже ушедшим из жизни людям – Ф.И. Федорову и О.С. Иваницкой за их влияние на автора в научном и человеческом отношении. Особую благодарность выражает соавторам по публикациям: А.А. Богушу, В.С. Отчику, А.Г. Скорморохову, В.В. Киселю, Н.Г. Токаревской, а также Л.М. Томильчику, Ю.А. Курочкину, Е.А. Толкачеву, Л.Ф. Бабичеву, В.В. Гилевскому, С.Ю. Саковичу, Г.Г.Крылову за моральную поддержку, советы и критику.

[6] Во избежание недоразумений заметим, что вообще вся приведенная библиография представляет собой список работ, непосредственно связанных с обсуждаемыми ниже вопросами, и одновременно это список работ для дополнительного чтения. По-видимому, не имело смысла разбивать одно целое на две части. Обширная библиография – это, с одной стороны, попытка удержать постепенно ускользающее прошлое. С другой стороны, эта библиография делает очевидным, что многие нынешние достижения – это всего лишь скромные дополнительные надстройки над огромным зданием из прошлого.

Глава 1 УРАВНЕНИЯ ДИРАКА И ВЕЙЛЯ, МЕТОД СПИНОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

При рассмотрении уравнения Дирака или двухкомпонентного уравнения Вейля в римановом пространстве в двух разных системах координат используются, как правило, две различные тетрады, связанные друг с другом преобразованием не только по координатному, но и по тетрадному индексам:

$$e'^{\alpha'}_{(a)} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \, L_a{}^b(x) \, e^{\beta}_{(b)} \, ,$$

где $L_a{}^b(x)$ – матрица локального преобразования Лоренца. При необходимости соотнести друг с другом решения уравнения в двух различных тетрадах $e^{\beta}_{(b)}$ и $e'^{\beta'}_{(b)}$ нужно знать явный вид преобразования над волновой функцией частицы: спинорного для нейтрино, биспинорного для электрона, соответствующего матрице Лоренца. На необходимость учитывать такие калибровочные преобразования волновой функции указывается, например, еще в работе Фока [68] в связи с формулировкой требования однозначности для фермионной волновой функции. Первыми, кто интересовался явным видом такого рода преобразований, были Шредингер [104, 165] и Паули [179]. Но систематически и специально вопрос не рассматривался. С целью развития общей методики вычисления таких спинорных преобразований рассмотрим детальнее вопрос о тетрадной калибровочной $SL(2.C)$-симметрии общековариантных уравнений Дирака и Вейля[7].

1.1. Рецепт Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко

Детально изложен рецепт Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко для учета воздействия римановой структуры пространства – времени на спинорное поле [887]. Основное внимание обращено на локальную калибровочную $SL(2.C)$-симметрию общековариантных уравнений Дирака и Вейля как свидетельство корректности этих уравнений. Уравнения явно содержат тетраду, определяемую по метрике $g_{\alpha\beta}$ с точностью до локального преобразования Лоренца; поэтому два уравнения, записанные в метрике $g_{\alpha\beta}$ по одному рецепту, но с использованием разных тетрад, должны переходить друг в друга при соответствующем пересчете. Изложение существенно основывается на использовании параметризации группы $SL(2.C)$ четырехмерным комплексным вектором k_a – точкой на комплексной сфере.

[7]Заметим, что помимо аспекта "соотнесения решений в разных тетрадах" есть и другие основания к исследованию этих спинорных преобразований; так, анализ этих преобразований позволяет сформулировать определенный математический подход к исследованию так называемой спинорной структуры пространства – времени [929–931, 971, 987, 1046, 1151, 1209].

Исходное уравнение Дирака в плоском пространстве

$$(i\gamma^a \, \partial_a - m) \; \Psi(x) = 0 \tag{1.1.1}$$

при наличии внешнего гравитационного поля записывается в виде

$$[\, i\gamma^\alpha(x) \, (\, \partial_\alpha \; + \; \Gamma_\alpha(x) \,) \; - \; m \,] \; \Psi(x) = 0 \; , \tag{1.1.2}$$

где

$$\gamma^\alpha(x) = \gamma^a \; e^\alpha_{(a)}(x) \; , \qquad e^\alpha_{(a)}(x) \quad - \; \text{тетрада} \; ,$$

$$\Gamma_\alpha(x) = \frac{1}{2} \, \sigma^{ab} \; e^\beta_{(a)} \; \nabla_\alpha \; (\; e^\alpha_{(b);\beta} \;) \quad - \quad \text{спинорная связность} \; ;$$

