Санкт-Петербургский
государственный
университет

МАТЕМАТИКА

Школьные олимпиады СПбГУ

2021

УДК 51
ББК 22.1
Ш673

Составители:
Н. Ю. Власова, М. В. Гончарова,
А. Л. Громов, А. В. Дементьев, Т. О. Евдокимова,
К. П. Кохась, К. Ю. Лавров, А. Г. Савельева,
К. А. Сухов, А. И. Храбров

Ш673 **Школьные олимпиады СПбГУ 2021. Математика**: учеб.-метод. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2022. — 120 с.

ISBN 978-5-288-06226-1

В пособии представлены примеры заданий отборочного и заключительного этапов Олимпиады школьников СПбГУ по математике за 2020/2021 учебный год. Все задачи сопровождаются подробными решениями; также даются общие методические указания с разбором типичных ошибок участников.

Издание предназначено для подготовки к участию в Олимпиадах школьников СПбГУ.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-288-06226-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Олимпиада по математике для школьников, которую Санкт-Петербургский государственный университет проводит ежегодно вот уже более 30 лет, даёт возможность участникам проверить и оценить свои знания и силы. Задания Олимпиады, хотя и являются нестандартными, основаны на школьной программе, поэтому их интересно решать учащимся с разным уровнем подготовки — каждый год в Олимпиаде принимают участие тысячи ребят из разных регионов.

В настоящий сборник вошли задачи отборочного и заключительного этапов Олимпиады школьников СПбГУ по математике за 2020/2021 учебный год. В разделы с условиями и решениями заданий отборочного этапа включены отдельные, наиболее интересные по мнению составителей, задачи этого этапа. Они разбиты на группы в соответствии со сложностью (10, 20, 30, 40 или 50 баллов). В разделах, которые посвящены заключительному этапу, приведён полный набор вариантов заданий этого этапа. Все задачи, представленные в сборнике, сопровождаются ответами и подробными решениями; для некоторых задач приводятся два или три способа решения. Кроме того, даются общие методические указания и разбор типичных ошибок, которые были сделаны участниками при решении заданий Олимпиады.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике вот уже который год подряд получает первый — самый высокий — уровень в перечне олимпиад школьников, утверждаемом Министерством науки и высшего образования РФ. Это даёт возможность победителям и призёрам заключительного этапа Олимпиады претендовать на получение особых прав при поступлении в высшие учебные заведения.

Данное издание предназначено для подготовки к участию в олимпиадах школьников по математике и может быть полезно как учащимся, так и преподавателям.

ИСТОРИЯ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ ПО МАТЕМАТИКЕ

На протяжении всего времени своего существования Санкт-Петербургский (Ленинградский) государственный университет традиционно уделял большое внимание привлечению в Университет способной молодёжи. Особую роль в этом играла работа со школьниками. По инициативе профессора Г. М. Фихтенгольца при ЛГУ был создан первый школьный математический кружок. В 1934 году Ленинградский университет провёл первую в стране математическую олимпиаду, оргкомитет которой возглавил ряд крупных учёных: Б. Н. Делоне, Г. М. Фихтенгольц, В. А. Тартаковский, В. И. Смирнов.

Первая олимпиада по математике Ленинградского государственного университета для учащихся выпускных классов состоялась весной 1990 года. В ней приняли участие около 200 учащихся, в основном из ведущих физико-математических школ города. В определённой степени эта олимпиада была и профориентационным мероприятием, но основная её цель была в другом. Дело в том, что с конца 1970-х годов городская олимпиада школьников по математике стала по сути дела спортивным соревнованием. Для успешного выступления на ней была необходима специальная тренировка в решении задач по тематике, слабо связанной с материалом, который изучается в школе (даже в физико-математической). Задачи же олимпиады выпускников были не «олимпиадными» и не школьными, а «почти школьными», поэтому эта олимпиада начала привлекать учащихся обычных школ — ведь в ней интересно было участвовать всем тем, кто хорошо знал и понимал школьную математику, а также умел логически рассуждать. Со временем олимпиада завоевала авторитет среди школьников, и успешное выступление на ней стало приравниваться к высшему баллу на вступительном экзамене по математике в Университет.

С 1998 года олимпиада получила статус региональной и стала проводиться не только в Санкт-Петербурге, но и в других городах России. С 2004 года олимпиада получила название «Олимпиада Санкт-Петербургского государственного университета по математике», а с 2009 года — «Олимпиада школьников Санкт-Петербургского государственного университета по математике». В этот период активно участвовать в олимпиаде стали ученики не только выпускных, но и средних классов (с 6-го по 10-й). С 2011 года отборочный этап Олимпиады стал проводиться как в очной, так и в заочной форме — через Интернет. Тем самым обеспечивается широкая география Олимпиады: например, в 2020/2021 учебном году в отборочном этапе приняли участие более 8000 школьников практически из всех субъектов Российской Федерации, а также из девяти государств ближнего и дальнего зарубежья; около 600 из них участвовало в заключительном этапе. Победителями и призёрами заключительного этапа Олимпиады стали ребята из 33 субъектов РФ, а также из Белоруссии, Казахстана и Швейцарии.

