

радиоэлектроники

Рэндал У. Биард,
Тимоти У. МакЛэйн

Малые беспилотные
летательные аппараты:
теория и практика



ТЕХНОСФЕРА



*Издание осуществлено при поддержке
ОАО «НПП «Радар ммс»*

УДК 623.746.4-519 + 533.6.013.622
ББК 39.52

Б59

Б59 Рэндал У. Биард, Тимоти У. МакЛэйн

Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика
Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2015. – 312 с. ISBN 978-5-94836-393-6

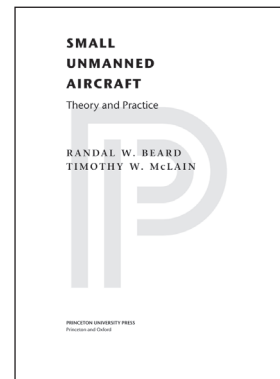
Это издание посвящено управлению беспилотными летательными аппаратами (БЛА). Акцент в книге делается на системы повышения устойчивости управления. Других изданий, которые бы охватывали вопросы моделирования динамики летательных аппаратов, разработки автопилотов (решающих задачи «низкого уровня»), оценки состояния БЛА, а также расчета траектории полета (задачи «высокого уровня»), в настоящее время нет.

Целевой аудиторией являются студенты, которые прошли подготовку в области электротехники, компьютерной техники, машиностроения и информатики и прослушали вводный курс по системам управления с обратной связью или робототехнике. Также книга будет интересна инженерам в области авионавтики, которые заинтересованы во вводном курсе в автономные системы.

УДК 623.746.4-519 + 533.6.013.622
ББК 39.52

© 2012 by Princeton University Press. All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher.

© 2014, ЗАО «РИЦ «ТЕХНОСФЕРА», перевод на русский язык, оригинал-макет, оформление



ISBN 978-5-94836-393-6
ISBN 978-0-691-14921-9 (англ.)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	8
Предисловие	10
Глава 1. Введение	14
1.1. Архитектура системы	14
1.2. Модели проектирования	18
1.3. Опытнo-конструкторская разработка	20
Глава 2. Системы координат	22
2.1. Матрицы вращения	23
2.2. Системы координат МБЛА	25
2.3. Воздушная скорость, скорость ветра и скорость относительно Земли	31
2.4. Ветровой треугольник	33
2.5. Дифференцирование вектора	37
2.6. Краткое изложение главы	38
2.7. Опытнo-конструкторская разработка	40
Глава 3. Кинематика и динамика	41
3.1. Переменные состояния	41
3.2. Кинематика	43
3.3. Динамика неизменяемых систем	44
3.4. Краткое изложение главы	49
3.5. Опытнo-конструкторская разработка	50
Глава 4. Силы и моменты сил	51
4.1. Гравитационные силы	51
4.2. Аэродинамические силы и моменты	52
4.3. Движущие силы и моменты	65
4.4. Атмосферные возмущения	67
4.5. Краткое изложение главы	70
4.6. Опытнo-конструкторская разработка	71
Глава 5. Модели линейного проектирования	73
5.1. Краткое описание нелинейных уравнений движения	74
5.2. Координированный поворот	77
5.3. Балансировочный режим	78
5.4. Модели передаточной функции	80
5.5. Линейные модели в пространстве состояний	89
5.6. Упрощенные режимы	97
5.7. Краткое содержание главы	101
5.8. Опытнo-конструкторская разработка	102
Глава 6. Проектирование автопилота с использованием последовательных замыканий контура обратной связи	105
6.1. Последовательное замыкание контура	106
6.2. Ограничения, связанные с насыщением, и их влияние на рабочие характеристики	108

6.3. Автопилот движения в боковом направлении	109
6.4. Автопилот продольного движения	116
6.5. Цифровая реализация контуров с ПИД-регулятором	126
6.6. Краткое содержание главы	129
6.7. Опытнo-конструкторская разработка	131
Глава 7. Датчики МБЛА	133
7.1. Акселерометры	133
7.2. Датчики угловой скорости	137
7.3. Датчики давления	139
7.4. Цифровые компасы	143
7.5. Система глобального позиционирования	146
7.6. Краткое содержание главы	154
7.7. Опытнo-конструкторская разработка	154
Глава 8. Оценка состояния	156
8.1. Контрольный маневр	156
8.2. Фильтры низких частот	157
8.3. Оценка состояния путем обращения модели датчика	158
8.4. Теория динамического наблюдателя	162
8.5. Вывод дискретно-непрерывного фильтра Калмана	164
8.6. Оценка положения	168
8.7. Сглаживание данных GPS	170
8.8. Краткое содержание главы	173
8.9. Опытнo-конструкторская разработка	174
Глава 9. Модели наведения	175
9.1. Модель автопилота	175
9.2. Кинематическая модель управляемого полета	176
9.3. Кинематические модели наведения	179
9.4. Динамическая модель наведения	181
9.5. Краткое содержание главы	183
9.6. Опытнo-конструкторская разработка	183
Глава 10. Движение по прямой линии и круговой орбите	185
10.1. Движение по прямолинейной траектории	186
10.2. Движение по круговой орбите	192
10.3. Краткое содержание главы	194
10.4. Опытнo-конструкторская разработка	196
Глава 11. Система управления маршрутом	197
11.1. Переходы между путевыми точками	197
11.2. Траектории Дубинса	204
11.3. Краткое содержание главы	212
11.4. Опытнo-конструкторская разработка	214
Глава 12. Планирование траектории	216
12.1. Поточечные алгоритмы	217
12.2. Алгоритмы охвата	229
12.3. Краткое содержание главы	233
12.4. Опытнo-конструкторская разработка	235

Глава 13. Навигация с помощью видеосистемы	236
13.1. Система координат карданного подвеса, видеокамеры и проективная геометрия	237
13.2. Нацеливание карданного подвеса	239
13.3. Геолокация	241
13.4. Оценка движения цели в плоскости изображения	244
13.5. Время до столкновения	248
13.6. Точная посадка	250
13.7. Краткое содержание главы	254
13.8. Опытнo-конструкторская разработка	254
Приложение А. Терминология и обозначения	255
Приложение В. Кватернионы	263
В.1. Кватернион поворотов	263
В.2. Кинематика самолета и уравнения динамики	265
В.3. Переход от углов Эйлера к кватернионам	268
Приложение С. Анимация в Simulink	269
С.1. Дескрипты графики Matlab	269
С.2. Пример анимации: перевернутый маятник	270
С.3. Пример анимации летательного аппарата, использующего линии	273
С.4. Пример анимации летательного аппарата, использующего вершины и грани	277
Приложение D. Моделирование в Simulink с помощью S-функций	280
D.1. Пример: дифференциальное уравнение второго порядка	280
Приложение E. Параметры корпуса летательного аппарата	286
E.1. Летящее крыло Zagi	286
E.2. БЛА «Аэрозонд»	287
Приложение F. Балансировка и линеаризация в Simulink	288
F.1. Использование команды trim в Simulink	288
F.2. Численные расчеты сбалансированного состояния	289
F.3. Использование команды linmod в Simulink для создания модели в пространстве состояний	293
F.4. Численные расчеты модели в пространстве состояний	295
Приложение G. Основные положения теории вероятности	296
Приложение H. Параметры датчика	298
H.1. Датчик угловой скорости	298
H.2. Акселерометры	298
H.3. Датчики давления	299
H.4. Цифровой компас/магнитометр	299
H.5. GPS	299
Список литературы	300
Предметный указатель	309

