Стабильные гомотопии и обобщённые гомологии

Дж. Ф. Адамс

УДК 515.14
ББК 22.152
А28

Адамс Дж. Ф.
Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии
Пер. с англ. под ред. Д. Каледина, с добавлениями А. Хаттори и В. М. Бухштабера
Электронное издание
М.: Изд-во МЦНМО, 2014
432 с.
ISBN 978-5-4439-2058-0

Эта книга — классический, стандартный в англоязычном мире учебник алгебраической топологии, наконец-то переведенный на русский язык. Тема книги — стабильная гомотопическая теория, обобщенные теории когомологий, техника спектров, формальные группы, связанные со ориентированными теориями гомологий; иными словами, все то, что идет сразу после таких базовых понятий алгебраической топологии, как группы гомологий и гомотопические группы.

Книга писалась по горячим следам, в начале 1970-х годов, но нисколько не утратила своей актуальности: то, что в момент написания было передним краем науки, блестяще выдержало проверку временем, и теперь составляет необходимую часть математического багажа любого работающего математика. Педагогическое мастерство и оригинальный стиль автора также хорошо известны, в том числе и русскоязычному читателю. Мы уверены, что книга будет интересна и полезна как математикам, работающим в других областях, так и студентам и аспирантам, да и просто людям, интересующимся современной математикой и ценящим ее красоту.

Перевод выполнен по изданию
Adams J. F. Stable Homotopy and Generalised Homology.
Chicago, The University of Chicago Press, 1974.

Подготовлено на основе книги: *Адамс Дж. Ф.* Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии / Пер. с англ. под ред. Д. Каледина, с добавлениями А. Хаттори и В. М. Бухштабера. — М.: Изд-во МЦНМО, 2013. — 432 с. — ISBN 978-5-4439-0207-4.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (495) 241-74-83
www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2058-0 © Издательство МЦНМО, 2014.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . 5
Предисловие . . . 11

Часть I. О работах С. П. Новикова об операциях в теории комплексных кобордизмов

§ 1. Введение . . . 13
§ 2. Группы кобордизмов . . . 14
§ 3. Гомологии . . . 17
§ 4. Классы Чженя Коннера—Флойда . . . 18
§ 5. Операции Новикова . . . 21
§ 6. Алгебра всех операций . . . 25
§ 7. Комментарий к докладу Новикова . . . 30
§ 8. Комплексные многообразия . . . 30

Часть II. О работах Квиллена о формальных группах и комплексном кобордизме

§ 0. Введение . . . 35
§ 1. Формальные группы . . . 35
§ 2. Примеры из алгебраической топологии . . . 39
§ 3. Переформулировки . . . 46
§ 4. Вычисления в E-гомологиях и когомологиях . . . 49
§ 5. Универсальное кольцо Лазара . . . 56
§ 6. Дальнейшие вычисления в E-гомологиях . . . 58
§ 7. Структура кольца Лазара . . . 64
§ 8. Теорема Квиллена . . . 73
§ 9. Следствия . . . 78
§ 10. Различные формулы в кольце $\pi_*(MU)$ . . . 81
§ 11. $MU_*(MU)$ . . . 84
§ 12. Свойства отображения Ботта . . . 90
§ 13. $K_*(K)$ . . . 95
§ 14. Теорема Хаттори—Стонга . . . 100
§ 15. Проекторы Квиллена . . . 101
§ 16. Спектр Брауна—Петерсона . . . 105
§ 17. $KO_*(KO)$ . . . 112
Литература . . . 114

Часть III. Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии

§ 1. Введение . . . 115
§ 2. Спектры . . . 122

§ 3. Элементарные свойства категории клеточных спектров 135
§ 4. Смэш-произведение 148
§ 5. Двойственность Спеньера—Уайтхеда 177
§ 6. Гомологии и когомологии 183
§ 7. Спектральная последовательность Атьи—Хирцебруха 200
§ 8. Обратный предел и его производные функторы 205
§ 9. Произведения 209
§ 10. Двойственность для многообразий 231
§ 11. Приложения в K-теории 250
§ 12. Алгебра Стинрода и двойственная к ней 258
§ 13. Теорема об универсальных коэффициентах 263
§ 14. Категория частных 273
§ 15. Спектральная последовательность Адамса 295
§ 16. Приложения: $\pi_*(bu \wedge X)$; модули над $K[x, y]$ 309
§ 17. Структура $\pi_*(bu \wedge bu)$ 328
Литература 345

Добавления

А. Хаттори. Целые характеристические числа стабильно комплексных многообразий

§ 1. Введение 347
§ 2. Замечания о K-теории 348
§ 3. Доказательство теоремы II 365
§ 4. Доказательство теоремы I 373
Литература 377

В. М. Бухштабер. Комплексные кобордизмы и формальные группы

Предисловие 378
§ 1. Введение 378
§ 2. Алгебра операций 380
§ 3. Классы Тома и гомоморфизмы Гизина 383
§ 4. Мультипликативные преобразования 389
§ 5. Формальная группа геометрических кобордизмов 392
§ 6. Операции Адамса—Новикова 394
§ 7. Универсальная формальная группа 396
§ 8. Степенные системы и двузначные формальные группы 400
§ 9. Квантовая группа когомологических операций в кобордизмах . . 406
§ 10. Кобордизмы в задачах о действиях групп на многообразиях 408
§ 11. Характер Чженя—Дольда 416
§ 12. Роды Хирцебруха 420
§ 13. Эллиптические формальные группы 424
§ 14. Общая проблема Милнора—Хирцебруха 426

ПРЕДИСЛОВИЕ

Три части этой книги — это записки трех курсов, которые я прочитал в Чикагском университете в 1967, 1970 и 1971 годах. Части имеют несколько разный характер. Лекции 1967 года посвящены некоторым аспектам работ Новикова о комплексных кобордизмах, в тот момент только появившихся — когда я готовил записки, у меня еще не было перевода полномасштабной статьи Новикова в Известиях АН СССР, сер. мат., том 31, вып. 4 (1967), с. 855–951. Курс читался в формате семинара, причем слушателям, знакомым с алгебраической топологией. Лекции 1970 года также предполагают некоторое знакомство с предметом, но этот курс был длиннее, и я попытался сделать изложение более полным; предмет курса — работы Квиллена о комплексных кобордизмах и формальных группах. Наконец, лекции 1971 года — это полноценный десятинедельный курс; я начинаю с самого начала и рассказываю многое из того, что должен знать аспирант о стабильной теории гомотопий и обобщенных теориях когомологий. Эти записки занимают две трети настоящей книги.

Я вообще не пытался переписать три части более единообразно, ни в том, что касается обозначений, ни в чем-либо еще. Каждая из частей снабжена собственным предисловием, в котором читатель найдет более подробное описание рассматриваемых тем. Система библиографических ссылок в каждой части также своя — в части I ссылки даны в тексте по мере необходимости, в части II они собраны в конце, причем часть I появляется как ссылка [2], в части III ссылки опять же в конце, а часть II появляется как ссылка [2]. Впрочем — как я надеюсь — номера страниц в ссылках на [2] соответствуют номерам страниц настоящей книги.

