С. Л. Сергеев

Архитектуры вычислительных систем

bhv

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
С32

Сергеев С. Л.

С32 Архитектуры вычислительных систем: учебник. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 240 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0575-8

В учебнике рассмотрена архитектура компьютера на уровне системы команд и адресов. Изложение опирается на минимальное понимание работы "железа" и операционных систем, от читателя требуется лишь знание четырех действий арифметики. Описаны представление данных, диапазон и точность, системы счисления, коды чисел, разновидности команд передачи управления, структура циклов, методы организации переменных адресов. Подробно рассмотрены структура подпрограмм, организация вызова и возврата, методы передачи параметров и сохранения регистров и соответствующие им команды. Описаны конвейер команд и связанные с ним проблемы. Представлены современные направления развития архитектур: RISC- и CISC-процессоры, архитектуры со словом сверхбольшой длины.

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:

Е. И. Веремей, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

В. А. Кузнецов, д. т. н., профессор кафедры прикладной математики и кибернетики Петрозаводского государственного университета

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 30.06.10.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,35.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0575-8

Оглавление

ГЛАВА 1

Представление данных в компьютере

1.1. Системы счисления

1.1.1. Р-ичная система счисления

Система счисления — это совокупность правил, позволяющих считать и кратко записывать числа. Подразумевается, что форма записи чисел должна быть удобной для выполнения арифметических операций. В повседневной жизни мы используем десятичную систему счисления (можно также сказать: систему счисления с основанием десять). По аналогии с привычной для нас десятичной системой можно определить и другие системы счисления.

Опишем, например, восьмеричную. Ее базу составляют 8 символов (цифр) — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (В десятичной системе базу составляют 10 символов — от 0 до 9.) Любое число в восьмеричной системе изображается только с помощью символов базы. (И точки, разделяющей целую и дробную части числа.)

$$b_n b_{n-1} \ldots b_1 . b_0 b_{-1} \ldots b_{-m}. \tag{1.1}$$

Выражение (1.1), составленное из символов восьмеричной базы, обозначает число

$$b_n 8^n + b_{n-1} 8^{n-1} + \ldots + b_1 8^1 + b_0 8^0 + b_{-1} 8^{-1} + \ldots + b_{-m} 8^{-m}. \tag{1.2}$$

Аналогично строятся и другие системы. Например, четверичная система счисления имеет базу из четырех символов: 0, 1, 2, 3. Любое число в ней изображается с помощью только этих символов, имеет вид (1.1) и обозначает

$$b_n 4^n + b_{n-1} 4^{n-1} + \ldots + b_1 4^1 + b_0 4^0 + b_{-1} 4^{-1} + \ldots + b_{-m} 4^{-m}.$$

Рассмотрим, к примеру, выражение $x = 2301.21$. Его можно интерпретировать и как десятичное, и как восьмеричное, и как четверичное число.

Как десятичное:

$$x = 2\times10^3 + 3\times10^2 + 0\times10^1 + 1\times10^0 + 2\times10^{-1} + 1\times10^{-2}.$$

Как восьмеричное:

$$x = 2\times8^3 + 3\times8^2 + 0\times8^1 + 1\times8^0 + 2\times8^{-1} + 1\times8^{-2}.$$

Как четверичное:

$$x = 2\times4^3 + 3\times4^2 + 0\times4^1 + 1\times4^0 + 2\times4^{-1} + 1\times4^{-2}.$$

Очевидно, это совершенно разные числа, хотя и выглядят одинаково. Во избежание путаницы там, где из контекста не ясно, в какой системе счисления записано число, оно снабжается индексом, например,

$$x = 2\times8^3 + 3\times8^2 + 0\times8^1 + 1\times8^0 + 2\times8^{-1} + 1\times8^{-2} = 2301.21_8.$$

Обобщая, можно сказать, что система счисления с основанием p ($2 \le p \le 10$) имеет базу 0, 1, 2, ..., $p-1$. Любое число в этой системе записывается в виде $b_n b_{n-1}\ldots b_1 b_0 . b_{-1}\ldots b_{-m}$, где $0 \le b_i \le p-1$, и интерпретируется как

$$b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p^1 + b_0 p^0 + b_{-1}p^{-1} + \ldots + b_{-m}p^{-m}.$$

Надо заметить, что в качестве символов базы не обязательно использовать цифры. Можно использовать любые другие значки. Но все равно эти значки должны быть заменителями слов "ноль", "один" и т. д. Понимание этого позволяет достичь еще большего обобщения.

