МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ПРОМЫШЛЕННОЙ ТЕПЛОТЕХНИКЕ И ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКЕ

Учебное пособие

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2021

УДК 621.1:532(075.8)
ББК 31.391:22.253я73
М55

Авторы:
Ю. Л. Курбатов, А. Б. Бирюков,
Е. В. Новикова, А. А. Заика

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики неравновесных процессов, метрологии и экологии ГОУ ВПО «ДонНУ» *Белоусов В. В.*;
доктор технических наук, заведующий кафедрой промышленной теплоэнергетики ГОУ ВПО «ДонНТУ» *Сафьянц С. М.*

М55 **Механика жидкости и газа в промышленной теплотехнике и теплоэнергетике** : учебное пособие / [Ю. Л. Курбатов и др.]. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 256 с.
ISBN 978-5-9729-0731-1

Изложены вопросы теории статики, кинематики и динамики жидкостей. Рассмотрена методика основных гидрогазодинамических расчетов в применении к процессам и установкам теплоэнергетики и теплотехники. Приведен справочный материал по физическим свойствам жидкостей и газов, гидравлическим сопротивлениям. Даны методики и примеры расчетов.

Для студентов металлургических и теплоэнергетических направлений подготовки. Издание может быть полезно специалистам в области металлургии, теплотехники и теплоэнергетики.

УДК 621.1:532(075.8)
ББК 31.391:22.253я73

ISBN 978-5-9729-0731-1

ВВЕДЕНИЕ

Техническая механика жидкости и газа (гидроаэромеханика, гидравлика, аэродинамика и др.) представляет собой дисциплину, в которой изучаются условия равновесия и закономерности движения жидкостей и газов. Она является одной из трех фундаментальных теплотехнических дисциплин (наряду с технической термодинамикой и тепломассообменом), на которых основываются все последующие прикладные теплоэнергетические курсы. Движение жидкости и газов – неотъемлемая часть любого теплотехнического процесса. Сюда относится транспорт энергоносителей (топлива) и окислителя (воздуха, кислорода) по трубопроводам, движение воды, пароводяной смеси и пара в паровых котлах, работа топливосжигающих устройств, развитие факелов и движение продуктов сгорания в камерах паровых котлов и промышленных печей, эвакуация продуктов сгорания через дымоходы и дымовые трубы, движение теплоносителей в системах теплоснабжения, газоснабжения, вентиляции, и др.

История дисциплины «Механики жидкости и газа» как науки богата, а истоки ее теряются в глубине тысячелетий. Уже на ранних стадиях цивилизации вода применялась в земледелии для орошения. Чтобы обеспечить подачу воды на поля необходимо было уметь создавать механизмы для подъема воды и распределять ее по системе каналов. Археологические находки сложных оросительных систем (Китай, 5000 лет до н. э., древний Египет) позволяют считать, что строители этих систем владели необходимыми сведениями как о движении воды, так и о поведении ее в покое. Поражает воображение совершенство судов для далеких плаваний, боевых машин, оригинальных систем водоснабжения, создание которых невозможно без глубоких знаний о предмете.

Рождение научной дисциплины гидравлики, а точнее гидростатики, связывают с именем Архимеда (287–212 г. до н. э.); закон его имени, изложенный в трактате «О плавающих телах», не претерпел практически никаких уточнений до сих пор. После долгого застоя средневековья второе рождение гидравлики как науки обязано гениальному ученому эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452–1549 г.), которого справедливо признают основоположником дисциплины, так как он заложил основы науки в трудах по изучению принципов работы гидравлического пресса, принципов полета, истечения жидкости через отверстие, вопросов течения воды в каналах, через водосливы и др. Развитие механики жидкости связано с именами Г. Галлилея (1564–1642 г.), показавшего связь гидравлического сопротивления со скоростью и плотностью среды; Э. Торичелли (1608–1647 г.), предложившего формулу скорости истечения жидкости, используемую до сих пор; Б. Паскаля (1623–1662 г.), сформулировавшего закон о передаче внешнего давления одинаковым по всем направлениям; И. Ньютона (1642–1727 г.), описавшего законы внутреннего трения, давшего теоретический вывод квадратичного закона сопротивления и установившего законы динамического подобия.