∇_α и $;\alpha$ – символы общековариантной производной. В спинорном базисе [632]

$$\psi(x) = \left| \begin{array}{c} \xi(x) \\ \eta(x) \end{array} \right| \; , \qquad \xi(x) = \left| \begin{array}{c} \xi^1 \\ \xi^2 \end{array} \right| \; , \qquad \eta(x) = \left| \begin{array}{c} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{array} \right| \; , \; \gamma^a = \left| \begin{array}{cc} 0 & \bar{\sigma}^a \\ \sigma^a & 0 \end{array} \right| \; ,$$

где $\sigma^a = (I, \; +\sigma^k) \; , \; \bar{\sigma}^a = (I, \; -\sigma^k)$ – матрицы Паули, имеем два уравнения

$$i \; \sigma^\alpha(x) \; [\; \partial_\alpha \; + \; \Sigma_\alpha(x) \;] \; \xi(x) = \; m \; \eta(x) \; ,$$

$$i \; \bar{\sigma}^\alpha(x) \; [\; \partial_\alpha \; + \; \bar{\Sigma}_\alpha(x) \;] \; \eta(x) = \; m \; \xi(x) \; . \tag{1.1.3}$$

Из (1.1.3b), полагая $m = 0$, получаем уравнения Вейля [63–65] для двухкомпонентных волновых функций нейтрино $\eta(x)$ и антинейтрино $\xi(x)$. В (1.1.3) использованы обозначения:

$$\sigma^\alpha(x) = \sigma^a \; e^\alpha_{(a)}(x) \; , \qquad \bar{\sigma}^\alpha(x) = \bar{\sigma}^a \; e^\alpha_{(a)}(x) \; ,$$

$$\Sigma_\alpha(x) = \frac{1}{2} \; \Sigma^{ab} \; e^\beta_{(a)} \; \nabla_\alpha(e_{(b)\beta}) \; , \qquad \bar{\Sigma}_\alpha(x) = \frac{1}{2} \; \bar{\Sigma}^{ab} \; e^\beta_{(x)} \; \nabla_\alpha(e_{(b)\beta}) \; ,$$

$$\Sigma^a = \frac{1}{4} \; (\; \bar{\sigma}^a \; \sigma^b \; - \; \bar{\sigma}^b \; \sigma^a \;) \; , \qquad \bar{\Sigma}^a = \frac{1}{4} \; (\; \sigma^a \; \bar{\sigma}^b \; - \; \sigma^b \; \bar{\sigma}^a \;) \; , \tag{1.1.4}$$

где $\Sigma_\alpha(x)$ и $\bar{\Sigma}_\alpha(x)$ – известные связности Инфельда – ван дер Вердена [118].

Обратимся к исследованию свойств симметрии уравнений (1.1.3). Для этого совершим над волновой функцией $\Psi(x) = (\xi(x), \; \eta(x))$ локальное (зависящее от координат x^α) спинорное преобразование:

$$\xi'(x) = B(k(x)) \; \xi(x) \; , \qquad \eta'(x) = B^+(\bar{k}(x)) \; \eta(x) \; . \tag{1.1.5}$$

Здесь (k) – матрица из группы $SL(2.C)$. Будем использовать параметризацию этой группы с помощью 4-мерного комплексного вектора с дополнительным условием (такая параметризация использовалась, например, Вайтманом [417], Макфарлайном [447] и многими другими авторами):

$$B(k) = \; \sigma^a \; k_a \; , \qquad \det B = k_0^2 \; - \; k_j^2 = +1 \; ,$$

$$B^+(k) = B(k^*) \; , \qquad B^{-1}(k) = B(\bar{k}) \; , \qquad \bar{k} = (k_0, \; -k_j) \; .$$

После подстановки в уравнения (1.1.3) функций $\xi'(x)$ и $\eta'(x)$ получаем

$$i \; B(k) \; \sigma^\alpha \; B(k) \; \left[\; \partial_\alpha \; + \; B(k) \; \Sigma_\alpha \; B(\bar{k}) \; + \; B(k) \; \partial_\alpha B(\bar{k}) \; \right] \; \xi'(x) \; = \; m \; \eta'(x) \; ,$$

$$i \; B(k) \; \bar{\sigma}^\alpha \; B(k^*) \; \left[\; \partial_\alpha \; + \; B(\bar{k}^*) \; \bar{\Sigma}_\alpha \; B(k)^* \; + \; B(\bar{k}^*) \; \partial_\alpha \; B(k^*) \; \right] \; \eta'(x) = \; m \; \xi'(x) \; .$$