Пусть система с основанием $p > 0$ (теперь p может быть и больше 10) имеет базу a_0, a_1, ..., a_{p-1} — p различных символов. Тогда любое число, записанное в этой системе $b_n b_{n-1}\ldots b_1 b_0 . b_{-1}\ldots b_{-m}$, где все b_i есть символы из базы, интерпретируется как

$$b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p^1 + b_0 p^0 + b_{-1}p^{-1} + \ldots + b_{-m}p^{-m}.$$

Символы базы могут быть произвольны, но обычно используют цифры от 0 до $p-1$, если $p \le 10$, или от 0 до 9 плюс дополнительные символы (если $p > 10$). В частности для шестнадцатеричной системы используют символы: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Правила счета в p-ичной системе такие же, как в десятичной. Надо только помнить, что после старшего символа базы идет число 10. Например, в восьмеричной: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, ..., 17, 20, ..., 27, 30, ..., 77, 100, 101, ...

В шестнадцатеричной: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, ..., 19, 1A, 1B, ..., 1F, 20, ..., 99, 9A, 9B, ..., 9F, A0, A1, ..., FF, 100, 101, ...

В двоичной: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ...

Арифметические операции с числами в p-ичных системах выполняются по тем же правилам, что и в десятичной, только используются свои таблицы сложения и умножения. Пример для $p = 2$ представлен на рис. 1.1.

$x \backslash y$	0	1
0	0	1
1	1	10

$x \backslash y$	0	1
0	0	0
1	0	1

Рис. 1.1. Таблицы сложения и умножения для $p = 2$

Для $p = 4$ — рис. 1.2.

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	10	12	21

Рис. 1.2. Таблицы сложения и умножения для $p = 4$

1.1.2. Правило перевода из одной системы счисления в другую

Целые

Перевести целое число x в p-ичную систему, значит представить его в виде

$$b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 ,$$

где b_i — символы из базы p-ичной системы. Для этого надо найти многочлен

$$x = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0 .$$

Очевидно, можно записать этот многочлен в виде

$$x = x_1 p + b_0,$$

где

$$x_1 = b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \ldots + b_1.$$

Следовательно, b_0 — младшая цифра p-ичного представления числа x и может быть получена как остаток от деления x на p.

Частное — x_1 представим, в свою очередь, как сумму

$$x_1 = x_2 p + b_1.$$

Следовательно, следующая, вторая справа цифра p-ичного представления числа x есть остаток от деления x_1 на p. Продолжая делить каждое новое частное на p, будем получать все новые остатки, являющиеся последовательными (справа налево) цифрами числа x в p-ичной системе. Последнее частное, меньшее p, будет старшей цифрой x.

Пример 1. Перевод числа 1995_{10} в восьмеричную систему (рис. 1.3).

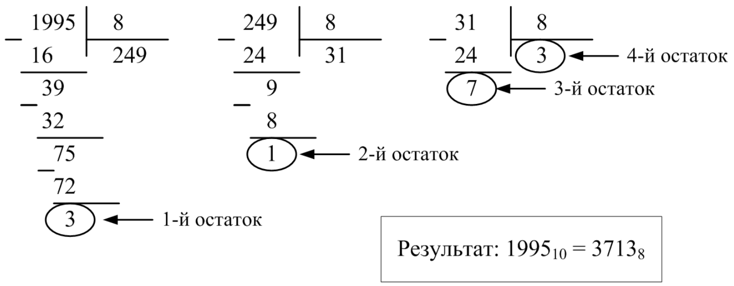


Рис. 1.3

Пример 2. Перевод того же числа в шестнадцатеричную систему (рис. 1.4).

