

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## на примерах

- *Классическая теория и методы проецирования*
- *Современный подход к изучению свойств геометрических объектов*
- *Ортогональный чертеж — первый шаг развития пространственного воображения*
- *Формализованные алгоритмы решения типовых задач*
- *Согласование ортогональных чертежей с наглядными изображениями*

УДК 514.18(075.8)  
ББК 22.151.3я73  
Т16

**Талалай П. Г.**

Т16 Начертательная геометрия на примерах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 288 с.: ил. — (Учебное пособие)

ISBN 978-5-9775-0641-0

Книга посвящена изучению одной из базовых дисциплин технического образования — начертательной геометрии. Рассматриваются способы и методы выполнения изображений различных объектов при помощи ортогонального проецирования, решения задач начертательной геометрии как традиционным методом, так и в виде определенного алгоритма, основанного на формальной логике. Приведен теоретический и практический материал, позволяющий не только изучить теорию получения изображений, но и в пошаговом режиме решать типовые задачи. Весь теоретический материал, а также примеры решения задач проиллюстрированы. Рассматривается современная система обозначения проекций.

*Для студентов и преподавателей технических вузов и техникумов*

УДК 514.18(075.8)  
ББК 22.151.3я73

#### **Группа подготовки издания:**

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Юрий Рожко</i>
Компьютерная верстка	<i>Натальи Смирновой</i>
Корректор	<i>Виктория Пиотровская</i>
Дизайн серии	<i>Игоря Цырульниковца</i>
Оформление обложки	<i>Елены Беляевой</i>
Фото	<i>Кирилла Сергеева</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 29.10.10.

Формат 70×100<sup>1/16</sup>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,22.

Тираж 1500 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ГУП "Типография "Наука"  
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

# Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>1</b>
Принятые обозначения и символы .....	2
<b>ГЛАВА 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ</b> .....	<b>5</b>
1.1. Методы проецирования .....	5
1.2. Эпюр. Проецирование точки.....	8
<i>Пример 1.</i> Построить проекции точки $B(-20; -30; 10)$ .....	11
<i>Пример 2.</i> Построить третью проекцию точки $A$ по двум заданным.....	12
1.3. Точки общего и частного положения.....	13
1.4. Четверти и октанты .....	15
<i>Пример 3.</i> Определить, в каких октантах находятся точки $D$ и $E$ . .....	17
<b>ГЛАВА 2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ</b> .....	<b>19</b>
2.1. Проекция отрезка прямой линии. Точка на прямой .....	19
2.2. Прямые частного положения .....	20
2.2.1. Прямые уровня.....	20
2.2.2. Проецирующие прямые .....	22
2.3. Определение натуральной величины отрезка прямой методом прямого треугольника .....	23
<i>Пример 4.</i> Определить натуральную величину отрезка $AB$ и угол наклона прямой к плоскости $\pi_1$ .....	26
2.4. Следы прямой .....	27
<i>Пример 5.</i> Построить проекции следов прямой $AB$ . .....	29
2.5. Взаимное положение двух прямых.....	31
<b>ГЛАВА 3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ</b> .....	<b>33</b>
3.1. Способы задания плоскости.....	33
3.1.1. Общие случаи задания плоскости .....	33
3.1.2. Плоские фигуры.....	35
3.1.3. Следы плоскости.....	36

3.2. Плоскости частного положения .....	38
3.2.1. Проецирующие плоскости .....	38
3.2.2. Плоскости уровня .....	40
3.3. Проецирование плоских углов .....	42
3.4. Прямая в плоскости .....	44
3.4.1. Общие случаи принадлежности прямой плоскости .....	44
<i>Пример 6.</i> Построить три следа плоскости $\alpha$ , заданной двумя пересекающимися прямыми $AB$ и $CD$ . .....	45
3.4.2. Прямая в плоскости частного положения .....	48
3.4.3. Прямые частного положения в плоскости .....	49
<i>Пример 7.</i> Через точку $B$ построить линию наибольшего ската плоскости, заданной треугольником $ABC$ . .....	53
3.5. Точка в плоскости .....	54
<i>Пример 8.</i> По заданной фронтальной проекции треугольника $ABC$ , принадлежащей плоскости $\alpha$ , построить его горизонтальную проекцию .....	55
<b>ГЛАВА 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ ИЛИ С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ .....</b>	<b>57</b>
4.1. Взаимное положение прямой и плоскости или двух плоскостей .....	57
4.2. Прямая, параллельная плоскости .....	58
4.3. Параллельные плоскости .....	60
<i>Пример 9.</i> Построить следы плоскости $\beta$ , проходящей через данную точку $K$ и параллельной плоскости $\alpha$ . .....	61
4.4. Пересекающиеся плоскости .....	62
4.5. Прямая, пересекающая плоскость .....	65
4.6. Определение взаимной видимости геометрических элементов .....	67
4.7. Пересечение плоских фигур .....	69
<i>Пример 10.</i> Построить линию пересечения плоскостей: одна из плоскостей задана двумя пересекающимися прямыми $AB$ и $BC$ , а другая — двумя параллельными прямыми $EF$ и $GH$ . .....	72
4.8. Прямая, перпендикулярная плоскости .....	73
<i>Пример 11.</i> Определить натуральную величину расстояния от точки $K$ до заданной плоскости $\alpha$ . .....	75
4.9. Взаимно перпендикулярные плоскости .....	77
<b>ГЛАВА 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ .....</b>	<b>79</b>
5.1. Общие сведения о способах преобразования проекций .....	79
5.2. Способ вращения .....	79
5.2.1. Основы способа вращения .....	79
5.2.2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций .....	80
Вращение точки .....	80