Если теперь воспользоваться соотношениями

$$B(\bar{k}^*(x))\ \sigma^a\ B(\bar{k}(x))\ = \sigma^b\ L_b{}^a(x)\ ,$$

$$B(k(x))\ \bar{\sigma}^a\ B(k^*(x)) = \bar{\sigma}^b\ L_b{}^a(x)\ , \qquad (1.1.6)$$

где $L_b{}^a(x)$ – 4-мерная матрица, определяемая равенствами

$$L_b{}^a(x) = \frac{1}{2}\ \text{Sp}\ [\ \bar{\sigma}_b\ B(\bar{k})\ \sigma^a\ B(\bar{k})\ ] =$$

$$\frac{1}{2}\ \text{Sp}\ [\ \sigma_b\ B(k(x))\bar{\sigma}^a\ B(k^*(x))\ ] = L_b{}^a(k(x),\ k^*(x))\ , \qquad (1.1.7)$$

то приходим к уравнениям

$$i\ \sigma'^{\alpha}(x)\ [\ \partial_\alpha\ +\ \Sigma'_\alpha(x)\ +\ \Delta_\alpha(x)\ ]\ \xi'(x)\ =\ m\ \eta'(x)\ ,$$

$$i\ \bar{\sigma}'^{\alpha}(x)\ [\ \partial_\alpha\ +\ \bar{\Sigma}'_\alpha(x)\ +\ \bar{\Delta}_\alpha(x)\ \ \eta'(x)\ =\ m\ \xi'(x)\ . \qquad (1.1.8)$$

Здесь штрихованные матрицы ($\sigma'^{\alpha},\ \bar{\sigma}'^{\alpha},\ \Sigma'_\alpha\ ,\ \bar{\Sigma}'_\alpha$) построены по тому же самому правилу, что и матрицы ($\sigma^\alpha,\ \bar{\sigma}^\alpha,\ \Sigma_\alpha,\ \bar{\Sigma}_\alpha$), но с использованием штрихованной тетрады $e'^{\alpha}_{(a)}(x)$, связанной с исходной преобразованием Лоренца:

$$e'^{\alpha}_{(b)}(x) = L_b{}^a(k(x),\ k^*(x))\ e^{\alpha}_{(a)}(x)\ .$$

Используя известные формулы для следов от произведений матриц Паули [825]

$$\text{Sp}\ (\bar{\sigma}_k\sigma_l\bar{\sigma}_a\sigma_b) = 2\ (\ g_{kl}g_{ab} - g_{ka}g_{lb} + g_{kb}\ g_{la} - i\epsilon_{klab}\ )\ ,$$

$$\text{Sp}\ (\sigma_k\bar{\sigma}_l\sigma_a\bar{\sigma}_b) = 2\ (\ g_{kl}g_{ab} - g_{ka}g_{lb} + g_{kb}g_{la} + i\epsilon_{klab}\ )\ ,$$

для матрицы L из (1.1.7) можно получить выражение

$$L_b{}^a(k,\ k^*) = \bar{\delta}^c_b\ [\ -\delta^a_c\ k^n\ k^*_n\ +\ k_c\ k^{a*}\ +\ k^*_c\ k^a\ +\ i\ \epsilon_c{}^{anm}\ k_n\ k^*_m\ ]\ , \qquad (1.1.9a)$$

где $\bar{\delta}^c_b$ – специальный (отличающийся от обычного) символ Кронекера:

$$\bar{\delta}^c_b = \begin{cases} 0, & \text{если}\ c \neq b\ ; \\ +1, & \text{если}\ c = b = 0\ ; \\ -1, & \text{если}\ c = b = 1,\ 2,\ 3\ . \end{cases}$$

Остановимся на матрице L детальнее. Прежде всего убедимся, что она обладает свойством псевдоортогональности:

$$L_a{}^b(k,\ k^*) = g^{bc}\ L_c{}^d(\bar{k},\ \bar{k}^*)\ g_{da}\ . \qquad (1.1.9b)$$