Хотя я и не пытался достичь единообразия редактурой, некоторая общность темы все равно присутствует. Из понятий, которые считаются известными в части I, упомяну следующие: спектры, произведения, производный функтор обратного предела. Все это изложено в части III, а именно в § 2–3, 9 и 8. Аналогичным образом, почти с самого начала части II я предполагаю известным, что спектр задает обобщенную теорию когомологий и гомологий; это объяснено в § 6 части III. Кроме того, в конце § 2 части I я отсылаю читателя к литературе за информацией о $\pi_*(MU)$; с тем же успехом эту информацию можно найти в § 8 части II. Отсюда можно заключить, что при выборе материала, методов и результатов для последующих курсов я имел в виду приложения, о которых я уже читал лекции, и другие известные мне приложения.

Я мог бы назвать и другие места, в которых три части настоящей книги перекрывают друг друга, но читателю, возможно, полезно будет обнаружить эти пересечения самостоятельно; и, разумеется, части можно читать в любом порядке, руководствуясь собственным вкусом. Специалисту моя помощь вряд ли нужна; при первом знакомстве с предметом, по-видимому, лучше всего начать с первых десяти параграфов третьей части.

В заключение я хотел бы выразить благодарность тем, кто принимал меня в Чикагском университете, а также Р. Мингу, который сделал черновые записи лекций для части III.

Часть I

О РАБОТАХ С. П. НОВИКОВА ОБ ОПЕРАЦИЯХ В ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ КОБОРДИЗМОВ

§ 1. Введение

Обсуждаемая работа С. П. Новикова была представлена на Международном математическом конгрессе в Москве в 1966 г., в получасовой лекции, семинаре и последующих обсуждениях. Результаты были анонсированы в краткой заметке в Докладах АН СССР (1967. Т. 172. С. 33–36) [1]. Некоторые из результатов Новикова независимо получил П. С. Ландвебер (*Landweber P. S.* Cobordism operations and Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 129. P. 94–110).

Цель настоящих записок — дать обзор той части работы Новикова, где обсуждаются операции в теории комплексных кобордизмов. Я надеюсь, что это небесполезно — на мой взгляд, обобщенную теорию когомологий, даваемую комплексными кобордизмами, сейчас уже вполне можно применять в практике [2]. Поэтому я попытался дать достаточное количество подробностей, с тем чтобы читатель, имеющий в виду какую-либо конкретную задачу, мог сразу приступить к вычислениям. В частности, я привожу некоторые формулы, которых в вышеупомянутых источниках нет.

Остальные темы, затронутые в этих источниках, я обхожу стороной, и, среди прочего, следующее:

(i) обобщения спектральной последовательности Адамса, в которых обычные когомологии заменяются на какую-либо обобщенную теорию когомологий;

(ii) связь между результатами о комплексных кобордизмах $\Omega_U^*(X, Y)$ и аналогичными результатами о комплексной K-теории $K^*(X, Y)$;

(iii) когомологический функтор $\Omega_U^*(X, Y) \otimes \mathbb{Q}_p$ (где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел a/b, b взаимно просто с p) и его расщепление в сумму прямых слагаемых.

---

1 Все результаты С. П. Новикова были опубликованы с полными доказательствами вскоре после этих лекций Адамса, см. предисловие автора. — *Прим. ред.*

2 См. добавление «Комплексные кобордизмы и формальные группы». — *Прим. ред.*

§ 2. Группы кобордизмов

Пусть ξ — главное расслоение над клеточным пространством X со структурной группой $U(n)$. Обозначим через E и E_0 тотальные пространства расслоений, ассоциированных с ξ, слоями которых являются соответственно диски $E^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ и сферы $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ единичного радиуса. Тогда пространство Тома есть по определению факторпространство E/E_0. Это клеточное пространство с отмеченной точкой. Если ξ — универсальное $U(n)$-расслоение над $BU(n)$, то соответствующее пространство Тома $M(\xi)$ мы будем обозначать через $MU(n)$.

Пример 2.1. Пространства $MU(1)$ и $BU(1)$ гомотопически эквивалентны.

Доказательство. Так как E — расслоение со стягиваемыми слоями, проекция $p\colon E \to BU(1)$ и нулевое сечение $s_0\colon BU(1) \to E$ взаимно обратны в классе гомотопически эквивалентных отображений. Из отождествления $S^1 = U(1)$ следует, что E_0 — тотальное пространство универсального главного $U(1)$-расслоения над $BU(1)$. Поэтому E_0 стягиваемо, а следовательно, отображение факторизации $E \to E/E_0$ есть гомотопическая эквивалентность. $\square$

Мы имеем очевидное отображение $S^2MU(n) \xrightarrow{i_n} MU(n+1)$. Поэтому последовательность пространств

$$\{MU(0), MU(1), MU(2), \ldots, MU(n), \ldots\},$$

связанных последовательностью отображений i_n, образует спектр. С этим спектром канонически связан когомологический функтор; см. *Whitehead G. W.* Generalized homology theories // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 102. P. 227–283[3]. Соответствующие группы когомологий называются группами комплексных кобордизмов и обозначаются $\Omega_U^q(X, Y)$. Другое изложение см. в работах *Atiyah M. F.* Bordism and cobordism // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1961. Vol. 57. P. 200–208, а также *Conner P. E., Floyd E. E.* The relation of cobordism to K-theories. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1966. P. 25–28. (Lecture Notes in Mathematics, No. 28).[4]

3 Или часть III настоящей книги. — *Прим. ред.*

4 Имеется перевод: *Коннер П., Флойд Э.* О соотношении теории бордизмов и K-теории. Дополнение к кн.: *Коннер П., Флойд Э.* Гладкие периодические отображения. М.: Мир, 1969. С. 231–233. — *Прим. ред.*

Мы обычно будем предполагать, что когомологический функтор определен на какой-либо категории спектров или стабильных объектов [5]. По желанию читателя, это предположение можно снять за счет некоторого усложнения доказательств: надо только заменить соответствующие спектры на последовательности комплексов, которые их приближают.

Далее, мы хотим ввести в этой теории когомологий $\cup$-умножения. Иными словами, мы хотим определить отображение

$$\mu\colon\ MU\wedge MU \to MU.$$

Здесь $\wedge$ обозначает смэш-умножения, причем мы считаем, что $MU\wedge\wedge MU$ в нашей стабильной категории определено. Кроме того, мы предполагаем, что для $MU\wedge MU$ в каком-либо разумном смысле также определены остовы $(MU\wedge MU)^q$, так что мы имеем следующую короткую точную последовательность:

$$0\to \operatorname*{Lim}_q{}^1[S(MU\wedge MU)^q, MU]\to [MU\wedge MU, MU]\to \\ \to \operatorname*{Lim}_q{}^0[(MU\wedge MU)^q, MU]\to 0.$$

(Здесь Lim^0 обозначает обратный предел, Lim^1 — его первый производный функтор, а через $[X, Y]$ обозначена группа стабильных гомотопических классов отображений из X в Y в нашей категории стабильных объектов.) В этой точной последовательности группа $\operatorname*{Lim}_q{}^1[S(MU\wedge MU)^q, MU]$ обращается в ноль. (Это следует из того, что $H_r(MU\wedge MU)=0$ для нечетных r, а $\pi_r(MU)=0$ для четных r, что будет показано ниже. Поэтому в спектральной последовательности

$$H^*(MU\wedge MU;\pi_*(MU))\Rightarrow [MU\wedge MU, MU]$$

все дифференциалы равны нулю.) Таким образом, достаточно определить элемент группы $\operatorname*{Lim}_q{}^0[S(MU\wedge MU)^q, MU]$.