Вращение отрезка.....	81
Вращение плоскости.....	83
<i>Пример 12.</i> Способом вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, совместить прямую $AB$ с заданной плоскостью $\alpha$ .....	85
5.2.3. Плоскопараллельное перемещение.....	89
<i>Пример 13.</i> Методом плоскопараллельного перемещения определить натуральную величину треугольника $ABC$ .....	90
5.2.4. Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций.....	91
5.2.5. Способ совмещения (вращение плоскости вокруг одного из ее следов).....	93
5.3. Метод перемены плоскостей проекций.....	96
5.3.1. Основы метода перемены плоскостей проекций.....	96
5.3.2. Примеры решения задач методом перемены плоскостей проекций.....	98
<i>Задача 1.</i> Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала параллельна плоскости проекций.....	98
<i>Задача 2.</i> Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.....	99
<i>Задача 3.</i> Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.....	100
<i>Задача 4.</i> Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала параллельна плоскости проекций.....	102
<i>Пример 14.</i> Определить расстояние от точки $A$ до прямой $BC$ .....	103
<i>Пример 15.</i> Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых $AB$ и $CD$ .....	105
<i>Пример 16.</i> Определить натуральную величину расстояния от точки $K$ до плоскости, заданной треугольником $ABC$ .....	106
5.4. Определение натуральной величины углов.....	108
5.4.1. Произвольный плоский угол.....	108
5.4.2. Угол между прямой и плоскостью.....	109
5.4.3. Угол между двумя пересекающимися плоскостями.....	111
<i>Пример 17.</i> Методом перемены плоскостей проекций определить угол между двумя пересекающимися плоскостями $\alpha$ и $\beta$ .....	112
<b>ГЛАВА 6. КРИВЫЕ ЛИНИИ .....</b>	<b>115</b>
6.1. Общие сведения о кривых линиях.....	115
6.2. Особые точки и кривизна плоской кривой линии.....	119
6.3. Построение лекальных кривых.....	122
6.3.1. Эволюта и эвольвента.....	122
6.3.2. Кривые линии второго порядка.....	123
Эллипс.....	124
Гипербола.....	126
Парабола.....	129

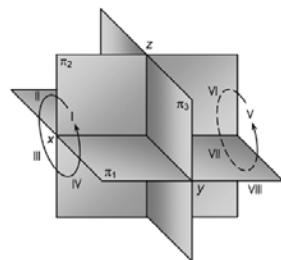
6.3.3. Кривые линии третьего порядка .....	130
Декартов лист .....	130
Циссоида Диоклеса .....	131
Строфоида .....	132
6.3.4. Кривые линии четвертого порядка .....	133
6.3.5. Спирали .....	134
6.3.6. Циклические кривые .....	135
Циклоида .....	135
Эпициклоида .....	136
Гипоциклоида .....	137
6.3.7. Графики тригонометрических функций .....	138
6.3.8. Составные лекальные кривые .....	139
6.4. Циркульные кривые линии .....	140
6.4.1. Окружность .....	140
6.4.2. Коробовая линия .....	141
Эвольвента многоугольника .....	141
Овалы и овоиды .....	142
6.4.3. Фигуры, ограниченные циркульными кривыми .....	143
6.5. Пространственные кривые .....	145
6.5.1. Общие сведения о пространственных кривых линиях .....	145
6.5.2. Винтовые линии .....	150
Свойства винтовых линий .....	150
Цилиндрическая винтовая линия .....	150
Коническая винтовая линия .....	152
Глободная винтовая линия .....	154
<b>ГЛАВА 7. МНОГОГРАННИКИ .....</b>	<b>155</b>
7.1. Общие сведения о геометрических телах и многогранниках .....	155
7.2. Пирамида и бипирамида .....	157
7.3. Призма и призматойд .....	159
7.3.1. Призма .....	159
7.3.2. Параллелепипед .....	160
7.3.3. Призматойд .....	161
7.3.4. Антипризма .....	161
7.4. Правильные и полуправильные многогранники .....	162
<b>ГЛАВА 8. КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ .....</b>	<b>165</b>
8.1. Образование и типы кривых поверхностей .....	165
8.2. Поверхности второго порядка .....	168
8.2.1. Общие сведения о поверхностях второго порядка .....	168
8.2.2. Эллипсоид .....	169
8.2.3. Гиперболоид .....	170
8.2.4. Параболоид .....	173