Это равенство можно переписать в виде (действует правило $\bar{g}^{bc} = g^{ba}\bar{\delta}^c_a$)

$$\bar{\delta}^c_a\ (\ -\delta^b_c\ k^n\ k^*_n\ +\ k_c\ k^{b*}\ +\ k^*_c\ k^b\ +\ i\ \epsilon_c{}^{bnm}\ k_n\ k^*_m\ ) =$$

$$\bar{g}^{bc}\ \left(\ -\delta^d_c\ \bar{k}^n\ \bar{k}^*_n\ +\ \bar{k}_c\ \bar{k}^{d*}\ +\ \bar{k}^*_c\ \bar{k}^d\ +\ i\epsilon_c{}^{dnm}\ \bar{k}_n\ \bar{k}^*_m\ \right)\ g_{da}\ ,$$

отсюда приходим к

$$(\ \bar{\delta}^c_a\ \epsilon_c{}^{bnm}\ )\ k_n\ k^*_m = (\ \bar{g}^{bc}\ \epsilon_c{}^{dnm}\ g_{da}\ )\ \bar{k}_n\ \bar{k}^*_m\ .$$

Не представляет труда убедиться, перебрав все значения для a и b, что это верное равенство.

Таким образом, свойство псевдоортогональности матрицы $L(k,\ k^*)$ доказано; следовательно, L – это матрица преобразования Лоренца. Покажем, что L – это ортохронное преобразование, т.е. ${L_0}^0(k,\ k^*) \geq +1$. Для ${L_0}^0$ имеем выражение

$$ {L_0}^0 = (\ -k^n\ k_n^* \ +\ 2\ k_0\ k_0^*\ ) = (\ k_0\ k_o^* \ +\ k_j\ k_j^*\ )\ , $$

откуда, воспользовавшись неравенством

$$ (\ |\ Z_0\ |\ +\ |\ Z_2\ |\ +\ |\ Z_2\ |\ +\ |\ Z_3\ |\ )\ \geq |\ Z_0\ +\ Z_1\ +\ Z_2\ +\ Z_3\ | $$

при

$$ Z_0 = k_0\ k_0, \qquad Z_1 = -k_1\ k_1, \qquad Z_2 = -k_2\ k_2, \qquad Z_3 = -k_4\ k_4 $$

и условием единичности детерминанта матрицы $B(k)$, получаем

$$ {L_0}^0\ \geq |\ k_0\ k_0\ - k_j\ k_j\ | = +1\ . $$

На доказательстве соотношения

$$ \det L(k,\ k^*) = (k_0\ k_0\ - k_j\ k_j)^2\ (k_0^*\ k_0^*\ - k_j^*\ k_j^*)^2 = +1 \tag{1.1.9c} $$

не будем здесь останавливаться – это простая, но громоздкая задача, и ее решение дано в Приложении.

Введенные выше (см. (1.1.8)) величины $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ равны

$$ \Delta_\alpha(x) =\ B(k)\ \partial_\alpha\ B(\bar{k})\ -\ \frac{1}{2}\ \Sigma^{nm}\ {L_n}^a\ g_{ab}\ \partial_\alpha\ {L_m}^b\ , $$

$$ \bar{\Delta}_\alpha(x) =\ B(\bar{k}^*)\ \partial_\alpha\ B(k^*)\ -\ \frac{1}{2}\ \bar{\Sigma}^{nm}\ {L_n}^a\ g_{ab}\ \partial_\alpha\ {L_m}^b\ . $$

Покажем, что эти величины $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ обращаются тождественно в ноль. Для этого, воспользовавшись (1.1.6), преобразуем выражения для $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ к виду

$$ \Delta_\alpha(x) = -\frac{1}{4}\ B(k)\ [\ \bar{\sigma}^b\ B(k^*)\partial_\alpha B(\bar{k}^*)\ \sigma_b\ ]\ B(\bar{k})\ , $$

$$ \bar{\Delta}_\alpha(x) = -\frac{1}{4}\ B(\bar{k}^*)\ [\ \sigma^b\ B(\bar{k})\partial_\alpha B(k)\ \bar{\sigma}_b\ ]\ B(k^*)\ . $$