Для этого рассмотрим отображение

$$BU(n)\times BU(m)\to BU(n+m),$$

— классифицирующее отображение суммы Уитни универсальных главных расслоений над $BU(n)$ и $BU(m)$. Оно индуцирует отображе-

5 Во время написания этого текста понятие спектра еще не устоялось. — *Прим. ред.*

ние пространств Тома

$$\mu_{n,m}\colon MU(n)\wedge MU(m)\to MU(n+m).$$

Отображения $\mu_{n,m}$ определяют элемент $\operatorname*{Lim}_q^0[(MU\wedge MU)^q, MU]$, и тем самым однозначно задают гомотопический класс отображений

$$\mu\colon MU\wedge MU\to MU.$$

Отображение μ коммутативно и ассоциативно (с точностью до гомотопии).

Умножение на кобордизмах задается отображением μ. Точнее, у нас есть умножение

$$\Omega_U^q(X)\otimes\Omega_U^r(Y)\to\Omega_U^{q+r}(X\wedge Y),$$

где X и Y — спектры, а потому мы можем ввести аналогичные произведения и для приведенных групп $\widetilde{\Omega}_U^*$, где X и Y — пространства. Для пространств мы имеем также внешнее умножение

$$\Omega_U^q(X,A)\otimes\Omega_U^r(Y,B)\to\Omega_U^{q+r}(X\times Y, A\times Y\cup X\times B)$$

и внутреннее умножение

$$\Omega_U^q(X,A)\otimes\Omega_U^r(Y,B)\to\Omega_U^{q+r}(X\times Y, A\cup B).$$

Эти умножение удовлетворяют аксиомам, которым и должны удовлетворять, а именно: естественность, ассоциативность, антикоммутативность, существование единицы, а также согласованность с надстройкой и кограницей.

Далее следует ввести изоморфизм Тома. Для любого главного $U(n)$-расслоения ξ над X классифицирующее отображение для ξ индуцирует отображение

$$\gamma\colon M(\xi)\to MU(n).$$

Отображение γ представляет канонический элемент $g\in\Omega_U^{2n}(E,E_0)$. Определим изоморфизм Тома

$$\varphi\colon \Omega_U^q(X)\to\Omega_U^{q+2n}(E,E_0),$$

по формуле $\varphi(x)=(p^*x)g$ (см. *Dold A.* Relations between ordinary and extraordinary homology // Colloq. Algebraic Topology. Inst. Math. Aarhus Univ., 1962. P. 2–9).

Наконец, последнее, что нужно знать для изучения когомологического функтора Ω_U — это группы коэффициентов $\Omega_U^q(pt)$, где pt — точка. Кольцо $\Omega_U^*(pt)$ есть кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots]$, где $x_i \in \Omega_U^{-2i}(pt)$. Хорошее изложение вычисления $\Omega_U^*(pt)$ можно найти у следующих авторов[6]: *Milnor J.* On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I // Amer. Jour. Math. 1960. Vol. 82. P. 505–521; *Stong R.* Relations among characteristic numbers. I // Topology. 1965. Vol. 4. P. 267–281; *Hattori A.* Integral characteristic numbers for weakly almost complex manifolds // Topology. 1966. Vol. 5. P. 259–280.

§ 3. Гомологии

Операции Новикова тесно связаны с некоторыми многочленами от классов Чженя Коннера—Флойда. (Эти классы описаны в *Conner, Floyd*, op. cit., P. 48–52.) Удобно начать с определения этих многочленов от обычных классов Чженя.

Отображение $BU(n) \times BU(m) \to BU(n+m)$, индуцированное суммой Уитни расслоений, определяет умножение в $H_*(BU)$. Поскольку $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$, группа $H^*(BU(1))$ имеет $\mathbb{Z}$-базис, состоящий из элементов 1, x, x^2, x^3, …, где $x \in H^2(BU(1))$ — образующая. Возьмем двойственный базис в $H_*(BU(1))$ и обозначим его b_0, b_1, b_2, b_3, … Вложение $BU(1) \to BU$ переводит эти элементы в элементы группы $H_*(BU)$, которые можно перемножать. Поэтому $H_*(BU)$ имеет $\mathbb{Z}$-базис, состоящий из мономов

$$b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} b_3^{\nu_3} \ldots \quad (b_0 = 1).$$

Возьмем двойственный базис в $H^*(BU)$ и обозначим его элементы через c_ν, где ν пробегает последовательности натуральных чисел

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots),$$

в которых только конечное число членов отлично от нуля. Тогда $c_\nu \in H^{2|\nu|}(BU)$, где $|\nu| = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots$ Если мы возьмем $\nu = (i, 0, 0, \ldots)$, то получим классический i-й класс Чженя c_i.

6 Первое детальное вычисление кольцевой структуры $\Omega^*(pt)$ см. в работе С. П. Новикова «Гомотопические свойства комплексов Тома» (Матем. сборник. 1962. Т. 57, № 4. С. 406–442); см. также добавление «Комплексные кобордизмы и формальные группы». — *Прим. В. М. Бухштабера.*

Таким образом, получаем базис в $H^*(BU)$, приспособленный для вычисления суммы Уитни. Очевидно, что это полезно при изучении когомологий $H^*(MU)$, так как на них есть отображение суммы Уитни, а отображения $\cup$-умножения нет [7].

В дальнейшем нам понадобится описание групп $H_*(MU)$, определяемых как

$$H_{2i}(MU) = \lim_{n\to\infty} H_{2n+2i}(MU(n)).$$

Сумма Уитни $MU(n) \wedge MU(m) \to MU(n+m)$ индуцирует умножение в $H_*(MU)$. Взяв предел изоморфизмов Тома

$$\varphi\colon\ H^q(BU(n)) \to H^{q+2n}(MU(n)),$$

получаем изоморфизм

$$\varphi\colon\ H^q(BU) \to H^q(MU),$$

а также аналогичный изоморфизм для гомологий. В частности, мы имеем «изоморфизм Тома»

$$\varphi\colon\ H_*(BU) \to H_*(MU),$$

который коммутирует с произведениями. Таким образом, кольцо $H_*(MU)$ — кольцо многочленов от переменных b_1', b_2', b_3', …, соответствующих b_1, b_2, b_3, … при изоморфизме Тома. Это эквивалентно следующему описанию образующих: рассмотрим образующие $b_i \in$ $\in H_{2i}(BU(1))$, возьмем их образы $b_i' \in H_{2i+2}(MU(1))$ при изоморфизме Тома и применим инъекцию

$$H_{2i+2}(MU(1)) \to H_{2i}(MU).$$

Заметим, что при гомотопической эквивалентности $MU(1) \sim BU(1)$ классу $b_i' \in H_{2i+2}(MU(1))$ соответствует класс $b_{i+1} \in H_{2i+2}(BU(1))$.

§ 4. Классы Чженя Коннера—Флойда

Коннер и Флойд берут унитарное n-мерное расслоение ξ над клеточным пространством X и строят по нему характеристические классы, которые, однако, лежат не в обычных когомологиях $H^*(X)$, а в $\Omega_U^*(X)$.