8.2.5. Цилиндрическая поверхность .....	175
8.2.6. Коническая поверхность .....	177
8.3. Поверхности вращения .....	178
8.3.1. Общие сведения о поверхностях вращения .....	178
8.3.2. Тор .....	180
8.4. Поверхности с плоскостью параллелизма .....	181
8.5. Поверхности с ребром возврата .....	183
8.6. Циклические поверхности .....	184
8.7. Графические поверхности .....	185
8.8. Поверхности переноса .....	186
8.9. Винтовые поверхности .....	187
<b>ГЛАВА 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.....</b>	<b>191</b>
9.1. Пересечение геометрических тел плоскостью .....	191
9.1.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел плоскостью.....	191
9.1.2. Пересечение многогранников плоскостью .....	191
Пересечение пирамиды плоскостью .....	192
Пересечение призмы плоскостью.....	195
<i>Пример 18.</i> Построить линию пересечения прямой правильной	
треугольной призмы плоскостью $\alpha$ .....	197
9.1.3. Пересечение тел с кривыми поверхностями плоскостью.....	199
Пересечение конуса плоскостью .....	201
Пересечение цилиндра плоскостью .....	203
9.2. Пересечение прямой с поверхностью геометрического тела .....	204
9.2.1. Пересечение прямой с поверхностью многогранника .....	204
Пересечение прямой с поверхностью пирамиды.....	205
Пересечение прямой с поверхностью призмы .....	206
9.2.2. Пересечение прямой с кривой поверхностью.....	208
Пересечение прямой с поверхностью конуса.....	209
Пересечение прямой с поверхностью цилиндра.....	210
<i>Пример 19.</i> Построить точки пересечения прямой $LT$	
с поверхностью сферы.....	212
9.3. Взаимное пересечение поверхностей геометрических тел .....	214
9.3.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел.....	214
9.3.2. Взаимное пересечение поверхностей многогранников .....	214
9.3.3. Взаимное пересечение кривой и многогранной поверхностей .....	217
9.3.4. Взаимное пересечение кривых поверхностей.....	219
Линейчатые поверхности пересекаются по прямым .....	221
Линейчатые поверхности пересекаются по окружностям .....	221
Одна линейчатая поверхность пересекается по прямым линиям,	
а другая — по окружности .....	223
Способ вспомогательных секущих сфер .....	224
Некоторые частные случаи взаимного пересечения поверхностей	
вращения .....	226

<b>ГЛАВА 10. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....</b>	<b>229</b>
10.1. Общие сведения о разворачивании поверхностей.....	229
10.2. Развертывание многогранных поверхностей.....	230
10.2.1. Развертывание поверхности пирамиды.....	230
10.2.2. Развертывание поверхности призмы.....	232
Развертывание поверхности прямой призмы.....	232
Развертывание наклонной призмы.....	232
Метод нормального сечения.....	233
Метод раскатки.....	235
<i>Пример 20.</i> Построить развертку поверхностей пересекающихся пирамиды и призмы и нанести на них линию пересечения.....	237
10.3. Развертывание линейчатых поверхностей.....	241
10.3.1. Развертывание конической поверхности.....	241
Развертывание поверхности прямого кругового конуса.....	241
Развертывание поверхности наклонного конуса.....	243
10.3.2. Развертывание цилиндрической поверхности.....	244
Развертывание поверхности прямого кругового цилиндра.....	244
Развертывание наклонного цилиндра.....	246
10.4. Условное разворачивание поверхностей вращения.....	248
Способ вспомогательных цилиндров.....	248
Способ вспомогательных конусов.....	250
<b>ГЛАВА 11. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ.....</b>	<b>251</b>
11.1. Общие сведения об аксонометрических проекциях.....	251
11.2. Прямоугольные проекции.....	254
11.2.1. Прямоугольная изометрическая проекция.....	254
Точка.....	255
Отрезок.....	255
Плоскость.....	256
Правильный шестиугольник.....	256
Окружность.....	256
Многогранник.....	257
11.2.2. Прямоугольная диметрическая проекция.....	258
11.3. Косоугольные проекции.....	260
11.3.1. Косоугольная фронтальная изометрическая проекция.....	260
11.3.2. Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция.....	260
11.3.3. Косоугольная фронтальная диметрическая проекция.....	261
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>263</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....</b>	<b>265</b>



# ГЛАВА 1



## Образование проекций

### 1.1. Методы проецирования

*Начертательная геометрия* — один из разделов геометрии, в котором свойства пространственных фигур изучают по их изображениям на той или иной поверхности. В качестве поверхности проецирования выбирают, как правило, плоскость.

В начертательной геометрии *чертеж* — основной инструмент решения различных пространственных задач. К выполняемому чертежу предъявляется ряд особых требований, четыре из которых являются наиболее существенными. Чертеж должен быть:

- ◆ наглядным;
- ◆ обратимым;
- ◆ достаточно простым;
- ◆ точным.

Остановимся более подробно на *обратимости* чертежа. Под этим свойством понимается возможность точного воспроизведения формы и размеров предмета по его изображению. Действительно, для всех видов технических чертежей это требование является особенно важным, т. к. по чертежу в машиностроении изготавливается та или иная деталь, в горном деле осуществляется проходка горных выработок, в электротехнике — расчет длины электрических проводников и т. д.

Основным методом получения изображений в начертательной геометрии является *проецирование*. Чтобы понять сущность проецирования, обратимся к рис. 1.1.

Пусть в пространстве имеется некоторая плоскость  $\pi_0$ , которую будем называть *плоскостью проекций*. Выберем какую-либо точку  $S$ , не лежащую в плоскости проекций. Эта точка называется *центром проецирования*. Чтобы спроецировать некоторую точку  $A$  пространства на плоскость  $\pi_0$ , необходимо через центр проецирования  $S$  провести *проецирующую прямую*  $SA$  до ее пересечения в точке  $A_0$  с плоскостью  $\pi_0$ .

При этом точка  $A_0$  называется *проекцией* точки  $A$  на плоскости  $\pi_0$ . *Проекцией фигуры* называется совокупность проекций всех ее точек на выбранную поверхность проецирования (например, на рис. 1.1 проекцией треугольника  $BCD$  на плос-

кости  $\pi_0$  является треугольник  $B_0C_0D_0$ ). Описанный метод проецирования путем проведения проецирующих прямых через точки заданной фигуры и центр проецирования называется *центральной*.