Теоретический фундамент современной науки о механике жидкости построен в работах, выполненных академиками Российской академии наук Л. Эйлером (1707–1783 г.), перу которого принадлежит трактат «Общие принципы движения жидкости», и швейцарского ученого Д. Бернулли (1700–1782 г.), опубликовавшего фундаментальный труд «Гидродинамика». Целый ряд теоретических и экспериментальных работ, во многом способствовавших развитию механики газовых сред, выполнил М. В. Ломоносов (1711–1765 г.).

Развитию технического направления механики жидкости и газа, решающего практические задачи промышленности, посвящены работы ученых и инженеров А. Пито (1695–1771 г.), А. Шези (1718–1799 г.), Г. Дарси (1803–1858 г.), Ж. Борда (1733–1799 г.), Д. Вентури (1746–1822 г.) и др. Благодаря работам технического направления дисциплина обогатилась новой измерительной аппаратурой – пьезометрами, трубками скоростного напора, расходомерами, идеями применения моделей для изучения гидрогазодинамических явлений в целях проектирования и др. Значительны заслуги русских ученых И.С. Громеко (1851–1889 г.) и Н. Е. Жуковского (1847–1921 г.) в исследовании вихревого движения, гидравлического удара, воздухоплавания.

Основы учения о движении вязкой жидкости заложены в работах Л. Навье (1785–1836 г.) и Г. Стокса (1819–1903 г.), которые получили дифференциальные уравнения пространственного движения вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса). Существенный вклад в понимание природы влияния вязкости на сопротивление при движении жидкости в каналах и трубах внесли Ж. Пуазейль (1799–1869 г.), а также Г. Хагин (1810–1869 г.), установившие существование двух режимов течения жидкости – ламинарного и турбулентного. Особая роль в формировании механики жидкости принадлежит Осборну Рейнольдсу (1842–1912 г.), который определил условия перехода ламинарного движения в турбулентный, много работал над теорией турбулентности, установил условия гидродинамического подобия.

Значительный вклад в развитие газовой механики и аэродинамики сделали такие ученные, как Д.И. Менделеев (1834–1907 г., работа по воздухоплаванию, кораблестроению, баллистике) и К. Э. Циолковский (1857–1935 г., труды по аэродинамическим трубам и космической аэродинамике). Из работ в области механики жидкости и газа XX века следует выделить труды Людвига Прандтля (1875–1953 г.), создавшего основы современной теории пограничного слоя и значительно развившего теорию турбулентности, на которой основаны практически все современные теплоэнергетические процессы.

Современная наука «Техническая механика жидкости и газа» развивалась и развивается работами Л. Г. Лойцянского, Г. Шлихтинга, Д. П. Сполдинга, Г. Н. Абрамовича, Бай Шии, И. Л. Повна, Ю. М. Константинова и др. Для решения конкретных проблем механики жидкости и газа в настоящее время широко используются все методы научного исследования, включая математическое моделирование на современных компьютерах, а также экспериментальные исследования на физических моделях и натурных образцах.

ЧАСТЬ I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В механике жидкости и газа капельные жидкости, газы и пары объединяются общим понятием жидкость благодаря характерной особенности – легкоподвижности частиц, т. е. способности вещества легко менять форму под действием внешних усилий. В отличие от твердых тел жидкости могут течь, если для этого создаются условия. Легкоподвижность и текучесть жидкостей объясняется тем, что молекулы вещества располагаются на больших расстояниях, чем в твердых телах, и силы взаимодействия между ними не велики. Жидкости состоят из дискретно расположенных и непрерывно движущихся молекул, но в механике жидкости они рассматриваются как сплошные среды (гипотеза Даламбера – Эйлера). Допущения сплошности (или непрерывности) жидкостей сохраняют свою справедливость для подавляющего большинства гидрогазодинамических явлений; однако, эти допущения несправедливы, если анализируется движение молекул, а также если нарушается сплошность среды в системах, состоящих из нескольких фаз (например, капельная жидкость и газ при барботировании, и др.). Допущение сплошности неприемлемо также при рассмотрении движения разреженного газа, когда длина свободного пробега молекулы λ становится соизмеримой с характерным размером потока L. В качестве критерия сплошности принимают число Кнудсена

$$Kn = \frac{\lambda}{L}; \tag{1}$$

при $Kn < 0{,}1$ можно рассматривать жидкость как сплошную среду, при $Kn > 0{,}1$ следует рассматривать жидкость как свободномолекулярный поток.