Учитывая теперь формулы

$$ B(k^*)\ \partial_\alpha\ B(\bar{k}^*) = -\ \vec{\sigma}\ \{(k_0^*\ \partial_\alpha\ \vec{k}^{\,*}\ -\ \vec{k}^{\,*}\ \partial_\alpha\ k_0^*)\ +\ i\ [\ \vec{k}^{\,*}\ \partial_\alpha\ \vec{k}^{\,*}\ ]\ \}\ , $$

$$ B(\bar{k})\ \partial_\alpha\ B(k) = -\ \vec{\sigma}\ \{(k_0\ \partial_\alpha\ \vec{k}\ -\ \vec{k}\ \partial_\alpha\ k_0)\ +\ i\ [\ \vec{k}\ \partial_\alpha\ \vec{k}\ ]\ \} $$

и тождества

$$ \bar{\sigma}^a\ \vec{\sigma}\ \sigma_a \equiv 0\ , \qquad \sigma^a\ \vec{\sigma}\ \bar{\sigma}_a \equiv 0\ , $$

убеждаемся, что $\Delta_\alpha(x)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(x)$ равны нулю. Таким образом, уравнения для функций $\xi'(x)$ и $\eta'(x)$ могут быть представлены в виде

$$ i{\sigma'}^\alpha(x)\ \ (\ \partial/\partial x^\alpha\ +\ \Sigma'_\alpha(x)\ )\ \ \xi'(x) = m\ \eta'(x)\ , $$

$$ i\ {\bar{\sigma}'}^\alpha(x)\ (\ \partial/\partial x^\alpha\ +\ \bar{\Sigma}'_\alpha(x)\ )\ \eta'(x) = m\ \xi'(x) \tag{1.1.10} $$

(сравните с уравнениями (1.1.3)).

Это означает, что уравнение для электрона (или двухкомпонентного нейтрино) во внешнем гравитационном поле обладает свойством калибровочной инвариантности относительно локальной группы $SL(2.C)$. Данное свойство уравнения является свидетельством его корректности. Действительно, при заданной метрике пространства – времени $g_{\alpha\beta}(x)$ тетрада $e^{\beta}_{(a)}(x)$ фиксируется лишь с точностью до локального преобразования Лоренца $L_a{}^b(x)$ и поскольку в уравнении (1.1.3) явно присутствует тетрада, то необходимо, чтобы два уравнения, записанные в одном пространстве по одному рецепту (Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко), но с использованием разных тетрад, переходили друг в друга в результате соответствующего пересчета. Добавим, что корректность уравнений (1.1.3) относительно требований общей ковариантности обеспечивается только в том случае, если волновую функцию $\psi(x) = (\xi(x), \eta(x))$ считать скаляром относительно общекоординатных преобразований: $\psi'(x') = \psi(x)$.

Из изложенного выше анализа непосредственно следует рецепт для вычисления локального калибровочного преобразования над волновой функцией фермиона: задача сводится к нахождению по явному виду матрицы Лоренца $L_a{}^b(x)$ отвечающего ей локального параметра $k_a(x)$. Если $e^{\alpha}_{(a)}(x)$ и $e'^{\beta'}_{(b)}(x')$ – две тетрады (выбранные, как правило, в различных системах координат риманова пространства), то связывающее их преобразование Лоренца может быть вычислено по формуле

$$L_b{}^a(x) = \; e'^{\beta'}_{(b)}(x') \; \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} \;\; e^{(a)}_{\alpha}(x) \; . \tag{1.1.11}$$

1.2. О нахождении спинорного преобразования в (3+1)-расщеплении 4-мерной матрицы Лоренца

Из проведенного в параграфе **1.1** *исследования непосредственно следует рецепт для вычисления локальных спинорных калибровочных преобразований над фермионной волновой функцией: нужно по явному виду матрицы Лоренца $L_b{}^a(x)$, которая всегда может быть вычислена, если две тетрады заданы явно, уметь находить отвечающий ей локальный параметр $k(x)$. Задача восстановления двумерной спинорной матрицы (k) из четырехмерной матрицы Лоренца $L(k,\; k^*)$ рассматривалась многими авторами. По существу при этом используется одна и та же методика, основанная на расщеплении (3+1) для 4-мерной матрицы Лоренца. Есть некоторые тонкие различия анализа этого вопроса в рамках спинорной группы $SL(2,C)$ и в рамках ортогональной группы $L^{\uparrow}_{+} = SO_0(3,1)$; рассмотрим детально способ восстановления спинорного преобразования из векторного на основе спинорной группы $SL(2.C)$. Приведенный ниже анализ осуществлен в рамках подхода, развитого Федоровым [749] для ортогональной группы* $SO_0(3.1)$.