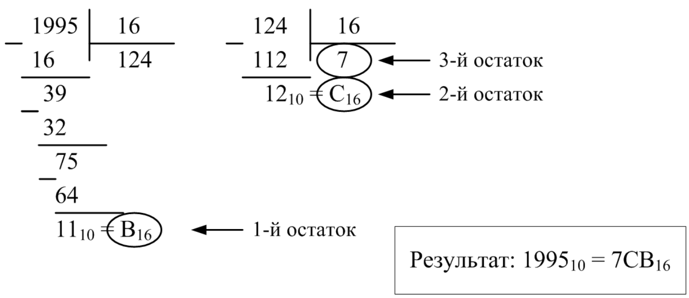


Рис. 1.4

Числа, меньшие единицы

Переведем теперь число y, меньшее 1, из десятичной системы в p-ичную. Будем искать y в виде многочлена

$$y = b_{-1}p^{-1} + b_{-2}p^{-2} + b_{-3}p^{-3} + \ldots + b_{-m}p^{-m},$$

который определяет p-ичную форму числа y: $y_p = 0.b_{-1}b_{-2}b_{-3}\ldots b_{-m}$.

Преобразуем многочлен к виду

$$y = p^{-1}\left(b_{-1} + y_1\right), \text{ где } y_1 = b_{-2}p^{-1} + b_{-3}p^{-2} + \ldots + b_{-m}p^{-m+1}.$$

Из того, что $y_1 < 1$ заключаем, что произведение $y \times p$ имеет целой частью b_{-1} — первую слева цифру p-ичного представления числа y. Умножая y_1 на p, получим число, целая часть которого — вторая цифра y_p, и т. д.

Заметим, что мы еще только ищем представление y в виде многочлена. Заранее нам не известны не только его коэффициенты, но и степень m. Иногда на каком-то шаге оказывается, что $y_i = 0$. Тогда процесс перевода заканчивается $(i = m)$. Чаще этого не происходит слишком долго, поэтому мы должны решить, сколько коэффициентов будем искать. (Иными словами, с какой точностью требуется выполнить перевод в p-ичную систему.)

Пример 3. Перевод десятичного числа 0.1995 в восьмеричную систему (на рис. 1.5, слева) и в шестнадцатеричную систему (рис. 1.5, справа).

0.	1995
	8
1.	5960
	8
4.	7680
	8
6.	1440

0.	1995
	16
3.	1920
	16
3.	0720
	16
1.	1520

Рис. 1.5

Итак, $0.1995_{10} \approx 0.146111_8 \approx 0.33126\,E_{16}$.

Как следует из выведенного нами правила, число, появившееся перед точкой, в последующем умножении не участвует (отделено вертикальной чертой). Ответ получается при прочтении сверху вниз того, что расположено левее вертикальной черты.

Равенства, разумеется, приближенные, т. к. процессы перевода не закончены и младшие цифры восьмеричного и шестнадцатеричного чисел отброшены. Точные переводы получаются редко.

Пример 4. Перевод числа 0.1025 в восьмеричную (рис. 1.6, слева) и в шестнадцатеричную (рис. 1.6, справа) системы счисления.

0.	1025
	8
0.	8200
	8
6.	5600
	8
4.	4800

0.	1025
	16
1.	6400
	16
10.	2400
	16
3.	8400

Рис. 1.6

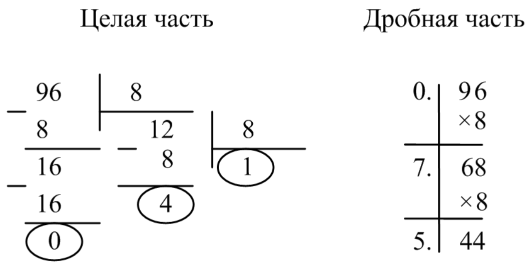
Итак, $0.1025_{10} \approx 0.064_8 \approx 0.1A3_{16}$.

Общее правило перевода

Теперь дадим общее правило перевода чисел из десятичной системы в p-ичную.

Число разбивается на две части — целую и дробную (левее точки и правее). Каждая часть переводится в p-ичную систему по своему правилу — для целых и для дробных. Полученные числа являются целой и дробной частями результата. Их объединяют в одно число (слева от точки и справа).