Жидкости подразделяют на два класса: сжимаемые и несжимаемые. Сжимаемые жидкости существенно изменяют объем при изменении давления и температуры. Сжимаемость при изменении давления количественно оценивается коэффициентом объемного сжатия

$$\beta_v = -\frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta p},$$

который представляет собой относительное изменение объема на единицу изменения давления. Для капельных жидкостей β_v лежит в пределах $(3–7{,}4)10^{-9}$ Па$^{-1}$, т. е. величиной, позволяющей пренебрегать сжимаемостью в большинстве инженерных расчетов. Для газов коэффициент объемного сжатия в десятки тысяч раз больше, поэтому газы сжимаемы. Сжимаемость жидкостей при изменении температуры количественно оценивается коэффициентом температурного расширения

$$\beta_t = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta T},$$

который для газов в десятки и сотни раз больше, чем для капельных жидкостей (например, для воды $\beta_v = 15 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, для воздуха $\beta_v = 3{,}66 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$).

Жидкости разделяют также на идеальные и реальные. Идеальной, или невязкой называют жидкость, при движении которой отсутствуют силы внутреннего трения. Для идеальной жидкости характерны поля равных скоростей, такая жидкость не изменяет объем при изменении температуры и давления. Для реальной, или вязкой жидкости характерно наличие сил внутреннего трения. Если поток жидкости направить вдоль пластины (**рис. 1**), то бывшее равномерным распределение

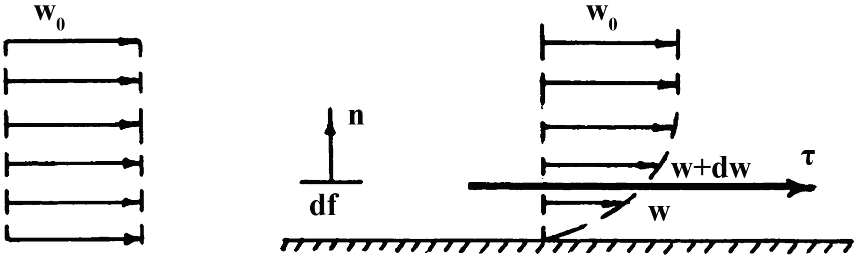

Рисунок 1. Течение вязкой жидкости

скоростей (поле скоростей) изменится. У поверхности пластины скорость станет равной нулю (эффект «прилипания»), а по мере удаления от поверхности она будет увеличиваться. Между слоями жидкости, движущимися с разными скоростями (w) и (w + dw), возникнет сила внутреннего трения. Касательное напряжение этой силы τ пропорционально градиенту скорости:

$$\tau = \eta \frac{dw}{dn}, \text{ Па(Н/м}^2\text{)}. \qquad (2)$$

В уравнении (2), полученном И. Ньютоном, коэффициент пропорциональности η (Па·с) называется динамическим коэффициентом молекулярной вязкости (чаще: коэффициент динамической вязкости). В уравнениях гидрогазодинамики часто используется отношение $\nu = \eta/\rho$ (м^2/с), которое получило название кинематический коэффициент молекулярной вязкости (чаще: коэффициент кинематической вязкости). Жидкости, подчиняющиеся уравнению Ньютона (т. е. с прямой пропорциональностью между касательным напряжением и градиентом скорости) называются ньютоновскими. Большинство жидкостей (вода, воздух, горючие газы, продукты сгорания и др.) являются ньютоновскими. Некоторые жидкости, такие, как мазуты вблизи температуры застывания, бетоны и др. начинают двигаться только после того, как касательные напряжения достигнут определенной величины τ_0 (начальное напряжение сдвига). Эти жидкости называются неньютоновскими, а связь между касательным напряжением и градиентом скорости описывается выражением