1.1. Архитектура системы

Цель этой книги — подготовить читателя к выполнению исследовательской работы в захватывающей и быстроразвивающейся области автономной навигации, наведения и управления беспилотными летательными аппаратами. Акцент делается на разработку алгоритмов программного обеспечения, требуемого для автономного и полуавтономного полета. Для работы в этой области исследователи должны быть знакомы с широким диапазоном вопросов, включая преобразование координат, аэродинамику, проектирование автопилота, оценку состояния, расчет траектории полета и машинное зрение. Это издание должно охватить все эти важные вопросы, фокусируя внимание в особенности на их применении в отношении малых и миниатюрных летательных аппаратов, которые в книге сокращенно обозначаются как МБЛА.

При разработке всех этих вопросов имелась в виду архитектура программного обеспечения, представленная на рис. 1.1. Блок на рис. 1.1, обозначенный как *беспилотный летательный аппарат*, представляет собой физический летательный аппарат с шестью степенями свободы (СС), который реагирует на команды сервопривода (руль высоты, элерон, руль направления и дроссельная заслонка), а также на ветер и прочие возмущения. Математические модели, требуемые для того, чтобы понять полет аппарата с неизменяемой геометрией крыла, достаточно сложные и описываются в гл. 2—5 и гл. 9. В частности, в гл. 2 приводится описание систем координат и их преобразований. Изучение систем координат необходимо, поскольку большинство параметров МБЛА приводятся в инерциальной системе координат (например при движении по кругу вокруг заданной точки), тогда как большинство измерений датчиков проводятся в системе координат, связанной с БЛА; исполнительные механизмы приводят в действие силы и моменты сил также в связанной с БЛА системе координат. В гл. 3 изложены кинематические и динамические уравнения движения абсолютно твердого тела. В гл. 4 приводится описание аэродинамических сил и моментов сил, которые действуют на летательный аппарат с неизменяемой геометрией крыла. Глава 5 начинается с объединения результатов гл. 3 и 4 в целях получения нелинейной динамической модели МБЛА с шестью степенями свободы и двенадцатью состояниями. При обеспечении точности, необходимой для целей моделирования, модель с шестью степенями

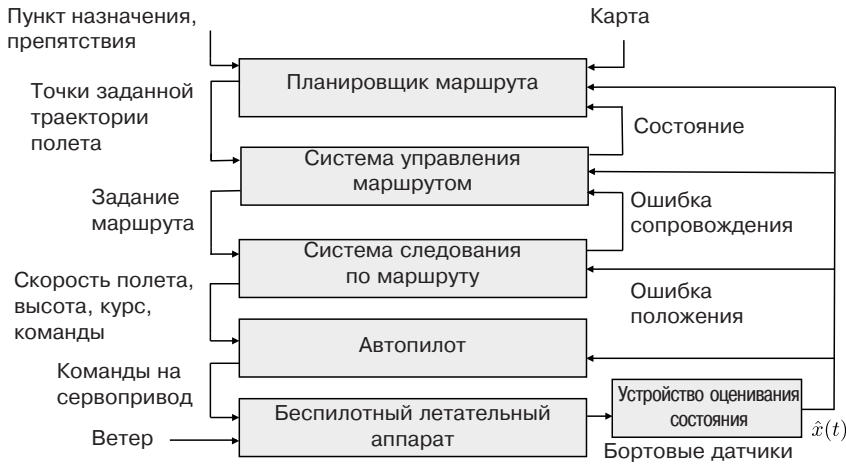


Рис. 1.1. Архитектура системы, которая будет использоваться на протяжении всей этой книги. Планировщик маршрута наносит прямую линию или траекторию Дубинса через поле препятствий. Система управления маршрутом переключается между режимами следования по дуге окружности и по прямой линии при совершении маневра между точками заданной траектории полета. Блок следования вдоль траектории полета дает команды автопилоту низкого уровня, которые контролируют положение корпуса летательного аппарата. Каждый блок при выработке решений полагается на оценки состояний, получаемых в результате фильтрации показаний бортовых датчиков

свободы оказывается достаточно сложной и громоздкой. Проектирование и анализ управления летательным аппаратом значительно проще осуществляются с помощью использования линейных моделей более низкого порядка. Линейные модели, которые описывают небольшие отклонения от равновесного состояния, получены в гл. 5, включая линейную функцию преобразования и модели пространственных состояний.

Блок, обозначенный на рис. 1.1 как *автопилот*, относится к алгоритмам управления низкого уровня, который поддерживает постоянными значения углов крена и тангажа, скорости полета, высоты и курсового направления полета. В гл. 6 описана стандартная методика последовательного замыкания контуров для проектирования законов управления автопилотом. Вложенные контуры управления поочередно замыкаются, при этом внутренние контуры поддерживают углы крена и тангажа, а внешние контуры поддерживают скорость полета, высоту и курс.

Автопилот и блоки управления полетом на больших высотах полагаются на точные оценки состояния, получаемые динамической фильтрацией показаний бортовых датчиков, которые включают акселерометры, датчики угловой скорости, датчики давления, магнитометры и приемники GPS. Описание этих датчиков и их математических моделей приводится в гл. 7. Поскольку измерить все состояния небольшого летательного аппарата с помощью стандартных

датчиков невозможно, важную роль играют оценки этих состояний. Описание нескольких методов оценки состояний, которые применимы для МБЛА, дано в гл. 8.

Полная модель динамики полета совместно с методом оценивания автопилота и состояния представляет собой многомерную, чрезвычайно сложную нелинейную систему уравнений. Полная модель системы слишком сложная, чтобы способствовать разработке высокоуровневых алгоритмов наведения. Поэтому в гл. 9 получены нелинейные уравнения низкого порядка, которые моделируют поведение системы с закрытым контуром управления. Эти модели используются в последующих главах при разработке алгоритмов наведения.