7 Диагональные отображения $MU(n) \to MU(n) \times MU(n)$, индуцирующие произведение в когомологиях, не согласованы с изоморфизмом Тома. — *Прим. ред.*

Теорема 4.1. *С каждым расслоением ξ над X и с каждым $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ можно связать $cf_\alpha(\xi) \in \Omega_U^{2|\alpha|}(X)$, которые называются классами Чженя Коннера—Флойда, удовлетворяющие следующим свойствам*:

(i) $cf_0(\xi) = 1$;
(ii) *естественность*: $cf_\alpha(g^*\xi) = g^*\, cf_\alpha(\xi)$;
(iii) *формула Уитни для суммы*: $cf_\alpha(\xi \oplus \eta) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} cf_\beta(\xi)\, cf_\gamma(\eta)$;
(iv) *пусть ξ — линейное расслоение над X, которое классифицируется отображением $X \xrightarrow{f} BU(1)$, и пусть композиция отображений $X \xrightarrow{f} BU(1) \to MU(1)$ представляет элемент $\omega \in \Omega_U^2(X)$. Тогда*
$$cf_\alpha(\xi) = \sum_{i \geqslant 0} (c_\alpha, b_i)\omega^i.$$

Замечания. В (iii) сложение последовательностей β и γ происходит почленно, то есть если
$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots),$$
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots),$$
то
$$\beta + \gamma = (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2, \beta_3 + \gamma_3, \ldots).$$
Здесь $cf_\beta(\xi)$ и $cf_\gamma(\eta)$ умножаются в кольце кобордизмов $\Omega_U(X)$.

В (iv) отображение $BU(1) \to MU(1)$ — гомотопическая эквивалентность из примера 2.1. Целое число (c_α, b_i) — спаривание Кронекера $H^*(BU)$ и $H_*(BU)$ со значениями в $\mathbb{Z}$. Сумма по i — иллюзия, так как ненулевой вклад дает только член с $i = |\alpha|$. Формула означает лишь то, что cf_α равен $\omega^{|\alpha|}$, если α имеет вид $(0, 0, 0, \ldots)$ или $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, и нулю в остальных случаях. Тем не менее, использовать коэффициенты (c_α, b_i) удобно для вычислений, и это позволяет избежать перебора случаев.

Набросок доказательства теоремы 4.1. Определение обычных классов Чженя с помощью метода Гротендика точно так же работает для обобщенных теорий когомологий, что позволяет определить $cf_1, cf_2, cf_3, \ldots$ (см. *Conner, Floyd*, op. cit.). Конечно, Коннер и Флойд ограничиваются рассмотрением конечных клеточных пространств (хотя их аргументация также проходит и для конечномерных клеточных пространств). Следовательно, необходимо показать, что
$$\operatorname*{Lim}_q{}^1\, \Omega_U^*((BU(n))^q) = 0,$$

откуда будет следовать, что cf_i определяет элемент $\Omega_U^*(BU(n))$ (или, если потребуется, $\Omega_U^*(BU)$). Поэтому по свойству естественности (ii) классы cf_i определены для всех $U(n)$-расслоений. С помощью тех же методов можно перенести утверждения пунктов (iii) и (iv) в нашу ситуацию, более общую, чем у Коннера и Флойда. Эти методы работают, так как группы Lim^1 для пространств $BU(n) \times BU(m)$ и $BU(1)$ равны нулю.

До этого момента мы рассматривали только классы $cf_1, cf_2, cf_3, \ldots$ Любой элемент из $H^*(BU)$ может быть записан единственным образом как многочлен от обычных классов Чженя $c_1, c_2, c_3, \ldots$, скажем

$$c_\alpha = P_\alpha(c_1, c_2, c_3, \ldots).$$

Мы определяем cf_α как тот же многочлен, но от переменных cf_1, cf_2, $cf_3, \ldots$:

$$cf_\alpha = P_\alpha(cf_1, cf_2, cf_3, \ldots).$$

Разумеется, одно из преимуществ такого подхода в том, что мы избегаем упоминания об алгебре симметрических многочленов. По настойчивой рекомендации моих друзей проясню связь P_α с симметрическими многочленами. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ — элементарные симметрические функции от достаточного числа переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$P_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots) = \sum x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

где сумма берется по всем таким наборам $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, что число показателей m_i, равных 1, есть α_1, число m_i, равных 2, есть α_2, число m_i, равных j, есть α_j, а остальные m_i равны нулю.

Однако и для практических вычислений, и для абстрактных доказательств, я рекомендую изучать не кольцо симметрических многочленов, а двойственные другу другу кольца $H_*(BU)$ и $H^*(BU)$.

После того, как мы определили классы cf_α, формула для суммы Уитни (iii) выводится из своего частного случая

$$cf_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} cf_i(\xi)\, cf_j(\eta)$$

с помощью несложных выкладок. Аналогично, формулу для линейных расслоений (iv) можно вывести из частного случая

$$cf_i(\xi) = \begin{cases} 1, & i=0,\\ \omega, & i=1,\\ 0, & i>1. \end{cases} \qquad \square$$

§ 5. Операции Новикова

В своей работе Новиков для определения операций пользуется следующей основной аналогией: если квадратам Стинрода соответствуют классы Штифеля—Уитни, то операциям Новикова должны соответствовать характеристические классы Коннера—Флойда. Четкая формулировка этого дана ниже, в теореме 5.1 (vii).

Теорема 5.1 (С. П. Новиков). *Для каждой последовательности* $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ *существует операция*

$$s_\alpha\colon \Omega_U^q(X,Y) \to \Omega_U^{q+2|\alpha|}(X,Y)$$

со следующими свойствами:

(i) $s_0=1$ — *тождественная операция*;
(ii) s_α *обладает свойством естественности*: $s_\alpha f^* = f^* s_\alpha$;
(iii) s_α *стабильна*: $s_\alpha \delta = \delta s_\alpha$;
(iv) s_α *аддитивна*: $s_\alpha(x+y) = s_\alpha(x) + s_\alpha(y)$;
(v) *формула Картана* $s_\alpha(xy) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} s_\beta(x) s_\gamma(y)$;
(vi) *пусть элемент* $\omega \in \Omega^2(X)$ *представлен отображением* $X \xrightarrow{g} MU(1)$, *тогда*

$$s_\alpha(\omega) = \sum_i (c_\alpha, b_i)\omega^{i+1};$$

(vii) *пусть* ξ — *унитарное* n-*мерное расслоение над* X. *Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \Omega_U^{2n}(E,E_0) \arrow[r, "s_\alpha"] & \Omega_U^{2n+2|\alpha|}(E,E_0) \\ \Omega_U^0(X) \arrow[r, "cf_\alpha"] \arrow[u, "\varphi", "\cong"'] & \Omega_U^{2|\alpha|}(X) \arrow[u, "\varphi", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

(здесь пара E, E_0 *та же, что и в* § 2, *а* φ — *изоморфизм Тома для* Ω_U^**). Тогда* $cf_\alpha(\xi) = \varphi^{-1} s_\alpha \varphi 1$.

Замечания. В (v) сложение последовательностей β и γ происходит почленно. Произведение xy можно понимать в одном из трех смыслов, описанных выше; тогда в том же смысле надо понимать и произведение $s_\beta(x)s_\gamma(y)$. Кроме того, по поводу коэффициентов (c_α, b_i) из (vi) см. замечание к теореме 4.1 (iv).