Организацией Олимпиады долгие годы руководил член-корреспондент РАН профессор Г. А. Леонов, который привлёк к этой работе профессиональных математиков, представителей научно-технической сферы и практикующих педагогов-математиков. В результате, несмотря на высокий уровень заданий Олимпиады, большинство задач, предлагаемых участникам, оказывается полезным для них и с методической точки зрения. Кроме того, в заданиях Олимпиады регулярно встречаются задачи, которые появились непосредственно в ходе научных исследований.

Жюри Олимпиады с самого начала её проведения возглавляли известные специалисты по преподаванию математики — среди них профессор О. А. Иванов и профессор Ю. В. Чурин. Председателем Методической комиссии Олимпиады в настоящее время является профессор Н. А. Широков.

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ОЛИМПИАДЫ

В 2020/2021 учебном году Олимпиада проводилась в два этапа — отборочный и заключительный. Вследствие ограничений, связанных с пандемией коронавирусной инфекции, оба этапа проводились в заочной форме через Интернет. Отборочный этап проходил в октябре — январе; при этом каждый участник мог выбрать удобное для себя время, чтобы приступить к выполнению заданий Олимпиады. Итоги отборочного этапа были опубликованы в конце января. Победители и призёры отборочного этапа принимали участие в заключительном этапе, который проводился в марте в заранее объявленную дату. Также в заключительном этапе могли участвовать без прохождения отборочного этапа победители и призёры заключительного этапа Олимпиады прошлого года при условии, что они ещё продолжают обучение в школе. Окончательные итоги Олимпиады были подведены в апреле.

Как на отборочном, так и на заключительном этапе использовались разные наборы задач для учащихся 6–7-х, 8–9-х и 10–11-х классов.

Вариант отборочного этапа состоял из задач разного типа, которые располагались в порядке возрастания сложности; при этом задание для каждого участника формировалось автоматически системой проведения Олимпиады через Интернет. Для участников 6–7-х классов варианты состояли из трёх задач, которые оценивались в 20, 30 и 50 баллов: в первой задаче достаточно было дать только ответ, а в двух других требовалось также привести полное решение. В варианты для участников 8–9-х и 10–11-х классов входило по четыре задачи, которые оценивались в 10, 20, 30 и 40 баллов. Первая задача для участников 8–9-х классов была тестовой — в ней нужно было выбрать правильные варианты ответа из предложенных; во второй задаче требовалось дать свой ответ, решение приводить было не нужно; в третьей и четвёртой задачах участник должен был представить полные решения. В первой задаче для участников 10–11-х классов нужно было дать свой ответ, решение приводить не требовалось; в остальных задачах участник должен был представить полные решения. Для всех участников на решение варианта отборочного этапа отводилось 90 минут. Перед тем как приступить к выполнению заданий отборочного этапа, участники имели возможность прорешать для тренировки демонстрационные варианты, составленные из заданий отборочного этапа Олимпиады прошлого года.

Вариант заключительного этапа состоял из задач различной тематики, каждая из которых оценивалась одинаковым количеством баллов. При этом вариант для участников из 6–7-х классов состоял из четырёх задач, для участников из 8–9-х классов — из шести задач, а для участников из 10–11-х классов — из пяти задач. На решение варианта для всех участников отводилось 230 минут.

Как в отборочном этапе, так и в заключительном допускалось только однократное участие. Подробнее о порядке проведения Олимпиады см. в Регламенте Олимпиады школьников СПбГУ на официальном сайте.

Сайт Олимпиады школьников СПбГУ:
https://olympiada.spbu.ru/

Интернет-страница
Олимпиады школьников СПбГУ по математике:
https://olympiada.spbu.ru/index.php/olimpiada-shkolnikov/matematika

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Отборочный этап

6–7-й классы

1. На доске выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Чему равно $100B + A$? (20 баллов).

2. Найдите количество различных четырёхзначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры числа 2021 (включая и это число). (20 баллов).

3. На уроке математики каждому из семи гномов нужно найти одно двузначное число, при прибавлении к которому числа 18 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могут ли все числа, найденные гномами, оказаться различными? (30 баллов).

4. Пусть натуральные числа m и n удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2020}.$$

Докажите, что m и n не могут одновременно быть нечётными. (30 баллов).

5. При распределении земельных участков фермеру Новосёлову выделили 2 квадратных участка разной площади, имеющих целочисленные стороны. Возможно ли выделить фермеру

Малинникову также 2 квадратных участка с целочисленными сторонами, чтобы суммарная площадь участков Малинникова была в 2 раза больше суммарной площади участков Новосёлова? (50 баллов).