Одна из первостепенных проблем связана с полетом МБЛА при наличии ветра. Поскольку скорости полета находятся в интервале 20—40 миль/час, который типичен для МБЛА, а скорость ветра на нескольких сотнях футов над уровнем Земли (АВНП, AGL — Above Ground Level) почти всегда превышает 10 миль/час (18 км/час), то МБЛА должны быть способны эффективно маневрировать в воздушном потоке. Традиционные методы отслеживания траектории, используемые в робототехнике, для МБЛА работают недостаточно хорошо. Основным затруднением в использовании этих методов является требование быть в определенном месте в определенное время, которое не может надлежащим образом учитывать изменения скорости относительно Земли, вызванные неизвестными и меняющимися воздействиями ветра. Альтернативные методы выдерживания заданной траектории, которые просто поддерживают летательный аппарат на требуемой траектории, доказали свою эффективность во время летных испытаний. В гл. 10 приводится описание алгоритмов и методов, используемых для обеспечения возможностей блока *выдерживания заданной траектории*, представленного на рис. 1.1. В книге акцентируется внимание исключительно на траекториях в виде прямой линии и круговых орбитах или дугах окружностей. Все остальные используемые траектории полета могут быть составлены из этих первичных траекторий в виде прямой линии и окружности.

Блоку, обозначенному на рис. 1.1 как *менеджер маршрута*, соответствует конечный автомат, который преобразует последовательность точек маршрута (положений и направлений) в последовательности траекторий прямолинейных отрезков и дуг окружностей, по которым должен лететь МБЛА. Это позволяет упростить проблемы планирования траектории полета, так как *планировщик маршрута* создает последовательность либо прямолинейных отрезков маршрута, либо траекторий Дубинса, по которым должен маневрировать МБЛА, пролетая через поле препятствий. В гл. 11 приводится описание *менеджера маршрута*, а в гл. 12 — описание *планировщика маршрута*. Для планировщика маршрута в книге рассматриваются два класса проблем. Первый класс проблем обусловлен применением поточечных алгоритмов, для которых целью

является маневрирование из начального положения в конечную точку, избегая при этом набора препятствий. Второй класс проблем обусловлен алгоритмами поиска, целью которых является охват области, потенциально содержащий запретные зоны, с использованием для этого зоны охвата датчика.

Почти все области использования МБЛА требуют использования бортовой оптоэлектронной/инфракрасной видеокамеры. Типичной задачей камеры является обеспечение конечного пользователя визуальной информацией. Поскольку грузоподъемность МБЛА ограничена, все же имеет смысл использовать видеокамеру также для навигации, наведения и управления полетом. Эффективное использование информации видеокамеры в настоящее время является активной исследовательской задачей. В гл. 13 обсуждается несколько возможных вариантов использования видеокамер на МБЛА, включая геолокацию и посадку на основе видеосистемы. Геолокация использует последовательность изображений и данные бортовых датчиков для оценки мировых координат находящихся на Земле объектов. При посадке на основе видеосистемы используются видеоизображения, записанные МБЛА, чтобы навести его на цель, идентифицированную в плоскости изображения. Понимание этих проблем позволит проводить в будущем исследования в области наведения МБЛА с помощью видеосистемы.

В гл. 13 используется архитектура программного обеспечения, представленная на рис. 1.2, где блок, обозначенный как *планировщик маршрута*, заменен блоком *наведения с помощью видеосистемы*. Однако законы наведения

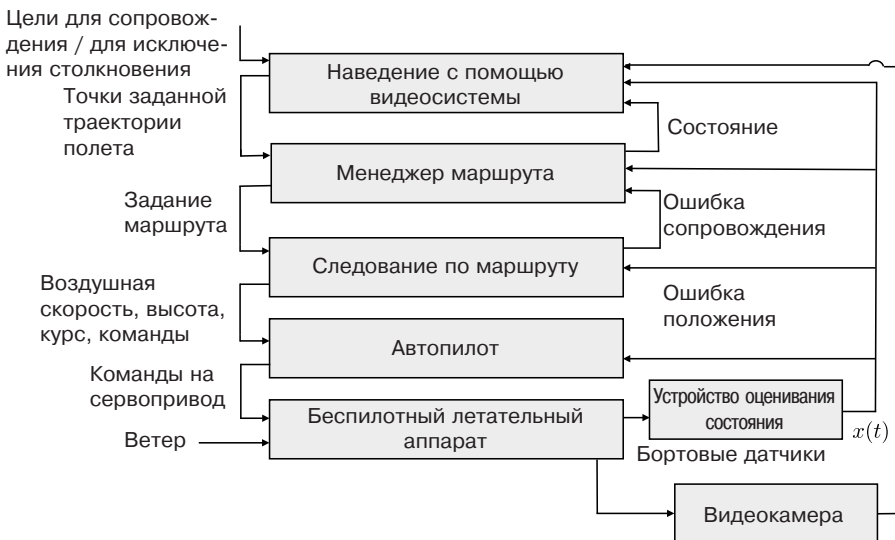


Рис. 1.2. Архитектура системы для навигации, наведения и управления полетом с помощью видеосистемы. Видеокамера добавлена как дополнительный датчик, а планировщик маршрута заменен блоком, обозначенным как наведение с помощью видеосистемы

с помощью видеосистемы взаимодействуют с архитектурой программного обеспечения так же, как в случае использования планировщика маршрута. Модульность представленной архитектуры является ее одной из самых привлекательных особенностей.

1.2. Модели проектирования

Принципы проектирования, которые соблюдаются на протяжении всей книги, схематически иллюстрируются на рис. 1.3. Беспилотный летательный аппарат, функционирующий в своей среде, обозначен на рис. 1.3 как «физическая система» и включает в себя приводы (для управления заслонками и воздушным винтом), а также датчики (инерционный измерительный модуль, GPS, камера и т.п.). Первый шаг в процессе проектирования состоит в моделировании физической системы, используя для этого нелинейные дифференциальные уравнения. Поскольку на этом шаге неизбежны приближения и упрощения, будем

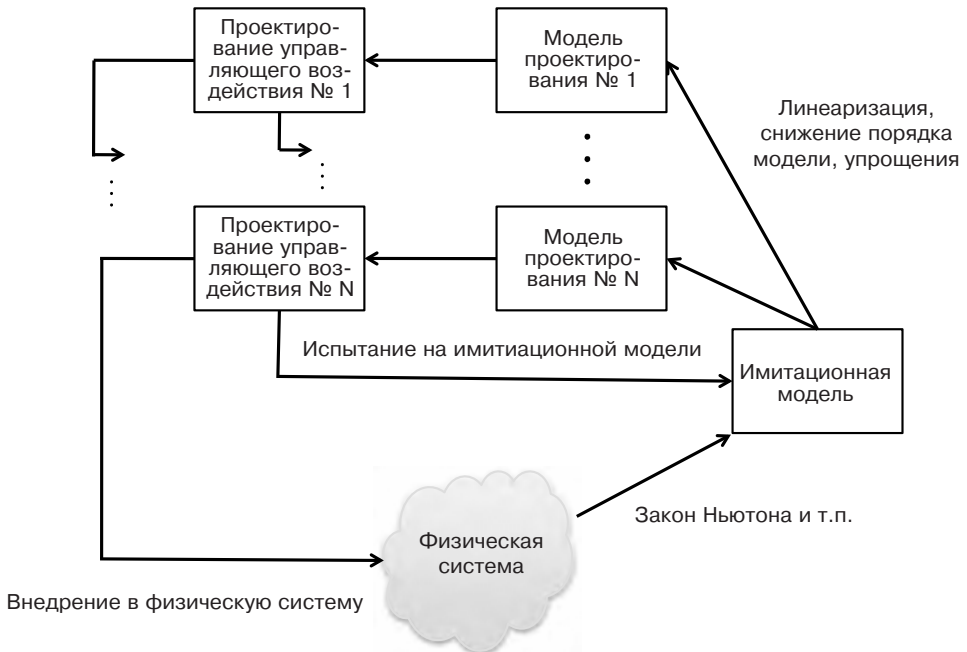


Рис. 1.3. Процесс проектирования. Используя принципы физики, физическая система моделируется математически, что дает имитационную модель. Имитационная модель упрощается, чтобы создать модели проектирования, которые используются для проектирования управляющего воздействия. Проектирование управляющего воздействия затем испытывается и отлаживается в имитационной модели и, в конце концов, внедряется в физическую систему