Набросок доказательства. В качестве определения операций мы возьмем свойство (vii). Точнее, имеем изоморфизм Тома

$$\varphi\colon\ \Omega^*_U(BU(n)) \to \widetilde{\Omega}^*_U(MU(n)).$$

Рассмотрим элементы $\varphi(cf_\alpha) \in \widetilde{\Omega}^{2n+2|\alpha|}_U(MU(n))$. Они определяют элемент $s_\alpha \in \Omega^{2|\alpha|}(MU)$ (мы используем рассуждение с обращением в ноль Lim^1). Этот элемент определяет когомологическую операцию на Ω^*_U.

Таким образом, свойство (vii) сразу же следует из определения, свойства же (ii), (iii) и (iv) тривиальны. Например, пусть $x, y\colon X \to MU$ — некоторые отображения; если мы представим s_α отображением $s\colon MU \to S^{2a}MU$, то отображения $s(x+y)$ и $s(x) + {}$ $+ s(y)\colon X \to S^{2a}MU$ гомотопны, поскольку мы работаем в стабильной категории.

Утверждения (i), (v) и (vi) получаются из утверждений (i), (iii) и (iv) теоремы 4.1 для классов Коннера—Флойда с помощью соответствующих свойств изоморфизма Тома φ. Например, для доказательства (v) достаточно рассмотреть случай, когда x и y оба отвечают тождественному отображению $i\colon MU \to MU$, а xy будет тем самым отвечать произведению $\mu\colon MU \wedge MU \to MU$. Вновь используя рассуждение с Lim^1, получаем, что достаточно рассмотреть случай, когда x и y — образующие $\widetilde{\Omega}^{2n}_U(MU(n))$ и $\widetilde{\Omega}^{2m}_U(MU(m))$. А теперь воспользуемся тем фактом, что если ξ — $U(n)$-расслоение над X, а η — $U(m)$-расслоение над Y, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Omega}^{p+2n}_U(M(\xi)) \otimes \widetilde{\Omega}^{q+2m}_U(M(\eta)) \arrow[r, "\text{умножение}"] & \widetilde{\Omega}^{p+q+2n+2m}(M(\xi) \wedge M(\eta)) \arrow[d, equal] \\
 & \widetilde{\Omega}^{p+q+2n+2m}(M(\xi \times \eta)) \\
\Omega^p_U(X) \otimes \Omega^q_U(Y) \arrow[uu, "\varphi_\xi\otimes\varphi_\eta"] \arrow[r, "\text{умножение}"] & \Omega^{p+q}_U(X \times Y). \arrow[u, "\varphi_{\xi\times\eta}"']
\end{tikzcd}$$

Применяем мы ее, разумеется, в случае, когда ξ — универсальное расслоение над $BU(n)$, а η — универсальное расслоение над $BU(m)$.

Для доказательства (vi) надо знать, что для универсального $U(1)$-расслоения над $BU(1)$ гомоморфизм

$$\Omega_U^{2i}(BU(1)) \to \widetilde{\Omega}_U^{2i+2}(MU(1)) = \Omega_U^{2i+2}(MU(1)) \quad (i \geqslant 0)$$

переводит ϖ^i в ϖ^{i+1}. (Здесь ϖ — универсальный элемент в $\Omega_U^2(BU(1))$ или $\widetilde{\Omega}_U^2(MU(1))$.) □

Так как s_α — гомотопический класс отображения

$$MU \to S^{2|\alpha|}MU,$$

он индуцирует гомоморфизм

$$s_\alpha\colon H_q(MU) \to H_{q-2|\alpha|}MU.$$

Разумно спросить, можно ли явно описать этот гомоморфизм. В § 3 мы видели, что $H_*(MU)$ — кольцо многочленов. Поэтому мы выясним (i) как s_α коммутирует с умножением, и (ii) как s_α действует на образующих b_i'. Положим $b' = \sum_{i=0}^\infty b_i'$; достаточно вычислить $s_\alpha(b')$, так как потом его можно опять разложить на компоненты.

Теорема 5.2. (i) *Если $x, y \in H_*(MU)$, то*

$$s_\alpha(xy) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} s_\beta(x)s_\gamma(y).$$

(ii) $s_\alpha(b') = \sum_{i\geqslant 0}(c_\alpha, b_i)(b')^{i+1}$.

Набросок доказательства. Часть (i). Согласно теореме 5.1 (v) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
MU \wedge MU \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\sum\limits_{\beta+\gamma=\alpha} s_\beta\wedge s_\gamma"'] & MU \arrow[d, "s_\alpha"] \\
\bigvee\limits_{\beta+\gamma=\alpha} S^{2|\beta|}MU \wedge S^{2|\gamma|}MU \arrow[r, "\mu"] & S^{2|\alpha|}MU.
\end{tikzcd}$$

Чтобы завершить доказательство, рассмотрим отображения, индуцированные в гомологиях.

Часть (ii). Так как образующие b_t' приходят из $MU(1)$, мы можем воспользоваться теоремой 5.1 (vi). Пусть ω — каноническая образующая в $\Omega^2(MU(1))$. Мы хотим узнать, как действует на группах гомологий элемент $\omega^{i+1}\in\Omega^{2i+2}(MU(1))$, иными словами, как действует следующая композиция отображений:

$$\begin{tikzcd} MU(1) \arrow[r, "\Delta"] & MU(1)\wedge MU(1)\wedge\ldots\wedge MU(1) \quad (i+1 \text{ раз}) \arrow[d, "\mu"] \\ & MU(i+1). \end{tikzcd}$$

Но диагональное отображение

$$BU(1)\xrightarrow{\Delta} BU(1)\times BU(1)\times\ldots\times BU(1)$$

индуцирует отображение в когомологиях

$$\Delta^*(x^{u_1}\otimes x^{u_2}\otimes\ldots\otimes x^{u_{i+1}}) = x^{u_1+u_2+\ldots+u_{i+1}}.$$

Следовательно, в гомологиях индуцируется отображение

$$\Delta_* b_t = \sum_{u_1+u_2+\ldots+u_{i+1}=t} b_{u_1}\otimes b_{u_2}\otimes\ldots\otimes b_{u_{i+1}}.$$

Отображение в группах $\widetilde{H}_*$, индуцированное отображением Δ, дается той же формулой, однако в ней надо считать, что $b_0=0$. Далее, напомним, что b'_t в $MU(1)$ соответствует b_{t+1} в $BU(1)$. Отсюда получаем, что

$$\Delta_* b'_t = \sum_{u_1+u_2+\ldots+u_{i+1}=t-i} b'_{u_1}\otimes b'_{u_2}\otimes\ldots\otimes b'_{u_{i+1}}$$

и

$$\mu_*\Delta_* b'_t = \sum_{u_1+u_2+\ldots+u_{i+1}=t-i} b'_{u_1} b'_{u_2}\ldots b'_{u_{i+1}}.$$

Складывая все члены, получаем, что

$$\mu_*\Delta_* b' = (b')^{i+1}.$$

По теореме 5.1 (vi) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & S^2 MU \arrow[dr, "s_\alpha"] & \\ MU(1) \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[rr, "(c_\alpha, b_{|\alpha|})\bar{\omega}^{|\alpha|+1}"'] & & S^{2|\alpha|+2} MU. \end{tikzcd}$$

Переходим к отображениям, индуцированным в группах гомологий, и получаем требуемое. $\square$