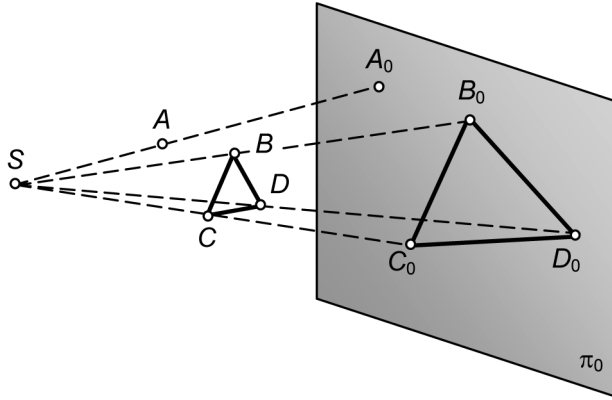


Рис. 1.1. Схема центрального проецирования

Если проецирование осуществляется из бесконечно удаленной точки пространства (рис. 1.2), то все проецирующие прямые окажутся взаимно параллельными. Этот метод проецирования называется *параллельным*, а направление  $m$ , по которому оно осуществляется, — *направлением проецирования*.

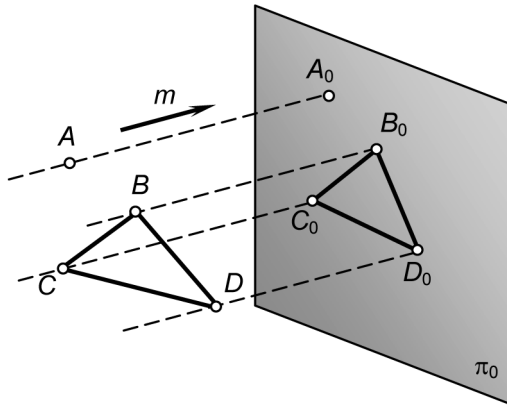


Рис. 1.2. Схема параллельного проецирования

Если направление параллельного проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называется *прямоугольным* или *ортогональным*. Во всех остальных случаях параллельное проецирование называется *косоугольным*.

Изображения, полученные при помощи центрального проецирования, отличаются хорошей наглядностью, что объясняется устройством зрительного аппарата

человеческого глаза. Однако этот метод имеет существенные недостатки. Во-первых, непросто построить само изображение предмета. Во-вторых, построенные проекции имеют низкие метрические свойства, поэтому вследствие значительных искажений, возникающих при данном методе проецирования, определить истинные размеры предмета весьма сложно. По этим причинам способ центрального проецирования имеет ограниченное применение в практике и используется, когда от чертежа требуется, прежде всего, наглядность.

Несмотря на то, что параллельное проецирование, по сравнению с центральным, имеет меньшую наглядность, параллельные проекции, особенно ортогональные, обладают лучшей измеримостью и простотой построения.

Задачи, решаемые методами начертательной геометрии, принято делить на метрические и позиционные.

*Метрические задачи* имеют целью определение размеров различных предметов по их изображению. К таким задачам относится определение натуральной величины геометрических фигур, расстояний и углов между ними.

*Позиционные задачи* позволяют определить взаимное расположение различных объектов: точек, прямых линий, плоскостей, пространственных фигур.

Для быстрого и удобного решения пространственных задач в начертательной геометрии используют несколько систем изображений, особенности которых приведены в табл. 1.1.

**Таблица 1.1.** Основные системы изображения, используемые при проецировании

Система изображения	Способ проецирования	Поверхность проецирования	Особенности
Эпюр (ортогональный или комплексный чертеж)	Ортогональное	Две или три взаимно перпендикулярные плоскости	Условное совмещение плоскостей проекций с плоскостью чертежа путем их вращения
Проекция с числовыми отметками	Ортогональное	Плоскость	Расстояние до плоскости проекций определяется числовой отметкой
Перспектива	Центральное	Плоскость, цилиндр, сфера	Ограничение максимального угла между проецирующими лучами
Аксонметрические проекции	Параллельное или центральное	Плоскость	Проецирование вместе с осями координат

Область применения той или иной системы изображений зависит, прежде всего, от целей, которые ставятся при построении чертежа. Из представленных в табл. 1.1 систем наиболее широкое применение в техническом проектировании имеет эпюра (ортогональный или комплексный чертеж). На его основе выпол-

няются рабочие и сборочные чертежи, эскизы деталей, схемы и т. д. Поэтому в дальнейшем изложении курса основное внимание будет уделено именно этому методу построения.

## 1.2. Эпюр. Проецирование точки

Любой предмет пространства можно рассматривать как определенную совокупность отдельных точек этого пространства, поэтому для изображения различных предметов необходимо научиться строить изображения точки пространства.

Представим в пространстве три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.3):

- ◆  $\pi_1$  — горизонтальную плоскость проекций;
- ◆  $\pi_2$  — фронтальную плоскость проекций;
- ◆  $\pi_3$  — профильную плоскость проекций.