$$\tau = \tau_0 + \eta \cdot \left(\frac{dw}{dn} \right)^m .$$

В зависимости от относительной значимости сил вязкости и сил инерции характер движения жидкости, ограниченной твердыми стенками, может сильно отличаться. Различают ламинарное и турбулентное движение. При ламинарном, или слоистом течении соседние слои жидкости движутся, практически не перемешиваясь. Смежные слои могут быть и изогнутыми, однако макроскопического перемешивания не будет происходить. Для турбулентного движения характерно беспорядочное, бурное перемещение жидких частиц и интенсивное макроперемешивание как поперек, так и в направлении основного течения. В 1883 г. Осборн Рейнольдс наглядно показал существование двух режимов (опыт с тонкой струйкой краски, вводимой в воду, текущую по стеклянной трубке), а также предложил критерий для определения вида движения. Таким критерием является число Рейнольдса:

$$Re = \frac{w\ell\rho}{\eta} = \frac{w\ell}{\nu}, \tag{3}$$

где w – скорость, ℓ – характерный линейный размер.

При превышении определенных значений Re ламинарное течение нарушается. Например, для прямых закрытых каналов и труб $Re_{кр} = 2300$; при значениях Re больше критического силы инерции преобладают над силами вязкости и возникает турбулентное течение. Для ламинарного движения характерно параболическое распределение скоростей по сечению потока у стенки до w_{max} на оси (в круглой трубе – параболоид вращения) (**рис. 2**); для турбулентного потока характерно наличие пристенного пограничного слоя в котором скорость меняется от 0 до w_{max} и ядра потока, в котором скорость практически одинакова.

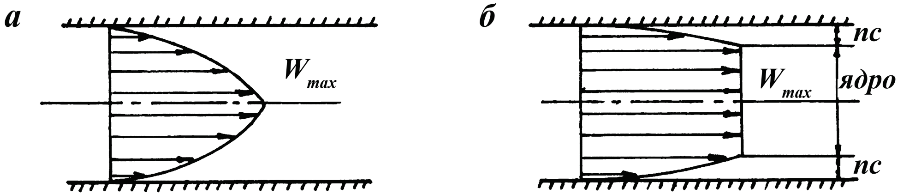

Рисунок 2 - Ламинарное (а) и турбулентное (б) движения жидкости

В механике жидкости различают также течения: стационарные т. е. с неизменяемым во времени полем скоростей и других физических величин, и нестационарные; установившиеся (стабилизированные) и неустановившиеся (нестабилизированные, когда поля скоростей в двух соседних сечениях отличаются).

Все силы, действующие в жидкости, разделяют на внутренние (например, сила внутреннего трения) и внешние. Последние разделяют также на объемные или массовые, приложенные к любой материальной точке (силы тяжести, силы инерции, электромагнитные), и поверхностные, которые воздействуют на поверхности, ограничивающие объем жидкости (например, силы давления).

В механике газа используется известное из курса физики соотношение между параметрами состояния идеального газа (p, v, T):

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}. \qquad (4)$$

Чаще приходится иметь дело с плотностью – величиной обратной удельному объему: $\rho = \frac{1}{v}$. Тогда объединенное уравнение Бойля – Мариотта и Гей-Люссака (4) можно записать в виде

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}.$$

Если в качестве одного из состояний принять так называемые нормальные физические условия (Н.Ф.У): p_0 = 101,3 кПа, T_0 = 273 К, а плотность при этих условиях обозначить ρ_0, то плотность газа при любых других (действительных) условиях (Д.Ф.У) может быть рассчитана по формуле

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} \cdot \frac{p}{p_0}. \tag{5}$$