6. Пусть A — арифметическая прогрессия с $A_1 = 3$ и разностью 5. Докажите, что существует бесконечно много арифметических прогрессий B с $B_1 = 7$, имеющих бесконечно много общих членов с A. (50 баллов).

7. Любопытная Варвара пишет рассказ о хороших людях. Она выписала из толкового словаря хорошие человеческие качества: 12 качеств, начинающихся на букву «К»; 6 качеств, начинающихся на букву «Л»; 8 качеств, начинающихся на букву «М»; 4 качества, начинающихся на букву «Н». Варвара хочет распределить выписанные качества между героями своего рассказа следующим образом: каждый герой обладает ровно двумя качествами; эти качества обязательно начинаются с разных букв; любое качество можно использовать только для одного героя. Какое максимальное количество героев с хорошими качествами из списка Варвары может быть в рассказе? (50 баллов).

8–9-й классы

1. На доске выписали все трёхзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен больше числа десятков, а число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все трёхзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен меньше числа десятков, а число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Какие из перечисленных ниже утверждений являются верными? (10 баллов).

а) $A > B$; б) $B > 10$; в) $A < 10$;
г) среди перечисленных ответов нет верного.

2. У Васи имеются 9 разных книг Аркадия и Бориса Стругацких, каждая из которых содержит ровно одно произведение писателей. Вася хочет расставить эти книги на полке так, чтобы рядом стояли: а) романы «Жук в муравейнике» и «Волны гасят ветер» (неважно, в каком порядке); б) повести «Беспокойство» и «Повесть о дружбе и недружбе» (неважно, в каком порядке). Сколькими способами Вася может это сделать? (10 баллов).

а) $4 \cdot 7!$; б) $9!/4!$; в) $4! \cdot 7!$; г) другой ответ.

3. Пусть в треугольнике ABC сторона $AB = 5$, а сторона $BC = 4$. Какие из перечисленных ниже утверждений неверны? (10 баллов).

а) если $AC = 4$, то $\angle ABC > \angle BAC$;
б) если $AC = 3$, то $\angle ABC < \angle BAC$;
в) если $AC = 2$, то $\angle ACB > \angle ABC$;
г) неверных утверждений нет.

4. На уроке математики каждому из гномов нужно найти трёхзначное число, при прибавлении к которому числа 198 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. При каком максимальном количестве гномов все найденные ими числа могли оказаться различными? (20 баллов).

5. Найдите кратное трём восьмизначное число-палиндром, записанное цифрами 0 и 1, если известно, что в записи всех его простых делителей используются только цифры 1, 3 и 7. (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, 11011.) (20 баллов).

6. На стороне NA треугольника NBA отмечены такие точки Q и F, что

$$NQ = FA = \frac{NA}{4}\,.$$

На отрезке QF выбрана точка L. Через точки Q и F проведены прямые, параллельные BL, до пересечения со сторонами NB и AB в точках D и K соответственно. Верно ли, что сумма площадей треугольников NDL и AKL в 2 раза меньше площади треугольника NBA? (30 баллов).

7. Перед началом урока учительница записала на доске следующую задачу: «В окружность радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника». Однако двоечник Вася незаметно стёр слово «диаметру» и вписал вместо него «длине». Сможет ли отличник Петя решить задачу с исправленным Васей условием? (30 баллов).

8. Двоечнику Васе приснилось, что верно следующее утверждение: если в треугольнике ABC медиана CC_1, проведённая к стороне AB, больше медианы AA_1, проведённой к стороне BC, то $\angle CAB$ меньше $\angle BCA$. Отличник Петя считает, что это утверждение ошибочно. Выясните, кто из них прав. (30 баллов).

9. На острове живут только 50 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 15 обывателей, которые могут говорить правду, но могут и лгать. Рассеяный профессор, приехавший на остров прочесть лекцию, забыл, какого цвета шляпа на нём надета. Какое минимальное число встречных местных жителей профессор должен спросить о цвете свой шляпы, чтобы точно знать, какой он? (40 баллов).

10. Любопытная Варвара пишет рассказ о хороших людях. Она выписала из толкового словаря хорошие человеческие качества: K качеств, начинающихся на букву «К»; L качеств, начинающихся на букву «Л»; M качеств, начинающихся на букву «М». Варвара хочет распределить выписанные качества между героями своего рассказа следующим образом: каждый герой обладает ровно двумя качествами; эти качества обязательно начинаются с разных букв; любое качество можно использовать только для одного героя. Верно ли, что если выполнено хотя бы одно из условий $K + L < M$, $L + M < K$, $M + K < L$, то максимальное количество героев с хорошими качествами из списка Варвары, которое может быть в рассказе, равно минимуму из чисел $K + L$, $L + M$, $M + K$? (40 баллов).