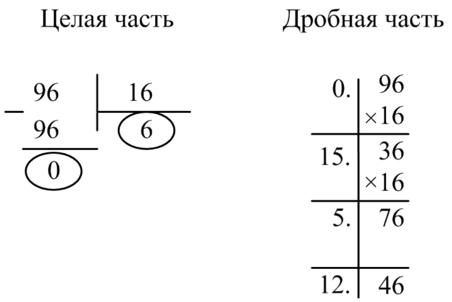
Пример 5. Перевод числа общего вида — 96.96_{10} в восьмеричную систему (рис. 1.7).



$95_{10} = 140_8$ $\qquad 0.95_{10} \approx 0.75_8$ $\qquad 96.96_{10} \approx 140.75_8$

Рис. 1.7

Пример 6. Перевод числа 96.96_{10} в шестнадцатеричную систему (рис. 1.8).

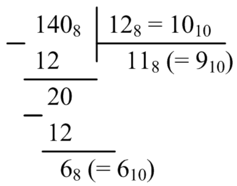


$96_{10} = 60_{16}$ $0.96_{10} \approx 0.F5C_{16}$ $96.96_{10} \approx 60.F5C_{16}$

Рис. 1.8

Для перевода из системы счисления с основанием q в систему с основанием p можно воспользоваться правилом перевода из десятичной системы в p-ичную с единственным уточнением — деление и умножение должны выполняться в q-ичной системе счисления.

В **примере 7** дается перевод числа 140_8 в десятичную систему. $q = 8$, $p = 10$, следовательно, вычисления надо производить в восьмеричной системе (рис. 1.9).



Результат: $140_8 = 96_{10}$

Рис. 1.9

Поскольку такие вычисления очень сложны своей непривычностью, перевод из произвольной системы в десятичную иногда выполняют по более простому правилу. При этом объем вычислений больше, но ведутся они в десятичной системе.

Вот это правило.

От числа $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-m}$ переходят к многочлену

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p^1 + b_0 p^0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2} + \ldots + b_{-m} p^{-m},$$

значение которого вычисляется в десятичной системе. Например:

$$140.75_8 = 1\times 8^2 + 4\times 8^1 + 0\times 8^0 + 7\times 8^{-1} + 5\times 8^{-2} = 64 + 32 + \frac{7}{8} + \frac{5}{64} \approx 96.959.$$

1.1.3. Двоичная и вспомогательные системы

Для хранения p-ичного n-разрядного числа в памяти компьютера служит ячейка, состоящая из n одинаковых элементов. Каждый элемент — это устройство, способное находиться в одном из p устойчивых состояний. Каждому символу базы ставится в соответствие одно из состояний устройства. Записать символ в элемент ячейки, значит привести этот элемент в соответствующее состояние. Элементы ячейки упорядочены, как и разряды в числе, так что в каждый элемент записывается свой, вполне определенный разряд числа. Элементы ячейки называют также *разрядами*.

Наиболее простые и надежные устройства хранения и переработки информации работают с двоичными числами. Разряды этих устройств — двоичные. Двоичные разряды называют также битами, т. к. в них записывается один бит — минимальная единица информации. Базу двоичной системы составляют символы 0 и 1. В табл. 1.1 приведены некоторые числа в двоичной системе.

Таблица 1.1. Примеры двоичных чисел

Десятичные	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичные	000	001	010	011	100	101	110	111
Десятичные	8	9	10	11	12	13	14	15
Двоичные	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Десятичные	16		32		64		1024	
Двоичные	10000		100000		1000000		10000000000	

Из таблицы видно, что двоичные числа значительно длиннее десятичных, но по ним невозможно понять, во сколько раз. Оценим эту величину. Пусть число x состоит из n разрядов в десятичной системе и из m — в двоичной. Это значит, что выполняются неравенства

$$10^{n-1} \le x < 10^n \text{ и } 2^{m-1} \le x < 2^m.$$

Логарифмируя их по основанию 2, получим:

$$(n-1)\times \log_2 10 \le \log_2 x < n\times \log_2 10 \text{ и } m-1 \le \log_2 x < m.$$