Если левую и правую часть уравнения состояния умножить на массу m (кг), то получим произведение v · m, равное объему массы V' ($м^3$), а связь объема с температурой и давлением определится из выражения

$$V' = V_0' \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{p_0}{p}.$$

Для объемного расхода газа V = V'/t ($м^3/с$) и для скорости w = = V/F (м/с) соответственно

$$V = V_0 \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{p_0}{p} \tag{6}$$

и

$$w = w_0 \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{p_0}{p}. \tag{7}$$

Глава 2. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ (СТАТИКА)

2.1. Условие равновесия

Равновесие жидкости может иметь место либо в случае, когда она находится в состоянии покоя, либо когда она движется подобно твердому телу с одинаковой скоростью во всех точках объема (например, перевозка жидкости в цистерне). Если жидкость находится в равновесии, то отсутствуют касательные напряжения, нарушающие равновесие, и действуют только объемные (массовые) силы и нормальные к поверхности силы давления.

Рассмотрим условия равновесия элементарного объема жидкости, находящегося под действием поверхностных и массовых сил. Для этого в покоящейся жидкости выделим элементарный тетраэдр с длинами сторон dx, dy, dz. Три грани тетраэдра лежат в координатных плоскостях, а четвертая, наклонная, является замыкающей (**рис. 3**). Чтобы не нарушать равновесие выделенного объема заменим

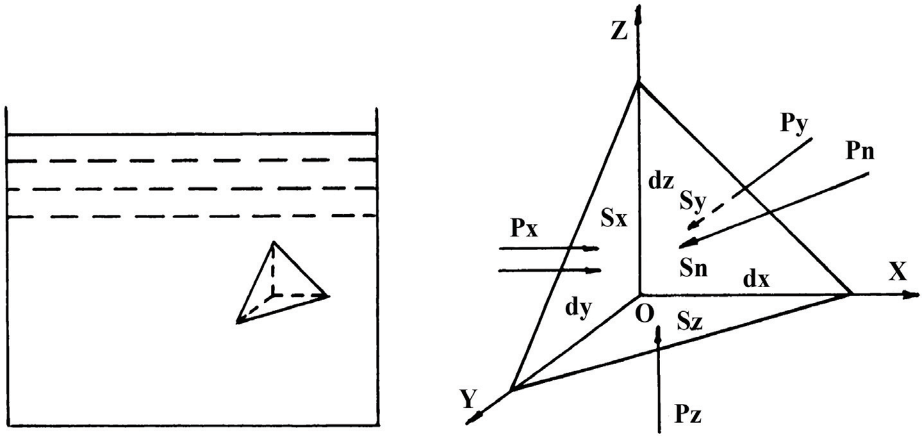

Рисунок 3 - Схема сил в точке при равновесии

действие отброшенной жидкости поверхностными силами (давления) P_n, P_x, P_y, P_z направленными по нормали к граням тетраэдра. На выделенный объем (V) действует также массовая сила с ускорением $\vec{G}$ (G_X, G_Y, G_Z); G_X, G_Y и G_Z – проекции ускорения массовой силы на координатные оси. Для сохранения равновесия необходимо, чтобы сумма всех сил или суммы проекций всех сил на координатные оси были равны нулю. Для тетраэдра:

$$P_x – P_n \cos(n,\hat{}x) + G_X \rho V = 0$$

$$P_y – P_n \cos(n,\hat{}y) + G_Y \rho V = 0$$

$$P_z – P_n \cos(n,\hat{}z) + G_Z \rho V = 0,$$

где n – орт нормали к наклонной грани. Если первое уравнение разделить на площадь поверхности тетраэдра S_x, лежащей в координатной плоскости xy второе – на S_y, третье – на S_z, то получим условия равновесия в величинах напряжения сил давления (или в величинах давления):

$$\frac{P_x}{S_x} - \frac{P_n}{S_x} \cdot \cos(n,\hat{}x) + G_x \rho \frac{V}{S_x} = 0,$$

$$\frac{P_y}{S_y} - \frac{P_n}{S_y} \cdot \cos(n,\hat{}y) + G_y \rho \frac{V}{S_y} = 0,$$

$$\frac{P_z}{S_z} - \frac{P_n}{S_z} \cdot \cos(n,\hat{}z) + G_z \rho \frac{V}{S_z} = 0.$$