все же надеяться отразить в математической модели все важные характеристики физической системы. В этой книге модель физической системы включает в себя кинематику и динамику абсолютно твердого тела (гл. 3), аэродинамические силы и моменты (гл. 4), а также бортовые датчики (гл. 7). Результирующая модель получила название на рис. 1.3 «имитационная модель», и она будет использоваться для высокоточного компьютерного моделирования физической системы. Однако следует отметить, что имитационная модель является лишь приближением физической системы и только из-за того, что проектирование достаточно эффективно на имитационной модели, не нужно предполагать, что она будет надлежащим образом функционировать в физической системе.

Имитационная модель, как правило, нелинейная и высокого порядка и, кроме того, математически сложная для использования в проектировании управляющих воздействий. Поэтому для удобства процесса проектирования имитационная модель упрощается и, как правило, линеаризуется, чтобы создать модели проектирования низкого порядка. Для любой физической системы может быть множество моделей проектирования, каждая из которых отражает определенные аспекты процесса проектирования. Для МБЛА используются разнообразные модели как для низкоуровневого (low-level) управления полетом, так и для наведения аппарата на более высоком уровне. В гл. 5 разложено движение самолета на продольное (пикирование и набор высоты) и поперечное (крен и отклонения от курсового направления) движения и будем использовать различные модели проектирования для каждого типа движения. Линеарные модели проектирования, разработанные в гл. 5, будут использоваться в гл. 6 для разработки низкоуровневых контуров управления автопилотом, что позволяет регулировать воздушную скорость, высоту и курсовой угол аппарата. В гл. 8 продемонстрировано, как оценивать состояния, которые необходимы для контуров автопилота, используя для этого датчики, обычно используемые на малых и миниатюрных летательных аппаратах.

Математические уравнения, описывающие физические особенности системы, поведение низкоуровневого автопилота и процедуры для оценки состояния аппарата, при рассмотрении этих аспектов как единого целого очень сложны и не используются для проектирования процедур наведения на более высоком уровне. Поэтому в гл. 9 разработаны нелинейные модели проектирования, которые моделируют поведение системы при замкнутом контуре, когда на входе — заданные воздушная скорость, высота и курсовой угол, а на выходе — положение в инерциальной системе координат и направление летательного аппарата. Модели проектирования, разработанные в гл. 9, используются в гл. 10—13 для разработки стратегий наведения МБЛА.

Как показано на рис. 1.3, модели проектирования используются для проектирования систем наведения и управления полетом. Полученные конструкции

затем испытываются с помощью высокоточных имитационных моделей, которые иногда требуют, чтобы модели проектирования были изменены или усовершенствованы, если они не отражают существенных особенностей системы. После тщательного тестирования проектов с помощью имитационной модели они внедряются в физические системы и снова проходят стадию испытаний и отладку, что иногда приводит к изменениям имитационной модели в целях более точного соответствия физической системе.

1.3. Опытно-конструкторская разработка

В этом учебнике авторы решили заменить традиционные домашние задания, выполняемые с помощью карандаша и бумаги, на полную и достаточно обширную опытную-конструкторскую разработку. Опытно-конструкторская разработка является неотъемлемой частью этого учебника, и она сыграет значительную роль в оказании помощи читателю при усвоении представленного материала.

Опытно-конструкторская разработка включает в себя разработку имитатора полета МБЛА с поверхности Земли вверх. Имитатор полета создается с помощью ПО Matlab/Simulink, и специально разработанными заданиями так, чтобы не требовалось дополнительное ПО¹. Веб-сайт для этой книги содержит ряд различных файлов ПО Matlab и Simulink, которые помогут в разработке имитатора полета. Стратегия состоит в обеспечении базовыми файлами, которые передают нужную информацию между блоками, а также чтобы подтолкнуть к написанию работы для каждого модуля внутри системы. Этот проект создается сам по себе и требует успешного завершения каждой главы, прежде чем можно будет перейти к следующей главе. Чтобы дать понять, когда проект из каждой главы работает, в книгу включены графики и рисунки с веб-сайта, которые показывают выходные данные нашего имитатора на каждом этапе.

Задание на проектирование в гл. 2 состоит в разработке анимации летательного средства и в том, чтобы убедиться в правильности поворота корпуса летательного аппарата на экране. Обучающий курс в виде анимационной графики в Matlab приводится в приложении С. Задание в гл. 3 заключается в том, чтобы привести анимацию в действие, используя математическую модель абсолютно твердого тела в форме уравнений движения. В гл. 4 в имитационную модель добавляются силы и моменты сил, действующие на аппарат с неизменяемой формой крыла. Задание в гл. 5 состоит в применении команд ПО

¹ Авторы книги также читают курс с использованием общедоступного имитатора полета Aviones, который можно загрузить на сайте Sourceforge.net. Для тех, у кого нет доступа к ПО Matlab/Simulink и кто предпочитает разрабатывать проект в C/C++ может использовать Aviones.

Simulink trim и linmod, чтобы найти условия балансировки аппарата и вывести линейную передаточную функцию и модель в пространстве состояний системы МБЛА. Задание в гл. 6 — добавить блок автопилота, который использует действительные состояния для управления полетом летательного аппарата. В гл. 7 в имитатор добавляется модель датчиков, а в гл. 8 — схемы оценки состояний, для того чтобы оценивать состояния, необходимые для автопилота, используя доступные датчики. Результатом задания по проектированию в гл. 8 является система с закрытым контуром, которая регулирует воздушную скорость, высоту и курсовой угол, используя только доступную информацию датчика. Задание в гл. 9 состоит в аппроксимации поведения при закрытом контуре, используя простые модели проектирования, и в настройке параметров модели проектирования так, чтобы она в основном соответствовала поведению имитации полета с высокой степенью точности при закрытом контуре. Задание в гл. 10 состоит в разработке простых алгоритмов наведения для следования по прямым линиям и по круговым орбитам при наличии ветра. В гл. 11 следование по прямой линии и круговой орбите используется для синтеза более сложных траекторий с упором на следование по траекториям Дубинса. Задание в гл. 12 состоит во внедрении схемы планирования маршрута на основе алгоритма случайного дерева, чтобы планировать траектории Дубинса через поле препятствий. Задание по проектированию в гл. 13 заключается в нацеливании камеры на движущуюся наземную цель и оценке положения цели в инерциальной системе координат, используя для этого данные, полученные бортовыми датчиками (геолокация).