$\log_2 x$ удовлетворяет двум неравенствам одновременно, поэтому

$$\max\left[(n-1)\times\log_2 10\ ,\ m-1\right]\le\log_2 x<\min\left[n\times\log_2 10\ ,m\right].$$

Следовательно,

$$(n-1)\times\log_2 10<m \text{ и } m-1<n\times\log_2 10 .$$

Отсюда

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\log_2 10<\frac{m}{n}<\log_2 10+\frac{1}{n}.$$

При больших n обе границы стремятся к $\log_2 10\approx 3.3$. Таким образом, при больших n двоичные числа длиннее десятичных примерно в 3.3 раза.

Использование двоичной системы счисления добавляет к обычной для недесятичных систем трудности — непривычности, еще одну — очень большую длину чисел. Работа с ними утомительна и увеличивает вероятность ошибок. В то же время преимущества использования двоичной системы в компьютерах столь убедительны, что не позволяют от нее отказаться.

Компромисс найден в использовании одной из вспомогательных систем — восьмеричной или шестнадцатеричной (для каждого типа компьютера выбирается одна из них). Дело в том, что переводы из восьмеричной системы в двоичную и обратно, так же как и из шестнадцатеричной в двоичную и обратно, настолько просты, что могут быть выполнены человеком очень быстро даже в уме. Поэтому используется такая схема: компьютер работает с двоичными числами, а человек читает и записывает их как восьмеричные (или шестнадцатеричные), мысленно осуществляя перевод из одной системы в другую. В этой схеме сохраняется непривычность манипулирования с недесятичными числами, однако длина этих чисел примерно такая же, как и десятичных.

Возьмем произвольное целое двоичное число: $b_n b_{n-1}\ldots b_1 b_0$.

Запишем его в виде многочлена

$$b_n 2^n+b_{n-1}2^{n-1}+\ldots+b_5 2^5+b_4 2^4+b_3 2^3+b_2 2^2+b_1 2^1+b_0 2^0.$$

Рассмотрим сумму трех правых слагаемых: $b_2 2^2+b_1 2^1+b_0 2^0$. Очевидно, что эта сумма лежит в диапазоне от 0 до 7 и может быть заменена одной восьмеричной цифрой. Обозначим ее через c_0.

Возьмем теперь следующие три слагаемых. Вынося за скобки 2^3, замечаем, что сумму в скобках можно заменить одной восьмеричной цифрой. Пусть это будет c_1 .

$$b_5 2^5+b_4 2^4+b_3 2^3=\left(b_5 2^2+b_4 2^1+b_3 2^0\right)\times 2^3=c_1\times 8.$$

Следующие три слагаемых будут иметь общим множителем 2^6, а выражение в скобках снова заменим восьмеричным — c_2.

Аналогично будем поступать с каждой следующей тройкой слагаемых. Если число слагаемых в многочлене не кратно трем, добавим слагаемое вида $0 \times 2^{n+1}$ или два слагаемых: $0 \times 2^{n+2} + 0 \times 2^{n+1}$ с тем, чтобы последняя группа слагаемых также была тройкой. В результате придем к новому многочлену

$$c_k 8^k + c_{k-1} 8^{k-1} + \ldots + c_1 8^1 + c_0 8^0,$$

где k равно $\frac{n}{3}$, $\frac{n+1}{3}$ или $\frac{n+2}{3}$ (выбирается целое).

Но это соответствует восьмеричному числу $c_k c_{k+1} \ldots c_1 c_0$.

Теперь возьмем двоичное число, меньшее единицы $0.b_{-1} b_{-2} b_{-3} \ldots b_{-m}$. Построим соответствующий многочлен:

$$b_{-1} 2^{-1} + b_{-2} 2^{-2} + b_{-3} 2^{-3} + \ldots + b_{-m} 2^{-m}.$$

Рассмотрим сумму из трех левых слагаемых. Если в ней вынести за скобки 2^{-3}, то в скобках получится сумма, которую можно заменить одной восьмеричной цифрой. Обозначим ее c_{-1}.

$$b_{-1} 2^{-1} + b_{-2} 2^{-2} + b_{-3} 2^{-3} = \left(b_{-1} 2^2 + b_{-2} 2^1 + b_{-3} 2^0 \right) \times 2^{-3} = c_{-1} \times 2^{-3}.$$

В следующих трех слагаемых за скобку вынесем 2^{-6}. Сумму в скобках заменим восьмеричной цифрой c_{-2}.