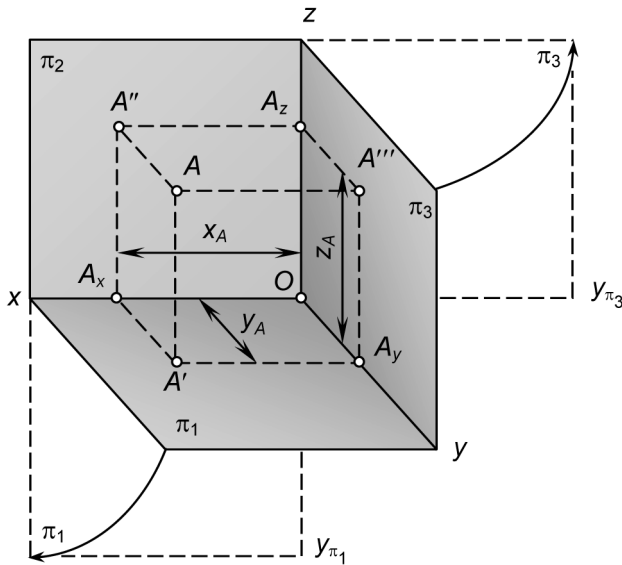


Рис. 1.3. Точка  $A$  в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей

Плоскости проекций пересекаются по прямым, которые называются *осями проекций* и обозначаются  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Точка  $O$  — точка пересечения всех трех осей проекций — называется *началом координат*.

Для наглядного изображения плоскостей проекций взята косоугольная диметрическая проекция, известная из курсов геометрии и черчения средней школы. В этой проекции ось  $x$  расположена горизонтально и направлена положительным лучом влево, ось  $z$  — вертикально и направлена положительным лучом вверх, а ось  $y$  наклонена к горизонтальной линии под углом  $45^\circ$  и положитель-

ным лучом направлена к наблюдателю. Коэффициент искажения по осям  $X$  и  $Z$  равен 1, а по оси  $Y$  — 0,5.

Представим себе в пространстве некоторую точку  $A$ . Чтобы получить проекцию точки  $A$  на горизонтальной плоскости проекций, необходимо провести через эту точку проецирующую прямую, перпендикулярную плоскости  $\pi_1$ , и найти точку пересечения  $A'$  этой прямой с плоскостью  $\pi_1$ . Точка  $A'$  называется *горизонтальной проекцией* точки  $A$ . Путем ортогонального проецирования точки  $A$  на фронтальную и профильную плоскости проекций образуются ее *фронтальная* и *профильная проекции* (соответственно точки  $A''$  и  $A'''$ ). Образованный проецирующими лучами и отрезками осей параллелепипед называют *параллелепипедом проекций*.

Длины отрезков, измеряемые некоторой установленной единицей длины и равные расстояниям от точки  $A$  до горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостей проекций, называются *прямоугольными (декартовыми) координатами*:

- ◆ по оси  $X$  — *абсцисса*, равная длине отрезка  $X_A = |AA'''|$ ;
- ◆ по оси  $Y$  — *ордината*, равная длине отрезка  $Y_A = |AA''|$ ;
- ◆ по оси  $Z$  — *апplikата*, равная длине отрезка  $Z_A = |AA'|$ .

Три координаты точки однозначно определяют ее положение в пространстве.

Взаимно перпендикулярные плоскости, изображенные на рис. 1.3, дают нам пространственный чертеж. Для получения трех проекций точки в плоскости чертежа плоскости проекций  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$  условно совмещают с плоскостью чертежа. Это совмещение выполняется следующим образом. Фронтальная плоскость проекций  $\pi_2$  принимается за плоскость чертежа, горизонтальная плоскость проекций  $\pi_1$  совмещается с плоскостью чертежа вращением вокруг оси  $X$ , а профильная плоскость проекций  $\pi_3$  — вращением вокруг оси  $Z$ . Направление вращения на рис. 3 показано стрелками.

При совмещении плоскости  $\pi_1$  с плоскостью чертежа положительное направление оси  $Y$  совмещается с отрицательным направлением оси  $Z$ , а отрицательное направление — с положительным направлением оси  $Z$ . На чертеже изображение оси  $Y$  принято обозначать  $Y_{\pi_1}$ . При совмещении плоскости  $\pi_3$  с плоскостью чертежа положительное направление оси  $Y$  совмещается с отрицательным направлением оси  $X$ , а отрицательное направление — с положительным направлением оси  $X$ . На чертеже изображение оси  $Y$  принято обозначать  $Y_{\pi_3}$ .

В результате совмещения плоскостей проекций с плоскостью чертежа образуется плоское изображение — *эпюр* (от франц. *epure* — чертеж, проект), или *ортогональный (комплексный) чертеж* (рис. 1.4).

На эпюре изображают только проекции геометрических объектов, а не сами объекты. Любые две проекции точки, изображенные на эпюре, связаны между собой *линией проекционной связи*, перпендикулярной оси проекций (будем обозначать ее штриховой линией):

- ◆ горизонтальная и фронтальная проекции (точки  $A'$  и  $A''$ ) расположены на линии проекционной связи, перпендикулярной оси  $X$ ;

- ◆ фронтальная и профильная проекции (точки  $A''$  и  $A'''$ ) — на линии проекционной связи, перпендикулярной оси  $z$ ;
- ◆ горизонтальная и профильная проекции (точки  $A'$  и  $A'''$ ) — на линии проекционной связи, перпендикулярной оси  $y$ .