Для дальнейшего исследования удобно вектор k_a разложить на действительную и мнимую части:

$$k_0 = m_0 \; - \; i \; n_0 = \Delta \; e^{i\kappa} \; , \qquad \vec{k} = (k_j) = \; \vec{m} \; - \; i \; \vec{n} \tag{1.2.1}$$

и представить матрицу $\Lambda \;\; (L_a{}^b = \bar{\delta}^c_a \; \Lambda_c{}^b)$ в виде суммы симметричной и антисимметричной частей $\Lambda = (S \; + \; A)$:

$$S = \left| \begin{array}{cc} \Delta^2 \; + \; \vec{m}^2 \; + \; \vec{n}^2 & 2 \, [\vec{n} \, \vec{m} \,] \\ 2 \, [\vec{n} \, \vec{m} \,] & -\Delta^2 \; + \; \vec{m}^2 \; + \; \vec{n}^2 \; - \; 2 \, \vec{m} \, \bullet \, \vec{m} \; - \; 2 \, \vec{n} \, \bullet \, \vec{n} \end{array} \right| ,$$

$$A = 2 \, \Delta \left| \begin{array}{cc} 0 & -(\vec{m} \; \cos\kappa \; - \; \vec{n} \; \sin\kappa) \\ (\vec{m} \; \cos\kappa \; - \; \vec{n} \; \sin\kappa) & (\vec{m} \; \cos\kappa \; + \; \vec{n} \; \sin\kappa)^{\times} \end{array} \right| \; . \tag{1.2.2a}$$

Использованы обозначения: $(\vec{n} \bullet \vec{n})_{ij} = n_i \, n_j$, $(\vec{m} \bullet \vec{m})_{ij} = m_i \, m_j$, $(\vec{b}^{\times})_{ij} = \epsilon_{ijk} \, b_k$.

Учитывая характер зависимости элементов матрицы A от параметра κ, фазы комплексного числа k_0, вводим трехмерные векторы $\vec{M}$ и $\vec{N}$:

$$\left| \begin{array}{c} \vec{M} \\ \vec{N} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \vec{m} \\ \vec{n} \end{array} \right| , \qquad (1.2.2b)$$

при этом для матриц S и A получаем представления

$$S = \left| \begin{array}{cc} \Delta^2 \; + \; \vec{M}^2 \; + \; \vec{N}^2 & 2 \, [\vec{N} \, \vec{M}] \\ 2 \, [\vec{N} \, \vec{M}] & -\Delta^2 \; + \; \vec{M}^2 \; + \; \vec{N}^2 \; - \; 2 \, \vec{M} \bullet \vec{M} \; - \; 2 \, \vec{N} \bullet \vec{N} \end{array} \right| ,$$

$$A = 2 \, \Delta \left| \begin{array}{cc} 0 & -\vec{M} \\ +\vec{M} & \vec{N}^{\times} \end{array} \right| .$$

Соотношения $(1.2.2a)$ можно переписать как комплексное равенство:

$$e^{-i\kappa} \, \vec{k} = \; e^{-i\kappa} \, (\, \vec{m} \; - \; i \, \vec{n} \,) = \vec{M} \; - i \, \vec{N} \; , \qquad (1.2.3a)$$

и соответственно условие единичности детерминанта матрицы $B(k)$ можно представить в виде

$$\Delta^2 \; - \; (\, \vec{M} \; - \; i \, \vec{N})^2 = e^{-2i\kappa} \; . \qquad (1.2.3b)$$

Теперь можно сформулировать правило для нахождения по явному виду матрицы $L_a^{\ b}$ (1.1.11) отвечающего ей параметра k_a. Прежде всего поскольку выполняется равенство

$$\text{Sp} \; L = 2 \; (g^{nm} \; + \; \bar{g}^{nm}) \; k_n \; k^*_m = 4 \; k_0 \; k^*_0 = 4 \; \Delta^2 \; , \qquad (1.2.4a)$$

то по значению $\text{Sp} \; L$ нужно вычислить величину Δ. Затем по антисимметричной части A матрицы Λ с учетом уже известного выражения для Δ определяем векторы $\vec{M}$ и $\vec{N}$. И наконец, по найденным таким образом величинам $(\; \Delta, \; \vec{M}, \; \vec{N} \;)$ восстанавливаем параметр k_a:

$$(\; k_0, \; k_j \;) = \; \frac{\pm 1}{\sqrt{\Delta^2 \; - \; (\vec{M} - i\vec{N})^2}} \; \left(\Delta \; , \; \vec{M} \; - \; i \; \vec{N} \right) \; , \qquad (1.2.4b)$$

где $(\pm)$ отражают возможность нахождения спинорного преобразования из векторного только с точностью до знака.