Следствие 5.3. *Отображение* $s_\alpha\colon H^0(MU)\to H^{2|\alpha|}(MU)$ *задается формулой*

$$s_\alpha\varphi 1=\varphi c_\alpha.$$

Доказательство. По теореме 5.2 (ii)

$$s_\alpha(b_i')=\begin{cases}0, & \text{если } i<|\alpha| \quad \text{(тривиально)};\\ (c_\alpha, b_i)1, & \text{если } i=|\alpha|.\end{cases}$$

Используя теорему 5.2 (i), получаем

$$s_\alpha(b_{i_1}'b_{i_2}'\dots b_{i_r}')=\sum_{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r=\alpha}(s_{\beta_1}b_{i_1}')(s_{\beta_2}b_{i_2}')\dots(s_{\beta_r}b_{i_r}').$$

Если мы предположим, что $i_1+i_2+\ldots+i_r=|\alpha|$, то единственными ненулевыми слагаемыми в сумме будут те, для которых

$$|\beta_1|=i_1,\ |\beta_2|=i_2,\ \ldots,\ |\beta_r|=i_r.$$

Тем самым мы получаем

$$\sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r}(c_{\beta_1}, b_{i_1})(c_{\beta_2}, b_{i_2})\dots(c_{\beta_r}, b_{i_r})1,$$

где сумма берется по всем $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$. Отсюда, разумеется, можно вычислить

$$(c_\alpha, b_{i_1}b_{i_2}\dots b_{i_r})1.$$

Итак, мы показали, что

$$s_\alpha(\varphi x)=(c_\alpha, x)1$$

для любого $x\in H_{2|\alpha|}(BU)$. Переходя к когомологиям, получаем

$$s_\alpha\varphi 1=\varphi c_\alpha. \qquad \square$$

§ 6. Алгебра всех операций

Теперь мы введем другие, куда более простые операции. Пусть x — некоторый фиксированный элемент в $\Omega_U^p(pt)$. Пусть (X, Y) — пара клеточных пространств, а $c\colon X\to pt$ — отображение в точку; таким образом, $c^*(x)\in\Omega_U^p(X)$. Для каждого $y\in\Omega_U^q(X, Y)$ определим

$$t(y)=(c^*x)y\in\Omega_U^{p+q}(X, Y).$$

Это соответствие задает когомологическую операцию

$$t\colon \Omega_U^q(X, Y) \to \Omega_U^{p+q}(X, Y).$$

Иными словами, можно сказать, что $\Omega_U^*(pt)$ действует на группах $\Omega_U^*(X, Y)$ умножением слева.

Теперь зафиксируем размерность d (целое число) и для каждого индекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ выберем элемент

$$x_\alpha \in \Omega_U^{d-2|\alpha|}(pt)$$

(мы *не* требуем здесь, чтобы все x_α, кроме конечного числа, были ненулевыми, напротив, они все могут быть отличны от нуля). Каждому x_α мы сопоставляем операцию

$$t_\alpha\colon \Omega_U^{q+2|\alpha|}(X, Y) \to \Omega_U^{q+d}(X, Y).$$

Рассмотрим бесконечную сумму

$$\sum_\alpha t_\alpha s_\alpha\colon \Omega_U^q(X, Y) \to \Omega_U^{q+d}(X, Y).$$

(Здесь мы предполагаем, что (X, Y) — пара клеточных пространств конечной гомологической размерности.)

Теорема 6.1 (Новиков). (i) *Эта сумма сходится, в том смысле, что все операции $t_\alpha s_\alpha$, кроме конечного их числа, действуют нулевым образом.*

(ii) *Эта сумма определяет некоторую естественную стабильную когомологическую операцию на Ω_U^*.*

(iii) *Любая естественная стабильная когомологическая операция на Ω_U^* может быть записана в таком виде.*

(iv) *Любая естественная стабильная когомологическая операция на Ω_U^* записывается в таком виде единственным образом, то есть если*

$$\sum_\alpha t_\alpha s_\alpha = 0\colon \Omega_U^q(X, Y) \to \Omega_U^{q+d}(X, Y)$$

для всех пар (X, Y) и индексов q, то $x_\alpha = 0$ для всех α.

Набросок доказательства. Пункт (i) тривиален: если $|\alpha|$ велико по сравнению с гомологической размерностью пары (X, Y), то группа $\Omega_U^{q+2|\alpha|}(X, Y)$ обращается в ноль. Пункт (ii) тоже тривиален.

Для доказательства пунктов (iii) и (iv) рассмотрим спектральную последовательность

$$H^*(MU;\Omega_U^*(pt)) \Rightarrow \Omega_U^*(MU).$$

Из следствия 5.3 вытекает, что элементы $s_\alpha \in \Omega_U^*(MU)$ составляют $\Omega_U^*(pt)$-базис для членов E_2 в этой спектральной последовательности. □

Существует следующий альтернативный метод доказательства пункта (iv).

Замечание 6.2 (Новиков). Операции $\sum_\alpha t_\alpha s_\alpha$ различаются своими значениями на классах

$$\omega_1\omega_2\ldots\omega_m \in \Omega_U^{2m}(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n \times \ldots \times \mathbb{C}P^n)$$

(где m и n пробегают натуральные числа.)

Набросок доказательства. Легко видеть, что кольцо $\Omega_U^*(\mathbb{C}P^n \times$ $\times\, \mathbb{C}P^n \times \ldots \times \mathbb{C}P^n)$ свободно над $\Omega_U^*(pt)$ с $\Omega_U^*(pt)$-базисом, состоящим из мономов

$$\omega_1^{i_1}\omega_2^{i_2}\ldots\omega_m^{i_m},$$

для которых $0 \leqslant i_r \leqslant n$ для всех r, остальные же мономы равны нулю. Применим к $\omega_1\omega_2\ldots\omega_m$ операцию s_α:

$$s_\alpha(\omega_1\omega_2\ldots\omega_m) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m} (c_\alpha, b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_m})\omega_1^{i_1+1}\omega_2^{i_2+1}\ldots\omega_m^{i_m+1}.$$

Это выражение, конечно, равно нулю, если $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots > m$ или если $\alpha_i > 0$ для любого i, для которого $i+1 > n$; но оставшиеся элементы $s_\alpha(\omega_1\omega_2\ldots\omega_m)$ будут линейно независимы над $\Omega_U^*(pt)$. □

Отметим, что вместо $\mathbb{C}P^n$ в замечании 6.2Новиковequation.1.6.2 можно использовать $\mathbb{C}P^\infty$.

Далее мы хотим научиться вычислять композицию операций $t_\alpha s_\alpha$ и $t'_\beta s_\beta$. Мы разобьем вычисление на три шага.

(i) Мы должны переписать $s_\alpha t'_\beta$ в виде $\sum_\gamma t''_\gamma s_\gamma$. Это сводится к вычислению действия s_α на $\Omega_U^*(pt)$, так как выражение

$$s_\alpha((c^*x)y) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha}(s_\beta c^* x)(s_\gamma y) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha}(c^* s_\beta x)(s_\gamma y)$$

имеет требуемый вид.

Итак, имеем $\Omega_U^*(pt) = \pi_*(MU)$, и по работе Милнора (loc. cit.) гомоморфизм Гуревича

$$\pi_*(MU) \to H_*(MU)$$

инъективен. Отсюда следует, что достаточно знать действие s_α на $H_*(MU)$, которое вычислено в теореме 5.2.

К действию s_α на $\Omega_U^*(pt)$ мы вернемся позднее.