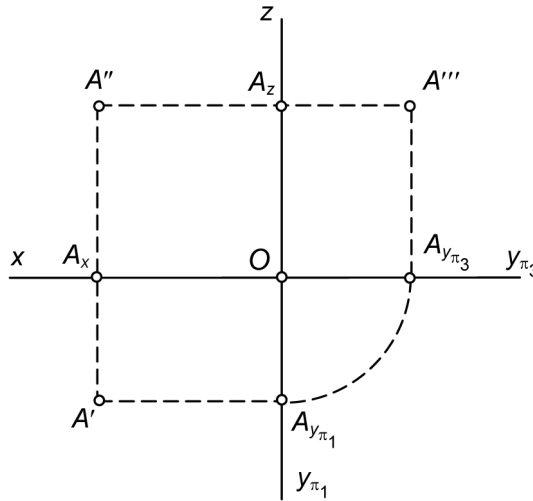


Рис. 1.4. Точка  $A$  на эюре

Вследствие того, что отрезки  $OA_{y_{\pi_1}}$  и  $OA_{y_{\pi_3}}$  являются изображением одной и той же координаты  $y_A$ , точки  $A_{y_{\pi_1}}$  и  $A_{y_{\pi_3}}$  связывают дугой окружности с центром в начале координат.

Каждая проекция точки  $A$  определяется двумя координатами:

- ◆ горизонтальная проекция  $A'$  — координатами  $x_A, y_A$ ;
- ◆ фронтальная проекция  $A''$  — координатами  $x_A, z_A$ ;
- ◆ профильная проекция  $A'''$  — координатами  $y_A, z_A$ .

Две проекции точки, построенные на эюре, однозначно определяют ее положение в пространстве. По двум проекциям заданной точки можно построить третью, и притом только одну.

Положение точки может быть задано как *графически*, так и *аналитически*. Пример графического изображения точки рассмотрен нами на рис. 1.4. Аналитическая форма задания точки представляет собой числовое выражение трех координат этой точки в выбранных единицах длины (миллиметрах, сантиметрах и других системных или внесистемных единицах).

Поскольку линейные размеры на чертежах указывают в миллиметрах и при этом саму единицу измерения (мм) не проставляют, то запись  $A(30; 20; 15)$  будет означать, что  $x_A = 30$  мм,  $y_A = 20$  мм,  $z_A = 15$  мм. В случае использования

других единиц измерения необходимо указывать, в каких именно, например,  $B$  (1 дм, 4 см, 5 см).

От аналитической формы задания точки легко перейти к графическому изображению этой точки на ортогональном чертеже, и наоборот.

### Пример 1.

#### Построить проекции точки $B(-20; -30; 10)$ .

1. С учетом знака откладываем на осях проекций координатные отрезки (рис. 1.5):

$$\begin{aligned}x_B &= |OB_x| = -20; \\y_B &= |OB_{y_{\pi_1}}| = |OB_{y_{\pi_3}}| = -30; \\z_B &= |OB_z| = 10.\end{aligned}$$

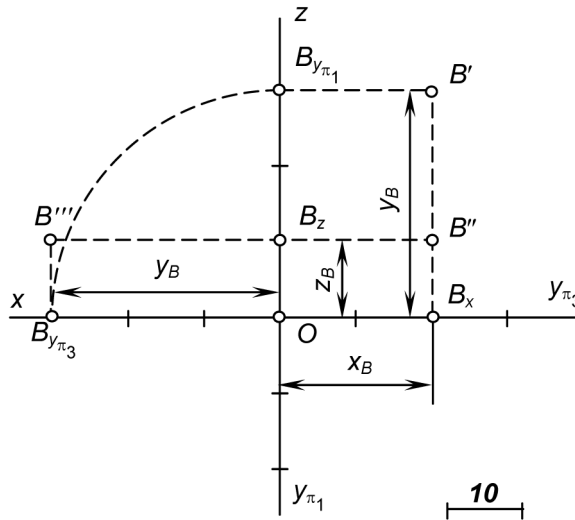


Рис. 1.5. Построение проекций точки  $B$ , заданной аналитически

2. Отмечаем точки  $B_x, B_{y_{\pi_1}}, B_{y_{\pi_3}}, B_z$ .
3. Из построенных точек  $B_x, B_{y_{\pi_1}}, B_{y_{\pi_3}}, B_z$  проводим линии проекционной связи, перпендикулярные осям проекций, и на их пересечениях отмечаем проекции точки  $B$ :

$$\begin{aligned}B' &= (B_x B' \perp x) \cap (B_{y_{\pi_1}} B' \perp y_{\pi_1}); \\B'' &= (B_x B'' \perp x) \cap (B_z B'' \perp z); \\B''' &= (B_{y_{\pi_3}} B''' \perp y_{\pi_3}) \cap (B_z B''' \perp z).\end{aligned}$$

**Пример 2. Построить третью проекцию точки  $A$  по двум заданным.**

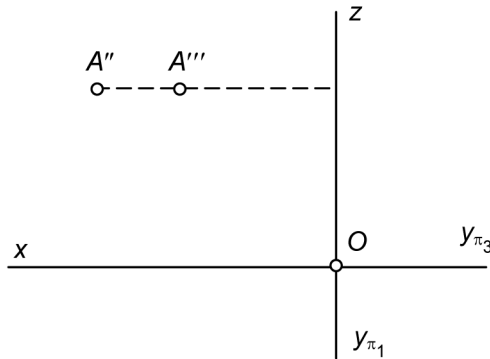


Рис. 1.6. Заданные проекции точки  $A$

1. Даны фронтальная и профильная проекции точки  $A$  (рис. 1.6): фронтальная проекция  $A''$  определяется координатами  $x_A = |OA_x|$ ,  $z_A = |OA_z|$ ,