ГЛАВА 2

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При изучении беспилотных летательных аппаратов важно понять, как различные тела ориентируются друг относительно друга. Очевидней всего, что нужно понять, как самолет ориентируется относительно Земли. Также необходимо знать, как датчик (например бортовая камера) ориентируется относительно самолета или как антенна ориентируется относительно наземного источника сигнала. В этой главе приводится описание различных систем координат, используемых для описания положения и ориентации самолета и его бортовых датчиков, а также преобразование из одной системы координат в другую. Пользоваться несколькими различными системами координат необходимо по следующим причинам:

- Уравнения движения Ньютона выведены относительно неподвижной инерциальной системы отсчета. Однако движение проще всего описывается в системе отсчета неподвижного тела или связанной системе.
- Аэродинамические силы и моменты, действующие на корпус самолета, также проще всего описываются в связанной системе отсчета.
- Бортовые датчики, такие как акселерометры и датчики угловой скорости, получают информацию относительно связанной системы координат. Альтернативно этому GPS определяет положение, скорость относительно Земли и курсовой угол относительно инерциальной системы координат.
- Большинство требований к полету, таких как точки патрулирования и траектории полета, задаются в инерциальной системе координат. Кроме того, информация на карте также дается в инерциальной системе отсчета.

Одна система координат преобразуется в другую с помощью двух базовых операций: поворота и сдвига. В разделе 2.1 приводятся описание матриц вращения и их использование в преобразовании систем координат. В разделе 2.2 описываются специфические системы координат, используемые для миниатюрных летательных систем. В разделе 2.3 дается определение воздушной скорости, скорости относительно Земли и скорости ветра, а также демонстрируем связь между этими величинами. Это приводит к более детальному описанию в разделе 2.4 навигационного треугольника скоростей. В разделе 2.5 выводится выражение для дифференцирования вектора во вращающейся и перемещающейся системе координат.

2.1. Матрицы вращения

Рассмотрим две системы координат, представленных на рис. 2.1. Вектор \mathbf{p} может быть выражен в системе координат \mathcal{F}^0 (заданной $(\mathbf{i}^0, \mathbf{j}^0, \mathbf{k}^0)$) и в системе координат \mathcal{F}^1 (заданной $(\mathbf{i}^1, \mathbf{j}^1, \mathbf{k}^1)$). В системе координат \mathcal{F}^0 имеем

$$\mathbf{p} = p_x^0 \mathbf{i}^0 + p_y^0 \mathbf{j}^0 + p_z^0 \mathbf{k}^0.$$

Альтернативно этому в системе отсчета \mathcal{F}^1 имеем

$$\mathbf{p} = p_x^1 \mathbf{i}^1 + p_y^1 \mathbf{j}^1 + p_z^1 \mathbf{k}^1.$$

Системы векторов $(\mathbf{i}^0, \mathbf{j}^0, \mathbf{k}^0)$ и $(\mathbf{i}^1, \mathbf{j}^1, \mathbf{k}^1)$ по отдельности взаимно перпендикулярны системе единичных базисных векторов.

Приравнявая оба эти выражения друг другу, получим

$$p_x^1 \mathbf{i}^1 + p_y^1 \mathbf{j}^1 + p_z^1 \mathbf{k}^1 = p_x^0 \mathbf{i}^0 + p_y^0 \mathbf{j}^0 + p_z^0 \mathbf{k}^0.$$

Взяв скалярное произведение обеих сторон с \mathbf{i}^1 , \mathbf{j}^1 и \mathbf{k}^1 соответственно и сформировав полученные результаты в матричном виде, получим

$$\mathbf{p}^1 \triangleq \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^1 \cdot \mathbf{i}^0 & \mathbf{i}^1 \cdot \mathbf{j}^0 & \mathbf{i}^1 \cdot \mathbf{k}^0 \\ \mathbf{j}^1 \cdot \mathbf{i}^0 & \mathbf{j}^1 \cdot \mathbf{j}^0 & \mathbf{j}^1 \cdot \mathbf{k}^0 \\ \mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{i}^0 & \mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{j}^0 & \mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{k}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix}$$

Из геометрии на рис. 2.1 получим

$$\mathbf{p}^1 = \mathcal{R}_0^1 \mathbf{p}^0, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{R}_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Символ \mathcal{R}_0^1 используется для обозначения поворота из системы координат \mathcal{F}^0 в систему координат \mathcal{F}^1 .

Продолжая аналогичным образом, поворот системы координат по часовой стрелке вокруг оси y дает

$$\mathcal{R}_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

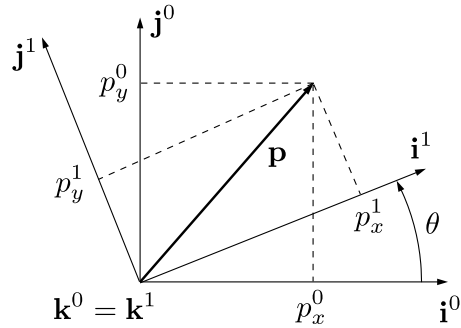


Рис. 2.1. Вращение в двумерном пространстве

и поворот по часовой стрелки системы координат вокруг оси x дает

$$\mathcal{R}_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось в [7], отрицательный знак у синусов появляется над линией с одними нулями и единицами.

Матрица \mathcal{R}_0^1 в приведенных выше уравнениях является примером более общего класса *ортонормальных* матриц поворота, которые имеют следующие свойства:

P.1. $(\mathcal{R}_a^b)^{-1} = (\mathcal{R}_a^b)^T = \mathcal{R}_b^a,$

P.2. $\mathcal{R}_b^c \mathcal{R}_a^b = \mathcal{R}_a^c,$

P.3. $\det(\mathcal{R}_a^b) = 1,$

где $\det(\cdot)$ является детерминантом матрицы.

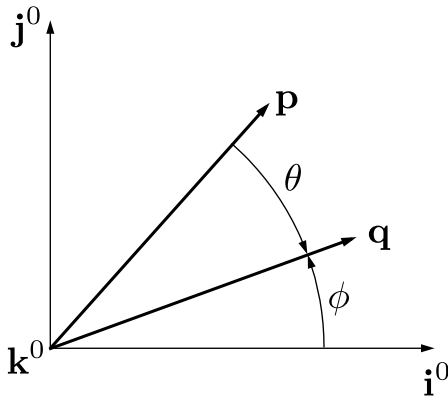


Рис. 2.2. Поворот \mathbf{p} вокруг оси \mathbf{k}^0

При выводе уравнения (2.1) следует отметить, что вектор \mathbf{p} остается постоянным и что новая система координат \mathcal{F}^1 была получена поворотом системы \mathcal{F}^0 по часовой стрелке на угол θ . Альтернативно этому матрицы вращений могут быть использованы для поворота вектора на заданный угол в неподвижной системе отсчета. В качестве примера рассмотрим поворот при вращении против часовой стрелки вектора \mathbf{p} в системе координат \mathcal{F}^0 вокруг оси \mathbf{k}^0 на угол θ , как это показано на рис. 2.2.