Необходимо сделать замечание относительно особого случая, когда антисимметричная матрица A обращается в ноль. Пусть $A = 0$, тогда либо $\vec{M} = 0, \; \vec{N} = 0$, что соответствует тривиальному случаю единичной матрицы Лоренца $L = I$ с параметрами $k_a = (\pm 1, \; 0, \; 0, \; 0)$, либо $\Delta = 0$. В последнем случае будем иметь

$$\Lambda = S = \left| \begin{array}{cc} \vec{m}^2 \; + \; \vec{n}^2 & 2 \, [\vec{n} \, \vec{m}] \\ 2 \, [\vec{n} \, \vec{m}] & \vec{m}^2 \; + \; \vec{n}^2 \; - \; 2 \, \vec{m} \bullet \vec{m} \; - \; 2 \, \vec{n} \bullet \vec{n} \end{array} \right| , \qquad (1.2.5)$$

откуда легко можно увидеть, что для восстановления из симметричной матрицы (1.2.5) параметра k_a обязательно нужно учесть условие единичности детерминанта, которое принимает здесь вид $(\vec{m} \; - \; i \, \vec{n})^2 = -1$.

Необходимо сделать еще одно важное замечание относительно применения этого рецепта восстановления параметра k_a по матрице Лоренца именно для зависящих от координат преобразований. В случае локальных преобразований $L(x)$ после выделения из матрицы А множителя $2\Delta(x)$ по оставшейся части матрицы $A(x)$ всегда будем находить некоторые ненулевые значения для векторов $\vec{M}$ и $\vec{N}$ не только в области, где $\Delta(x) \neq 0$, но и в области, где $\Delta(x) = 0$; в этой последней области с $\Delta(x) = 0$ никакого значения у фазы κ нет, поскольку мы имеем дело с нулевым комплексным числом $k_0(x) = 0$. В этой ситуации можно тем не менее полагать, что получаемые здесь некоторые значения для векторов $\vec{M}$ и $\vec{N}$ дают именно искомые выражения для векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ в этой особой области; анализ конкретных примеров подтверждает это предположение. Другими словами, анализировать соотношения (1.2.5) специально нет необходимости, если рассматривается случай локальных лоренцевских преобразований.

1.3. Спинорное преобразование и (2+2)-расщепление

Выше спинорное преобразование восстанавливалось из матрицы Лоренца на основе (3+1)-расщепления для $L_a{}^b$. Ниже изложим еще один способ [928] решения задачи нахождения по матрице Лоренца, отвечающего ей спинорного преобразования, который основан на использовании так называемого изотропного представления для матрицы Лоренца, где естественным является $(2+2)$-расщепление. Предлагаемая здесь методика является особенно удобной при использовании формализма изотропной тетрады Ньюмана – Пенроуза [424, 461, 462, 717, 746, 835], поскольку в этом формализме используется именно изотропное представление для матрицы Лоренца.

Спинорному преобразованию $B(k)$ из группы $SL(2.C)$

$$B(k) = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} , \qquad a\,b \;-\; c\,d = +1 \tag{1.3.1}$$

отвечает матрица Лоренца $L(k,\ k^*)$ – функция параметров $(a,\ b,\ c,\ d;\ a^*,\ b^*,\ c^*,\ d^*)$. После пересчета к изотропному представлению

$$U(k,\ k^*) = S\ L(k,k^*)\ S^{-1}\ , \qquad S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{vmatrix}$$

для 4-мерной матрицы Лоренца получаем выражение

$$U(k,\ k^*) = \begin{vmatrix} b\,b^* & d\,d^* & -d\,b^* & -d\,b^* \\ c\,c^* & a\,a^* & -a\,c^* & -a^*\,c \\ -c\,b^* & -d^*\,a & a\,b^* & d^*\,c \\ -c^*\,b & -d\,a^* & d\,c^* & a^*\,b \end{vmatrix} . \tag{1.3.2}$$