$$A'' = (A_x A'' \perp x) \cap (A_z A'' \perp z);$$

профильная проекция  $A'''$  определяется координатами  $y_A = |OA_{y_{\pi_3}}|$ ,  $z_A = |OA_z|$ ,

$$A''' = (A_{y_{\pi_3}} A''' \perp y_{\pi_3}) \cap (A_z A''' \perp z).$$

2. Из имеющихся проекций проводим линии проекционной связи, перпендикулярные осям проекций, и определяем координатные отрезки  $OA_x$ ,  $OA_{y_{\pi_3}}$ ,  $OA_z$ , равные соответствующим координатам точки  $A$  (рис. 1.7):

$$|OA_x| = x_A, |OA_{y_{\pi_3}}| = y_A, |OA_z| = z_A.$$

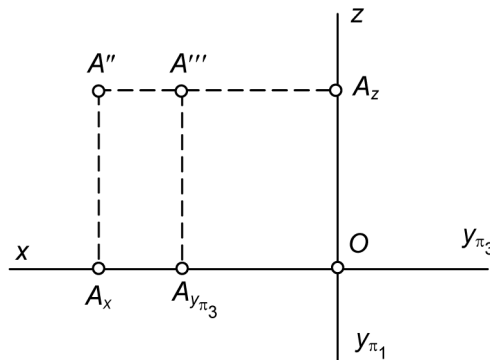


Рис. 1.7. Определение координатных отрезков точки  $A$



3. На пересечении линий проекционной связи с осями проекций отмечаем точки  $A_x, A_{y_{\pi_3}}, A_z$ .

4. Строим третью, горизонтальную проекцию точки  $A - A'$  (рис. 1.8). Горизонтальная проекция  $A'$  определяется координатами

$$x_A = |OA_x|, y_A = |OA_{y_{\pi_1}}|,$$

$$A' = (A_x A' \perp x) \cap (A_{y_{\pi_1}} A' \perp y_{\pi_1}).$$

При определении точки  $A_{y_{\pi_1}}$  по  $A_{y_{\pi_3}}$  перенос осуществляется с оси  $y_{\pi_3}$  на соответствующее по знаку направление оси  $y_{\pi_1}$ .

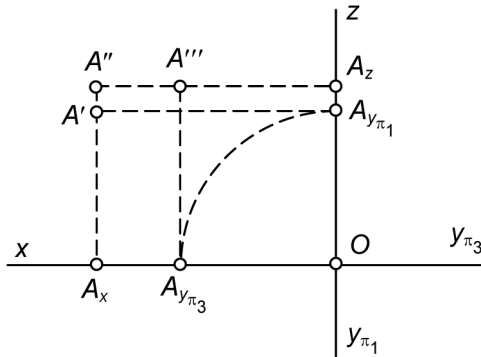


Рис. 1.8. Построение третьей проекции точки  $A$

## 1.3. Точки общего и частного положения

В зависимости от расположения точки относительно плоскостей проекций различают:

- ◆ *точки общего положения*, не принадлежащие плоскостям проекций (к ним относятся все рассмотренные точки предыдущего раздела);
- ◆ *точки частного положения*, лежащие в плоскостях проекций  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ , на осях проекций  $x, y, z$  или в начале координат.

У точки общего положения все три координаты отличны от нуля. Одна или несколько координат точки частного положения равны нулю:

- ◆ если точка лежит в плоскости проекций, то ее координата по оси, перпендикулярной этой плоскости проекций, равна нулю;
- ◆ если точка лежит на оси проекций, то две другие ее координаты равны нулю;
- ◆ если точка лежит в начале координат, то естественно, что все три координаты точки равны нулю.

Рассмотрим некоторые частные случаи положения точки: когда точка лежит в какой-нибудь плоскости проекций или на какой-нибудь оси проекций.

Точка  $B$  на рис. 1.9 принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция  $B'$  этой точки совпадает с самой точкой, фронтальная проекция  $B''$  лежит на оси  $x$ , а профильная проекция  $B'''$  — на оси  $y$ . Координата точки  $B$  по оси  $Z$  равна нулю, и, следовательно, точка  $B_z$  лежит в начале координат.

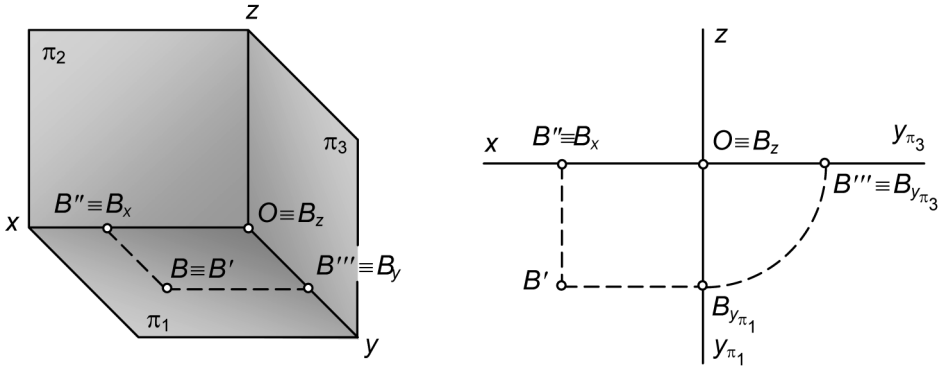


Рис. 1.9. Точка  $B$ , лежащая в плоскости  $\pi_1$ , — в аксонометрии (слева) и на эпюре (справа)

Точка  $C$  на рис. 1.10 лежит на оси  $y$ . С самой точкой совпадают ее горизонтальная  $C'$  и профильная  $C'''$  проекции, причем на ортогональном чертеже горизонтальная проекция лежит на оси  $y_{\pi_1}$ , а профильная — на оси  $y_{\pi_3}$ . Фронтальная проекция  $C''$  лежит в начале координат.