Предположив, что \mathbf{p} и \mathbf{q} находятся в плоскости $\mathbf{i}^0\text{-}\mathbf{j}^0$, можно записать компоненты \mathbf{p} и \mathbf{q} в виде

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \cos(\theta + \phi) \\ p \sin(\theta + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos \theta \cos \phi - p \sin \theta \sin \phi \\ p \sin \theta \cos \phi + p \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

и

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q \cos \phi \\ q \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $p \triangleq |\mathbf{p}| = q \triangleq |\mathbf{q}|$.

Выражая уравнение (2.2) в терминах (2.3), получим

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{q} = (\mathcal{R}_0^1)^T \mathbf{q}$$

и

$$\mathbf{q} = \mathcal{R}_0^1 \mathbf{p}.$$

В этом случае матрица вращения \mathcal{R}_0^1 может быть интерпретирована как поворот против часовой стрелки вектора \mathbf{p} на угол θ на место нового вектора \mathbf{q} в той же системе координат. Заметьте, что поворот вектора по часовой стрелке (в этом случае из \mathbf{q} в \mathbf{p}) можно получить с помощью $(\mathcal{R}_0^1)^T$. Эта интерпретация отличается от нашего первоначального использования матрицы вращения для преобразования неподвижного вектора \mathbf{p} из его представления в системе координат \mathcal{F}^0 в его представление в системе координат \mathcal{F}^1 , где \mathcal{F}^1 была получена из \mathcal{F}^0 поворотом по часовой стрелке.

2.2. Системы координат МБЛА

Чтобы получить и понять динамическое поведение МБЛА, потребуется несколько систем координат. В этом разделе определены и описаны следующие системы координат: инерциальная система координат, система координат летательного аппарата, система координат летательного аппарата-1, система координат летательного аппарата-2, связанная система координат, полусвязанная система координат и скоростная система координат. Инерциальная система координат и система координат летательного аппарата связаны между собой сдвигом, тогда как остальные системы координат — поворотами. Углами, определяющими относительную ориентацию летательного аппарата для системы координат летательного аппарата-1, летательного аппарата-2 и связанной системы координат, являются угол крена, угол тангажа и угол рыскания, которые описывают высоту самолета. Эти углы общеизвестны как углы Эйлера. Углы поворота, которые определяют системы координат относительной ориентации тела, его устойчивость и скорость ветра, являются углом атаки и углом бокового увода. На протяжении всей книги предполагается, что Земля плоская и что она не вращающаяся, что вполне обоснованно для МБЛА.

2.2.1. Инерциальная система координат \mathcal{F}^1

Инерциальная система координат связана с Землей с началом отсчета в заданном исходном положении. Как показано на рис. 2.3, единичный вектор \mathbf{i}^i направлен на север, \mathbf{j}^i направлен на восток, а \mathbf{k}^i направлен к центру Земли

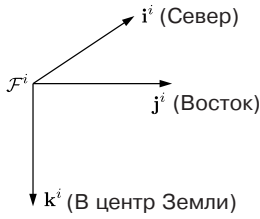


Рис. 2.3. Инерциальная система координат. Ось i^i указывает на север, ось j^i — на восток, а ось k^i нацелена в центр Земли

или вниз. Эту систему координат иногда называют системой отсчета север-восток-вниз по вертикали (СВВ). Обычно направление на север обозначают инерциальным x , на восток — инерциальным y , а направление вниз — инерциальным z .

2.2.2. Система координат летательного аппарата \mathcal{F}^v

Начало отсчета этой системы координат находится в центре тяжести МБЛА. Однако оси системы \mathcal{F}^v совпадают с осями инерциальной системы координат \mathcal{F}^i . Другими словами, единичный вектор i^v направлен на север, j^v направлен на восток, а ось k^v направлена в центр Земли, как показано на рис. 2.4.



Рис. 2.4. Система координат летательного аппарата. Ось i^v нацелена на север, ось j^v — на восток, а ось k^v направлена к центру Земли

2.2.3. Система координат летательного аппарата \mathcal{F}^{v1}

Начало отсчета системы координат летательного аппарата-1 идентично системе координат летательного аппарата: оно находится в центре тяжести самолета. Однако система \mathcal{F}^{v1} повернута по часовой стрелке вокруг оси k^v на путевой угол (или угол рысканья) ψ . При отсутствии дополнительных поворотов ось i^{v1} направлена к носу самолета, ось j^{v1} — на правое крыло, а k^{v1} совпадает с k^v и направлена к Земле. Система координат летательного аппарата-1 показана на рис. 2.5.

Преобразование из \mathcal{F}^v в \mathcal{F}^{v1} дается выражением

$$\mathbf{p}^{v1} = \mathcal{R}_v^{v1}(\psi) \mathbf{p}^v,$$

где

$$\mathcal{R}_{v^1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

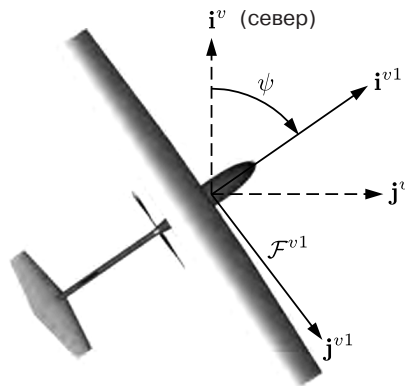


Рис. 2.5. Система координат летательного аппарата-1. Ось i^{v1} направлена в носовую часть самолета, ось j^{v1} нацелена на правое крыло, а ось k^{v1} направлена к центру Земли

2.2.4. Система координат летательного аппарата \mathcal{F}^{v2}

Начало отсчета системы координат-2 снова находится в центре тяжести летательного аппарата и получается поворотом системы координат летательного аппарата-1 по часовой стрелке вокруг оси j^{v1} на угол тангажа θ . Единичный вектор i^{v2} указывает на нос самолета, ось j^{v2} указывает на правое крыло, а ось k^{v2} указывает на фюзеляж самолета, как это показано на рис. 2.6.