(ii) Нам надо вычислить композицию $t_\alpha t''_\gamma$, но это просто произведение соответствующих элементов в кольце $\Omega_U^*(P)$.

(iii) Нам надо вычислить композицию $s_\gamma s_\beta$, что сделано в следующей теореме.

Теорема 6.3. *Множество $\mathbb{Z}$-линейных комбинаций s_α замкнуто относительно композиции. Кольцо S является алгеброй Хопфа над $\mathbb{Z}$, двойственной к которой является алгебра S_* многочленов с образующими $b''_1, b''_2, b''_3, \ldots$, для которых $(s_\alpha, b''_i) = (c_\alpha, b_i)$. Положим $b'' = \sum_{i=0}^{\infty} b''_i$, где $b''_0 = 1$, тогда отображение диагонали дается формулой*

$$\Delta b'' = \sum_{i \geqslant 0} (b'')^{i+1} \otimes b''_i.$$

Пояснение. Разделяя эту формулу на компоненты, получаем значения $\Delta b''_k$, что определяет диагональ на всем S_*, а тем самым и произведение на S. Эта ситуация аналогична той, которая возникает в работе Милнора о двойственной алгебре к алгебре Стинрода.

Теорема 6.3 доказана Новиковым, правда, он не дает явной формулы для диагонали в S_*.

Набросок доказательства. В кольце $\Omega_U^*(\mathbb{C}P^n \times \ldots \times \mathbb{C}P^n)$ элемент $s_\beta(\omega_1\omega_2\ldots\omega_m)$ представляется как $\mathbb{Z}$-линейная комбинация мономов $\omega_1^{i_1}\omega_2^{i_2}\ldots\omega_m^{i_m}$. Следовательно, $s_\alpha s_\beta(\omega_1\omega_2\ldots\omega_m)$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией мономов $\omega_1^{j_1}\omega_2^{j_2}\ldots\omega_m^{j_m}$. Из доказательства замечания 6.2 следует, что $s_\alpha s_\beta$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией s_γ.

Затем мы хотим вычислить $\Delta b''_k$, что то же самое, что найти $s_\alpha s_\beta(\omega)$ для каждого α и β, где ω — образующая группы $\Omega^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Имеем

$$s_\beta \omega = \sum_i (s_\beta, b''_i)\omega^{i+1}$$

и, следовательно,

$$s_\alpha s_\beta(\omega) = \sum_{i,j_1,j_2,\ldots,j_{i+1}} (s_\alpha, b''_{j_1} b''_{j_2} \ldots b''_{j_{i+1}})(s_\beta, b''_i)\omega^{i+j_1+j_2+\ldots+j_{i+1}+1}.$$

Тогда

$$\Delta b''_k = \sum_{i+j_1+j_2+\ldots+j_{i+1}=k} b''_{j_1} b''_{j_2} \ldots b''_{j_{i+1}} \otimes b''_i.$$

Суммируя по b, получаем требуемую формулу. □

Замечание. Теперь, введя двойственную алгебру Хопфа S_*, мы можем переформулировать теорему 5.2. Напомним, что S действует на $H_*(MU)$ умножением слева; следовательно, она действует на $H^*(MU)$ умножением справа

$$\mu\colon H^*(MU) \otimes S \to H^*(MU).$$

Переходя к двойственному отображению, получаем коумножение

$$\Delta\colon H_*(MU) \to H_*(MU) \otimes S_*.$$

Оно связано с изначальным действием S на $H_*(MU)$ следующим образом: если

$$\Delta h = \sum_i h_i \otimes s_i^*,$$

то

$$sh = \sum_i h_i (s_i^* s)$$

для всех $s \in S$. Отображение

$$\Delta\colon H_*(MU) \to H_*(MU) \otimes S_*$$

может быть описано следующим образом.

Предложение 6.4. *Отображение Δ сохраняет произведения и*

$$\Delta b' = \sum_{i\geqslant 0} (b')^{i+1} \otimes b''_i.$$

Это тривиальная переформулировка теоремы 5.2. Стоит заметить аналогию между этой формулой и теоремой 6.3.

Теперь мы достаточно подробно изучили алгебру операций на Ω_U^*.

§ 7. Комментарий к докладу Новикова

В московских докладах и в заметке в Докладах Академии Наук, Новиков тщательно различает $s_\omega\colon \Omega_U^*(pt) \to \Omega_U^*(pt)$ и некоторый гомоморфизм $\sigma_\omega^*\colon \Omega_U^*(pt) \to \Omega_U^*(pt)$. Следует отметить, что они на самом деле совпадают. Для этого надо изучить доказательство теоремы 3 из заметки Новикова.

Заметим, что в заметке Новикова в Докладах M_U и Ω_U обозначают одно и то же, так как оба совпадают с $\Omega_U^*(pt)$ (с. 33, строка 4 раздел II, а также с. 35, строка 8). Затем напомним, что Новиков обозначает алгебру операций через A^U, а также что используемый им изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{A^U}(A^U, M_U) \xrightarrow{\cong} \Omega_U$$

— это стандартный изоморфизм θ, определяемый как $\theta(h) = h(1)$. Далее, рассмотрим отображение Новикова $d\colon A^U \to A^U$. Поскольку утверждается, что оно индуцирует отображение

$$d^*\colon\ \mathrm{Hom}_{A^U}(A^U, M_U) \to \mathrm{Hom}_{A^U}(A^U, M_U),$$

неявно предполагается, что d — отображение левых A-модулей. Так как утверждается, что $d(1) = s_\omega$, должно выполняться равенство

$$d(a) = as_\omega.$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^U}(A^U, M_U) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathrm{Hom}_{A^U}(A^U, M_U) \arrow[d, "\theta"] \\
\Omega_U \arrow[r, "x"] & \Omega_U.
\end{tikzcd}$$

Легко проверить, что если определить x по формуле $x(y) = s_\omega y$, то диаграмма коммутативна. Но Новиков утверждает, что диаграмма также будет коммутативна, если мы положим $x(y) = \sigma_\omega^*(y)$. Следовательно, $\sigma_\omega^*(y) = s_\omega y$.

§ 8. Комплексные многообразия

Теперь напомним, что всякое стабильно комплексное многообразие M^n определяет элемент $[M^n]$ в группе $\Omega_U^{-n}(P)$. И если нам дано такое стабильно комплексное многообразие, естественно спросить, чему равно $s_\alpha[M^n]$. Особенно интересно выяснить этот вопрос для многообразий $\mathbb{C}P^n$, которые, как мы знаем, дают систему образующих в кольце многочленов $\Omega_U^*(P)\otimes\mathbb{Q}$ (где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел).

Теорема 8.1. $s_\alpha[\mathbb{C}P^n]=(c_\alpha, b^{-n-1})[\mathbb{C}P^{n-|\alpha|}]$, *где* $b=\sum_{i=0}^{\infty} b_i$.

Замечание. Элемент b обратим, поскольку это формальный ряд с постоянным членом 1. Целое число (c_α, b^{-n-1}) — спаривание Кронекера элементов из $H^{2|\alpha|}(BU)$ и $\prod_q H_q(BU)$. В данном случае мы использовали формализм § 3, чтобы записать коэффициент, который не обязан быть равен 0 или 1.

Теорема 8.1 принадлежит Новикову, хотя он не дает явной формулы для коэффициента при $[\mathbb{C}P^{n-|\alpha|}]$.