Аналогично будем действовать с каждой следующей тройкой слагаемых. Если m не кратно трем, добавим слагаемое $0 \times 2^{-m-1}$ или два слагаемых: $0 \times 2^{-m-1} + 0 \times 2^{-m-2}$ так, чтобы последняя группа слагаемых также оказалась тройкой. В результате получим новый многочлен: $c_{-1} 8^{-1} + c_{-2} 8^{-2} + \ldots + c_{-r} 8^{-r}$, соответствующий восьмеричному числу $0.c_{-1} c_{-2} \ldots c_{-r}$, где $r = \frac{m}{3}$, $\frac{m+1}{3}$ или $\frac{m+2}{3}$.

Общее правило перевода из двоичной системы в восьмеричную таково:

1. Начиная от десятичной точки, влево и вправо объединяем цифры двоичного числа в тройки (триады), дополняя, при необходимости, число нулями слева и справа.

2. Каждую триаду заменяем соответствующей восьмеричной цифрой по табл. 1.2.

Таблица 1.2. Триады

Двоичная триада	000	001	010	011	100	101	110	111
Восьмеричная цифра	0	1	2	3	4	5	6	7

Правило перевода из восьмеричной системы в двоичную:

1. Каждую восьмеричную цифру заменяем соответствующей триадой (именно триадой, т. е. 0 заменяем на 000, 1 — на 001 и т. д.).
2. Отбрасываем слева и справа лишние нули.

Если в этих двух правилах слова "восьмеричная" заменить на "шестнадцатеричная", "тройки" на "четверки", а "триады" на "тетрады", то получим правила перевода из двоичной системы в шестнадцатеричную и обратно. В табл. 1.3 приведены соответствующие тетрады.

Таблица 1.3. Тетрады

Двоичная тетрада	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16-ричная цифра	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичная тетрада	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16-ричная цифра	8	9	A	B	C	D	E	F

Примеры перевода из двоичной системы

Рассмотрим перевод числа $x = 1011011101.100111110_2$ в восьмеричную систему.

1. Разбиваем на триады (от точки вправо и влево) — рис. 1.10.
2. Дополняем нулями (рис. 1.11).
3. Заменяем триады восьмеричными цифрами: $x = 1335.474_8$.

1 011 011 101.100 111 11

Рис. 1.10

001 011 011.10011111

Рис. 1.11

Рассмотрим перевод числа $x = 1011011101.100111110_2$ в шестнадцатеричную систему:

1. Разбиваем на тетрады (от точки вправо и влево) — рис. 1.12.

10 1101 1101.1001 1111

Рис. 1.12

0010 1101 1101.1001 1111

Рис. 1.13

2. Дополняем нулями (рис. 1.13).
3. Заменяем тетрады шестнадцатеричными цифрами: $x = 2DD.9E_{16}$.

Примеры перевода в двоичную систему

Переведем в двоичную систему число $x = 124.124_8$.

1. Заменяем цифры триадами: 001 010 100.001 010 100.
2. Отбрасываем лишние нули: $x = 1010100.0010101_2$.

Переведем в двоичную систему число $x = 124.124_{16}$.

1. Заменяем цифры тетрадами: 0001 0010 0100.0001 0010 0100.
2. Отбрасываем лишние нули: $x = 100100100.0001001001_2$.

Обычно проблемы перевода из одной системы счисления в другую скрыты от человека, работающего с компьютером: человек передает компьютеру информацию в десятичной системе, компьютер переводит ее в двоичную, обрабатывает в двоичной системе, а перед выдачей результатов человеку переводит их в десятичную систему.