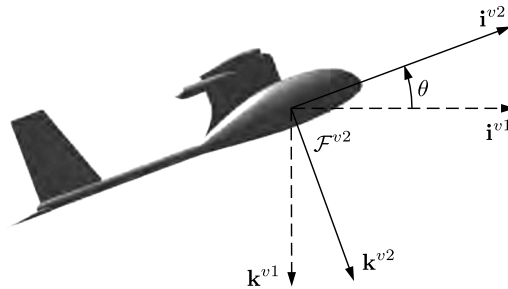


Рис. 2.6. Система координат летательного аппарата-2. Ось i^{v2} указывает на нос самолета, ось j^{v2} указывает на правое крыло, а ось k^{v2} указывает на фюзеляж

Преобразование из системы координат \mathcal{F}^{v1} в \mathcal{F}^{v2} дается выражением

$$\mathbf{p}^{v2} = \mathcal{R}_{v1}^{v2}(\theta) \mathbf{p}^{v1},$$

где

$$\mathcal{R}_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

2.2.5. Связанная система координат \mathcal{F}^b

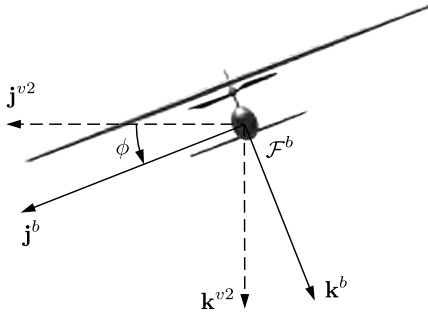


Рис. 2.7. Связанная система координат. Ось i^b направлена к носу самолета, ось j^b — на правое крыло, а ось k^b — к фюзеляжу

Связанная система координат получается поворотом системы координат летательного аппарата-2 по часовой стрелке вокруг оси i^{v2} на угол крена ϕ . Поэтому начало отсчета этой системы находится в центре тяжести; ось i^b направлена к носу самолета, ось j^b направлена на правое крыло, а ось k^b направлена на фюзеляж. Связанная система координат приведена на рис. 2.7. Направления, указываемые единичными векторами i^b , j^b и k^b , иногда называют направлениями тела x , y и z .

Преобразование системы координат F^{v2} в систему координат F^b дается выражением

$$\mathbf{p}^b = \mathcal{R}_{v2}^b(\phi) \mathbf{p}^{v2},$$

где

$$\mathcal{R}_{v2}^b(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Преобразование системы координат летательного аппарата в связанную систему координат задается выражением

$$\mathcal{R}_v^b(\phi, \theta, \psi) = \mathcal{R}_{v2}^b(\phi) \mathcal{R}_{v1}^{v2}(\theta) \mathcal{R}_v^{v1}(\psi) = \tag{2.4}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tag{2.5}$$

$$= \begin{pmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix},$$

где $c_\phi \triangleq \cos \phi$, а $s_\phi \triangleq \sin \phi$. Углы ϕ , θ и ψ обычно называют эйлеровыми углами. Углы Эйлера используются, т.к. они дают наглядные средние для представления ориентации тела в трехмерном пространстве. Последовательность поворотов ψ - θ - ϕ обычно используется для летательного аппарата и просто является одной из нескольких используемых систем углов Эйлера [8].

Физическая интерпретация углов Эйлера очевидна, и это способствует их широкому использованию. Представление в виде эйлеровых углов, однако,

имеет математическую сингулярность, которая может вызвать неустойчивость при расчетах. Для последовательности углов Эйлера ψ - θ - ϕ имеется сингулярность, когда угол тангажа θ равен $\pm 90^\circ$, а угол рыскания не определен. Эту сингулярность обычно называют заклинанием карданова подвеса. Распространенной альтернативой эйлеровым углам является кватернион. В то время как представлению кватерниона не хватает интуитивной привлекательности углов Эйлера, оно свободно от математических сингулярностей и в вычислительном плане более эффективно. Подход кватерниона обсуждается в приложении В.

2.2.6. Полусвященная система координат \mathcal{F}^s

Аэродинамические силы создаются по мере перемещения летательного аппарата через окружающий его воздух. Скорость самолета относительно окружающего его воздуха называется вектором скорости воздуха и обозначается как \mathbf{V}_a . Величина вектора скорости воздуха именуется воздушной скоростью, V_a . Для создания подъемной силы крылья самолета должны быть установлены под положительным углом относительно вектора скорости ветра. Этот угол называют углом атаки и обозначают α . Как показано на рис. 2.8, угол атаки определяется как угол поворота против часовой стрелки вокруг оси \mathbf{j}^b , такой, что \mathbf{i}^s совпадает с проекцией \mathbf{V}_a на плоскость, натянутую на \mathbf{i}^b и \mathbf{k}^b . Необходимость поворота против часовой стрелки вызвана определением положительного угла атаки, который положителен для поворота по часовой стрелке из оси полусвященной системы координат \mathbf{i}^s к оси \mathbf{i}^b связанной системы.

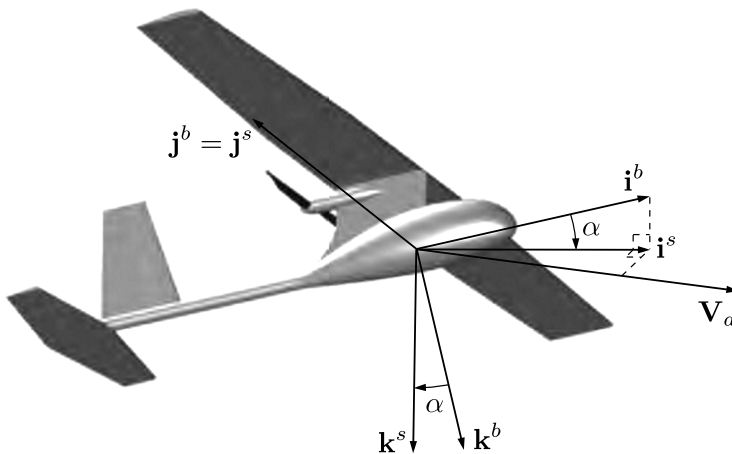


Рис. 2.8. Полусвященная система координат. Ось \mathbf{i}^s направлена вдоль проекции вектора скорости воздушного потока на плоскость \mathbf{i}^b - \mathbf{k}^b связанной системы координат, ось \mathbf{j}^s совпадает с осью \mathbf{j}^b связанной системы координат, а ось \mathbf{k}^s построена, чтобы получить правостороннюю систему координат. Заметьте, что угол атаки определен как поворот против часовой стрелки вокруг оси \mathbf{j}^b связанной системы координат

Поскольку α получается поворотом против часовой стрелки, то преобразование из \mathcal{F}^b в \mathcal{F}^s задается выражением

$$\mathbf{p}^s = \mathcal{R}_b^s(\alpha) \mathbf{p}^b,$$

где

$$\mathcal{R}_b^s(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

2.2.7. Скоростная система координат \mathcal{F}^w

Угол между вектором скорости ветра и плоскостью, образуемой осями \mathbf{i}^b и \mathbf{k}^b , носит название угол скольжения и обозначается β . Как показано на рис. 2.9, скоростная система координат получается поворотом полусвязанной системы координат по часовой стрелке на угол β вокруг оси \mathbf{k}^s . Единичный вектор \mathbf{i}^w совпадает с вектором скорости ветра \mathbf{V}_a .