Задача сводится к определению комплексных чисел $(a,\ b,\ c,\ d)$ из явного вида $U(k,\ k^*)$. Для ее решения удобно каждое из этих четырех чисел представить в виде произведения двух сомножителей:

$$a = \ A\ \exp^{i\ \arg(a)} =\ A\ \alpha\ , \qquad c = \ C\ \exp^{i\ \arg(c)} =\ C\ s\ ,$$
$$d = \ D\ \exp^{i\ arg(d)} =\ D\ t\ , \qquad b = \ B\ \exp^{i\ arg(b)} =\ B\ \beta\ .$$

Соответственно для $U(k,\ k^*)$ получаем представление

$$U(k,\ k^*) = \begin{vmatrix} B^2 & D^2 & -B\ D\ t/\beta & -B\ D\ \beta/t \\ C^2 & A^2 & -A\ C\ \alpha/s & -A\ C\ s/\alpha \\ -C\ B\ s/\beta & -A\ D\ \alpha/t & A\ B\ \alpha/\beta & C\ D\ s/t \\ -C\ B\ \beta/s & -A\ D\ t/\alpha & C\ D\ t/s & A\ B\ \beta/\alpha \end{vmatrix} . \tag{1.3.3}$$

Из условия $\det\ B = +1$ находим

$$AB = \alpha\beta \ \frac{s^2t^2 - 1}{s^2t^2 - \alpha^2\beta^2} \ , \qquad CD = st \ \frac{\alpha^2\beta^2 - 1}{s^2t^2 - \alpha^2\beta^2} \ . \tag{1.3.4}$$

Теперь, обращаясь к представлению для U, согласно (1.3.3), замечаем, что достаточно знать один из фазовых параметров ($\alpha,\ \beta,\ s,\ t$), чтобы по элементам, стоящим на антидиагонали матрицы U, найти три остальных фазовых параметра: например, если α известно, то, воспользовавшись значениями для ${U_2}^1,\ {U_1}^2,\ {U_0}^3$, находим выражения для $s,\ t,\ \beta$. Учитывая (1.3.4), запишем выражения для ${U_2}^2$ и ${U_2}^3$ в виде

$${U_2}^2 = \alpha^2 \ [\ 1 + \frac{\alpha^2\beta^2 - 1}{s^2t^2 - \alpha^2\beta^2}\ ] \ , \qquad {U_2}^3 = s^2 \ \frac{(\alpha^2\beta^2 - 1)}{s^2t^2 - \alpha^2\beta^2} \ . \tag{1.3.5}$$

Отсюда получаем

$${U_2}^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{s^2}\ {U_2}^3 \ , \qquad \frac{\alpha^2}{s^2} = \frac{{U_1}^2}{{U_1}^3}$$

и дальше находим

$$\alpha = \delta \ \sqrt{{U_2}^2 \ - \ \frac{{U_1}^2\,{U_2}^3}{{U_1}^3}} \ , \qquad \delta = \pm 1 \ . \tag{1.3.6a}$$

Появление в формуле величины δ, принимающей два значения ($+1$ и -1), отражает принципиальную восстанавливаемость спинорного преобразования из векторного лоренцевского преобразования только с точностью до знака. По известному α определяем остальные три параметра $s,\ \beta,\ t$:

$$s = -\alpha \ \frac{A\ C}{{U_1}^2} \ , \quad \beta = s \ \frac{{U_3}^1}{C\ B} \ , \qquad t = -\beta \ \frac{B\ D}{{U_0}^3} \ . \tag{1.3.6b}$$

Приведем также выражения для параметров $A,\ B,\ C,\ D$:

$$A = \sqrt{{U_1}^1} \ , \quad B = \sqrt{{U_0}^0} \ ,$$

$$C = \sqrt{{U_1}^0} \ , \quad D = \sqrt{{U_0}^1} \ . \tag{1.3.6c}$$

В двух частных случаях формулы (1.3.6) непригодны и параметры спинорного преобразования нужно находить по другим формулам:

$\underline{c = d = 0}$

$$A = \sqrt{{U_1}^1} \ , \quad B = \sqrt{{U_0}^0} \ , \quad A\ B = 1 \ ,$$

$$\alpha = \delta \ \sqrt{{U_2}^2} \ , \qquad \beta = +\frac{1}{\alpha} \ ; \tag{1.3.7a}$$

$\underline{a = b = 0}$

$$C = \sqrt{{U_1}^0} \ , \quad D = \sqrt{{U_0}^1} \ , \quad C\ D = 1 \ ,$$

$$s = \delta \ \sqrt{{U_2}^3} \ , \quad t = -\frac{1}{s} \ . \tag{1.3.7b}$$