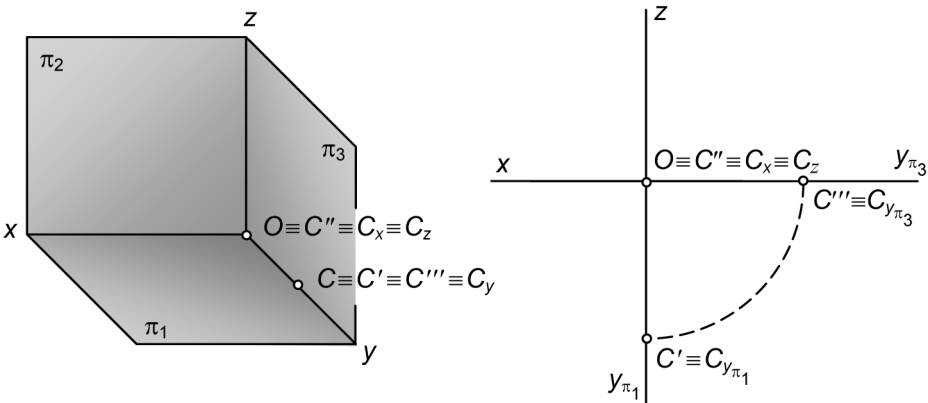


Рис. 1.10. Точка  $C$ , лежащая на оси  $y$ , — в аксонометрии (слева) и на эпюре (справа)

## 1.4. Четверти и октанты

Большую часть задач начертательной геометрии можно решить, имея не три, а две проекции геометрических объектов — горизонтальную и фронтальную. Такие чертежи, с двумя проекциями, называют *двухпозиционными*. Плоскости проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$  являются неограниченными поверхностями и при взаимном пересечении образуют четыре двугранных угла, которые называют *четвертями* или *квадрантами*. Четверти принято обозначать римскими цифрами и отсчитывать так, как показано на рис. 1.11.

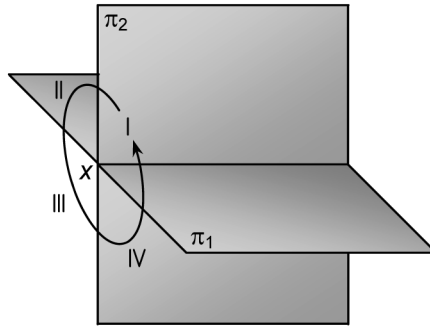


Рис. 1.11. Обозначение четвертей

На рис. 1.12 точка  $A$  находится в I-й четверти, точка  $B$  — во II-й, точка  $C$  — в III-й, а точка  $D$  — в IV-й четверти. Точка  $D$  одинаково удалена от плоскостей проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , поэтому проекции  $D'$  и  $D''$  совпали между собой. Знаки координат в различных четвертях приведены в табл. 1.2 (эта часть таблицы тонирована).

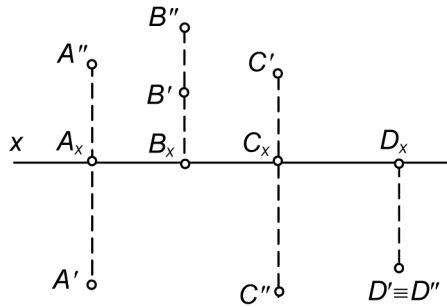


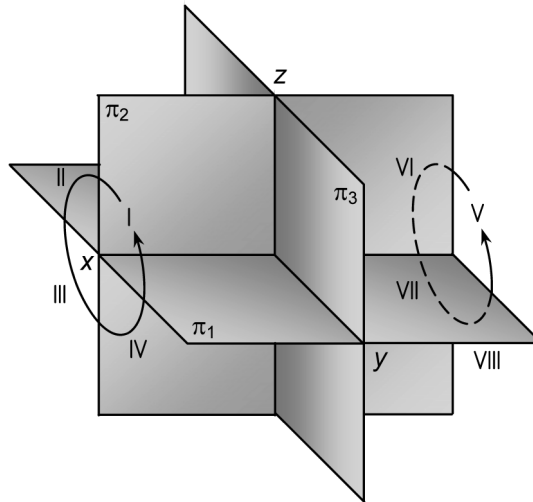
Рис. 1.12. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , заданные в двух проекциях

**Таблица 1.2.** Знаки прямоугольных координат в различных четвертях и октантах

Номер четверти или октанта	$x$	$y$	$z$
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Чаще всего на практике имеет место применение первой четверти пространства, поэтому геометрические объекты при решении задач чаще всего располагают именно здесь.

Тем не менее, ряд задач целесообразно решать, имея три проекции объекта, а некоторые задачи вообще невозможно решить без третьей проекции (как, например, в случаях с осевой плоскостью, о чем будет рассказано в дальнейшем изложении). Чертеж, в котором заданы три проекции точек и имеется возможность определить все три координаты этих точек, называют *трехпозиционным*.



**Рис. 1.13.** Обозначение октантов