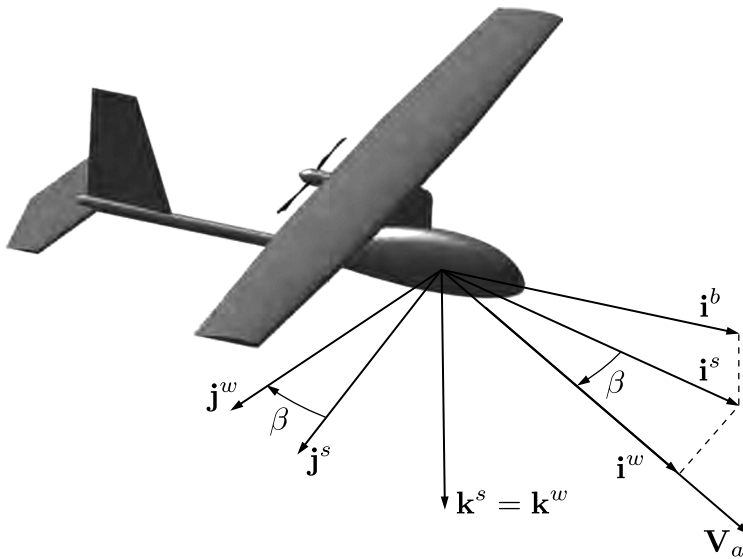


Рис. 2.9. Скоростная система координат. Ось \mathbf{i}^w направлена вдоль вектора скорости ветра

Преобразование из \mathcal{F}^s в \mathcal{F}^w дается выражением

$$\mathbf{p}^w = \mathcal{R}_s^w(\beta) \mathbf{p}^s,$$

где

$$\mathcal{R}_s^w(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование поворота из связанной системы координат в скоростную систему координат дается выражением

$$\mathcal{R}_b^w(\alpha, \beta) = \mathcal{R}_s^w(\beta) \mathcal{R}_b^s(\alpha) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Альтернативно этому преобразование из скоростной системы координат в связанную систему координат определяется выражением:

$$\mathcal{R}_w^b(\alpha, \beta) = (\mathcal{R}_b^w)^T(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

2.3. Воздушная скорость, скорость ветра и скорость относительно Земли

При получении динамических уравнений движения для МБЛА важно помнить, что инерционные силы, испытываемые МБЛА, зависят от скоростей и ускорений относительно фиксированной (инерциальной) системы координат. Аэродинамические силы, однако, зависят от скорости самолета относительно окружающего воздуха. При отсутствии ветра эти скорости совпадают. Однако ветер присутствует с МБЛА практически всегда, и необходимо тщательно различать воздушную скорость, определяемую скоростью относительно окружающего воздуха V_a , и скорость относительно Земли, определяемую скоростью относительно инерциальной системы координат V_g . Эти скорости связаны выражением

$$V_a = V_g - V_w, \quad (2.6)$$

где V_w является скоростью ветра относительно инерциальной системы координат.

Скорость МБЛА V_g может быть выражена в терминах компонент вдоль осей i^b , j^b и k^b :

$$V_g^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

где V_g^b является скоростью МБЛА *относительно инерциальной системы координат*, как это выражено в связанной системе. Аналогичным образом определим северную, восточную и направленную вниз компоненты скорости ветра как

w_n , w_e и w_d соответственно, то можно записать выражение для скорости ветра в связанной системе координат как:

$$\mathbf{V}_w^b = \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} = \mathcal{R}_v^b(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что вектор воздушной скорости \mathbf{V}_a является скоростью МБЛА относительно ветра, он может быть выражен в скоростной системе координат как

$$\mathbf{V}_a^w = \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определяя u_r , v_r и w_r как компоненты в фиксированной системе координат вектора воздушной скорости¹, это выражение можно переписать в фиксированной системе координат как

$$\mathbf{V}_a^b = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u_w \\ v - v_w \\ w - w_w \end{pmatrix}.$$

При разработке имитационной модели МБЛА u_r , v_r и w_r используются для вычисления аэродинамических сил и моментов сил, действующих на МБЛА. Компоненты скорости в связанной системе координат u , v и w характеризуют состояния системы МБЛА и могут быть без труда получены из решения уравнений движения. Компоненты скорости ветра u_w , v_w и w_w обычно поступают из модели ветра в качестве исходных данных для уравнений движения. Объединяя выражения, можно выразить вектор воздушной скорости в связанной системе координат в терминах модуля вектора воздушной скорости, угла атаки и угла бокового увода как

$$\mathbf{V}_a^b = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = \mathcal{R}_w^b \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что подразумевает

$$\begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = V_a \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

¹ В некоторых учебниках по механике полета u , v и w определяются как компоненты вектора воздушной скорости в связанной системе координат. Авторы книги определяют u , v и w как компоненты вектора скорости относительно Земли в связанной системе координат, а u_r , v_r и w_r — как компоненты вектора воздушной скорости в связанной системе координат, чтобы четко разделять их друг от друга.

Обращая эти соотношения, получим

$$\begin{aligned} V_a &= \sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}, \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{w_r}{u_r}\right), \\ \beta &= \sin^{-1}\left(\frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом того, что аэродинамические моменты и моменты сил обычно выражаются в терминах V_a , α и β , эти выражения важны для формулировки уравнений движения МБЛА.

2.4. Ветровой треугольник

В случае МБЛА скорость ветра часто находится в диапазоне от 20 до 50 % воздушной скорости. Важно понять, что ветер оказывает на МБЛА значительно большее воздействие, чем на крупные традиционные летательные аппараты, воздушная скорость которых обычно намного больше, чем скорость ветра. Введя понятие систем координат, скорости самолета, скорости ветра и вектора воздушной скорости, можно обсудить некоторые важные определения, относящиеся к навигации МБЛА.

Направление вектора скорости относительно Земли в инерциальной системе координат задается двумя углами. Это курсовой угол χ и (в инерциальной системе координат) угол наклона траектории полета γ . На рис. 2.10 показано, как определяются эти два угла. Угол наклона траектории полета γ определяется как угол между горизонтальной плоскостью и вектором скорости относительно Земли V_g , тогда как курсовой угол χ является углом между проекцией вектора скорости относительно Земли на горизонтальную плоскость и истинным направлением северного меридиана.

Связь между вектором скорости относительно Земли, вектором воздушной скорости и вектором скорости ветра, которая дается соотношением (2.6), носит название «навигационный треугольник скоростей». Более детальное отображение треугольника скоростей дается на горизонтальной плоскости рис. 2.11 и на вертикальной плоскости рис. 2.12. На рис. 2.11 показана скорость летательного аппарата, следующего по наземной траектории, представленной пунктирной линией. Направление на север указывает вектор \mathbf{i}^i , а направление, на которое направлен летательный аппарат, показывает вектор \mathbf{i}^b , который зафиксирован в направлении оси x связанной системы координат. Для горизонтального полета путевой угол (угол рыскания) ψ представляет собой угол между векторами \mathbf{i}^i и \mathbf{i}^b