Редко, но все же иногда приходится общаться с компьютером на его языке. При этом человек формулирует входную информацию и получает выходную в восьмеричной или шестнадцатеричной системе. Перевод в двоичную и обратно осуществляется на уровне устройств ввода/вывода: мы нажимаем клавишу, на которой изображена, например, шестнадцатеричная цифра, а клавиатура передает в процессор соответствующую тетраду. И наоборот, из процессора передается двоичный код, а в принтере или на экране монитора каждой тетраде кода соответствует шестнадцатеричная цифра, которая и печатается.

1.1.4. Другие системы счисления

Рассмотренные нами системы счисления называют *системами с неотрицательной базой*, т. к. существуют системы, в которых часть элементов базы отрицательна.

Например, "троичная с симметричной базой". (Имеется в виду симметрия относительно нуля.) В ней элементы базы — 0, 1 и –1 (последнюю цифру обозначают с чертой сверху вместо минуса: $\bar{1}$).

В табл. 1.4 приводятся некоторые числа в этой системе.

Таблица 1.4. Троичная система с симметричной базой

Десятичные	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Троичные	0	1	$1\bar{1}$	10	11	$1\bar{1}\bar{1}$	$1\bar{1}0$	$1\bar{1}1$	$10\bar{1}$	100	101
Десятичные	27		81		243		729				
Троичные	1000		10000		100000		1000000				

Здесь число по-прежнему интерпретируется как многочлен, но коэффициенты могут быть и отрицательными. К примеру, числу $1\bar{1}\bar{1}$ соответствует многочлен $1\times 3^2 - 1\times 3^1 - 1\times 3^0 = 5$, а числу $10\bar{1}$ — многочлен $1\times 3^2 + 0\times 3^1 - 1\times 3^0 = 8$. Важным достоинством троичной системы является единообразие изображения положительных и отрицательных чисел. Здесь не требуется знаков "–" и "+" (табл. 1.5).

Таблица 1.5. Отрицательные числа в троичной системе с симметричной базой

Десятичные	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7
Троичные	$\bar{1}$	$\bar{1}1$	$\bar{1}0$	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}11$	$\bar{1}10$	$\bar{1}1\bar{1}$

Просто изменять знак числа: все 1 надо поменять на $\bar{1}$, а $\bar{1}$ на 1. Троичная система даже предлагалась как конкурент двоичной для использования в компьютерах. Двоичная система победила лишь благодаря значительно большей надежности хранения информации в двоичных устройствах.

P-ичной системе счисления не обязательно иметь неотрицательную или симметричную базу. В табл. 1.6 приведены разновидности пятеричных систем счисления (в первом столбце — система с неотрицательной базой, в третьем — с симметричной). Заметим, что только системе с неотрицательной базой требуется специальный знак для изображения отрицательных чисел.

Таблица 1.6. Различные пятеричные системы

Десятичные числа	**База системы**			
	0, 1, 2, 3, 4	$\bar{1}$, 0, 1, 2, 3	$\bar{2}$, $\bar{1}$, 0, 1, 2	$\bar{3}$, $\bar{2}$, $\bar{1}$, 0, 1
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	$1\bar{3}$
3	3	3	$1\bar{2}$	$1\bar{2}$
4	4	$1\bar{1}$	$1\bar{1}$	$1\bar{1}$
5	10	10	10	10
6	11	11	11	11
7	12	12	12	$1\bar{3}\bar{3}$

Следует подчеркнуть, что основание системы счисления — это вовсе не число символов базы. Система счисления может иметь даже отрицательное основание. Например, система с основанием –2 и базой, состоящей из цифр 0, 1. Числа в этой системе интерпретируются, как и обычно, полиномом:

$$a_n(-2)^n + a_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + a_1(-2)^1 + a_0(-2)^0.$$

В табл. 1.7 представлены некоторые числа в этой системе счисления.

Таблица 1.7. Система с основанием –2

p = 10	0	1	2	3	4	5	6
p = –2	0	1	110	111	100	101	11010
p = 10	7	8	9	10	11	12	13
p = –2	11011	11000	11001	11110	11111	11100	11101

Могут быть системы с иррациональным или даже комплексным основанием.

Все перечисленные системы являются позиционными. В них значение цифры зависит от занимаемой ею позиции в числе. В числе 1991 первая единица