Набросок доказательства. В стиле предыдущих доказательств мы покажем, как вывести утверждение теоремы из теоремы 5.2 с помощью чисто алгебраических вычислений.

Буквой χ мы везде будем обозначать канонический антиавтоморфизм рассматриваемой алгебры Хопфа. Для $\mathbb{C}P^n$ касательное расслоение τ удовлетворяет тождеству $\tau\oplus 1=(n+1)\xi$. Таким образом, для нормального расслоения ν имеем

$$\begin{aligned}
c_\alpha(\nu) &= (\chi c_\alpha)\tau = (\chi c_\alpha)((n+1)\xi) = \\
&= \sum_{i_1,i_2,\ldots i_{n+1}} (\chi c_\alpha, b_{i_1} b_{i_2}\ldots b_{i_{n+1}}) x^{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}} = \\
&= \sum_{i_1,i_2,\ldots i_{n+1}} \big(c_\alpha, \chi(b_{i_1} b_{i_2}\ldots b_{i_{n+1}})\big) x^{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Слагаемые, для которых $i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=n$, дают характеристические числа нормального расслоения $\mathbb{C}P^n$. Отсюда следует, что класс $[\mathbb{C}P^n]$ в $H_{2n}(MU)$ равен

$$\varphi \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=n} \chi(b_{i_1} b_{i_2}\ldots b_{i_{n+1}}) = \varphi\chi(b^{n+1})_n,$$

где индекс n обозначает компоненту размерности $2n$. Из того, что $\Delta b=b\otimes b$, следует, что $\chi b=b^{-1}$ и $\chi(b^{n+1})=b^{-n-1}$. Из вышесказанного мы можем заключить, что класс $[\mathbb{C}P^n]$ в $H_{2n}(MU)$ равен

$$((b')^{-n-1})_n.$$

Теперь по теореме 5.2 (ii) имеем

$$s_\alpha(b') = \sum_{i\geqslant 0} (c_\alpha, b_i)(b')^{i+1},$$

откуда мы выведем формулу

$$s_\alpha(b')^{-1} = \sum_{j\geqslant 0} (c_\alpha, \chi b_j)(b')^{j-1}. \tag{8.2}$$

Действительно, если предположить, что эта формула верна, то

$$\begin{aligned} s_\alpha(b' \cdot (b')^{-1}) &= \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ i\geqslant 0,\, j\geqslant 0}} (c_\beta, b_i)(c_\gamma, \chi b_j)(b')^{i+j} = \\ &= \sum_{i\geqslant 0,\, j\geqslant 0} (c_\alpha, b_i \cdot \chi b_j)(b')^{i+j} = (c_\alpha, b_0)1, \end{aligned}$$

как и должно быть. Но с помощью этих выкладок можно и доказать формулу для $s_\alpha((b')^{-1})_d$, используя двойную индукцию по $|\alpha|$ и d и начиная с тривиальных случаев $|\alpha|=0$ или $d=0$.

Из (8.2) получаем

$$s_\alpha((b')^{-n-1})_n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=|\alpha|} \big(c_\alpha, \chi(b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_{n+1}})\big)\big((b')^{|\alpha|-n-1}\big)_{n-|\alpha|}.$$

Это класс $[\mathbb{C}P^{n-|\alpha|}]$ в $H^{2n-2|\alpha|}(MU)$ с точностью до множителя (c_α, b^{-n-1}). Тем самым искомый результат следует из того, что гомоморфизм Гуревича $\pi_*(MU) \to H_*(MU)$ инъективен. □

С геометрической точки зрения это доказательство неестественно и надуманно. Теорему 8.1 следует выводить из элегантной формулы Новикова, что мы и сделаем ниже. Однако сперва напомним необходимые факты из обычной теории когомологий.

Пусть M и N — ориентированные многообразия размерностей соответственно m и n, а $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение. Можно определить так называемый гомоморфизм [8] прямого образа

$$f_!\colon H^q(M) \to H^{n-m+q}(N)$$

8 Гомоморфизм Гизина. — *Прим. В. М. Бухштабера.*

как композицию следующих отображений:

$$\begin{tikzcd} H^q(M) \arrow[d, "d"', "\cong"] & H^{n-m+q}(N) \arrow[d, "d"', "\cong"] \\ H_{m-q}(M) \arrow[r, "f_*"] & H_{m-q}(N). \end{tikzcd}$$

Здесь через d обозначен изоморфизм двойственности Пуанкаре.

Аналогичная конструкция может быть проведена для Ω_U^* вместо H^*, если предположить, что M и N — стабильно комплексные многообразия, а двойственность Пуанкаре d заменить на двойственность Атьи

$$D\colon \Omega_U^q(M) \to \Omega_{m-q}^U(M).$$

Здесь Ω_{m-q}^U обозначает комплексный бордизм; см. работу *Atiyah*, loc. cit., в которой дано определение вещественного бордизма и дана теорема двойственности в вещественном случае.

На самом деле мы собираемся использовать определение гомоморфизма $f_!$ в частном случае, когда N является точкой pt, а f — отображение в точку $c\colon M \to pt$. Наше доказательство станет проще, а изложение яснее, если мы дадим альтернативное определение $c_!$, не использующее понятия бордизма.

Вложим наше многообразие M в сферу большой размерности S^{m+2p} так, чтобы нормальное расслоение ν было унитарным. Определим $c_!$ как следующую композицию отображений:

$$\begin{tikzcd} \Omega_U^q(M) \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \Omega_U^{q-p}(pt) \arrow[dd, "\cong"] \\ \Omega_U^{q+2p}(E, E_0) & \\ \Omega_U^{q+2p}(S^{m+2p}, \complement\, \mathrm{Int}\, E) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "j^*"] & \Omega_U^{q+2p}(S^{m+2p}, D^{m+2p}) \end{tikzcd}$$

Здесь φ — изоморфизм Тома, E и E_0 — расслоения на диски и сферы над M, построенные по расслоению ν, а $\complement\, \mathrm{Int}\, E$ — дополнение до внутренности к E. (При желании можно заменить $\Omega_U^{q+2p}(S^{m+2p}, \complement\, \mathrm{Int}\, E)$ на $\Omega_U^{q+2p}(S^{m+2p}, \complement\, M)$, это делает более ясным тот факт, что эта группа двойственна группе бордизмов при двойственности Александера.)

Далее, D^{m+2p} — маленький диск, содержащийся в $\complement \operatorname{Int} E$, а правая вертикальная стрелка — обычная $(m+2p)$-кратная надстройка. Если M в ней заменить на pt, эту стрелку можно рассматривать как отображение из левого столбца.

Мы определяем $c_!$ как композицию этих отображений. Если читатель, знакомый с понятием бордизма, предпочитает другое определение, мы предоставляем ему проверить их эквивалентность самостоятельно.

Теперь перейдем наконец к формуле Новикова. Возьмем стабильно комплексное многообразие M^m, представляющее элемент $[M^m] \in \Omega_U^{-m}(pt)$. Пусть ν — стабильное нормальное расслоение. Имеем $cf_\alpha(\nu) \in \Omega_U^{2|\alpha|}(M^m)$ и $c_!\, cf_\alpha(\nu) \in \Omega_U^{2|\alpha|-m}(P)$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 8.3 (Новиков). $s_\alpha[M^m] = c_!\, cf_\alpha(\nu)$.

Доказательство легко следует из определения s_α из § 5 по свойству естественности.