Объем тетраэдра $V = 1/6(dx \cdot dy \cdot dz)$, поверхность $S_x = 1/2(dy \cdot dz)$, отношение

$$\frac{V}{S_x} = \left(\frac{1}{6}dx \cdot dy \cdot dz\right) : \left(\frac{1}{2}dy \cdot dz\right) = \frac{1}{3}dx;$$

аналогично: $\frac{V}{S_y} = \frac{1}{3}dy$; $\frac{V}{S_z} = \frac{1}{3}dz$. Если выделенный объем устремить к точке, т. е. $dx \to 0$, $dy \to 0$, $dz \to 0$, то напряжение массовых сил исчезнет. Т. к. $S_x = S_n \cos(n,\hat{}x)$, $S_y = S_n \cos(n,\hat{}y)$, $S_z = S_n \cos(n,\hat{}z)$, то, обозначив отношения $P_x/S_x = p_x$, $P_y/S_y = p_y$, $P_z/S_z = p_z$, $P_n/S_n = p_n$ получим

$$p_x = p_n;\ p_y = p_n;\ p_z = p_n,$$

а значит

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p. \tag{8}$$

Из последнего выражения следует, что напряжение силы давления, называемое гидростатическим давлением в точке, не зависит от ориентации площадки, к которой приложено давление. Этот вывод является выражением известного закона Паскаля: «давление на поверхности жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях». Очевидно, что если давление не зависит от ориентации площадки, проходящей через данную точку, и определяется только положением точки в жидкости, то давление есть функция только координат этой точки, т. е. $p = f(x, y, z)$.

2.2. Уравнение равновесия Эйлера. Основное дифференциальное уравнение гидростатики

Выделим в покоящейся жидкости элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям координат (**рис. 4**). Выделенный объем жидкости находится под действием поверхностных сил давления на шесть его граней и равнодействующей массовых сил. На три грани, пересекающиеся в точке O, действует давление p, которое, в соответствии с законом Паскаля одинаково по всем направлениям. В направлении координатной оси OX на левую грань действует сила, равная произведению давления на площадь грани: $p \cdot dy \cdot dz$. Если принять изменение давления на достаточно малом участке dx линейным, то приращение давления на этом участке будет равно произведению градиента давлений (или изменения давления на единицу длины) $\partial p / \partial x$ на длину dx:

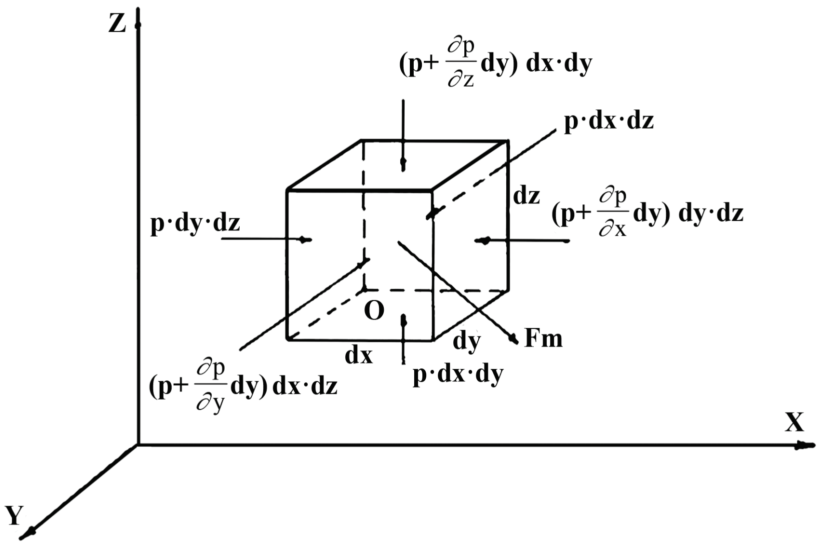

Рисунок 4 - К выводу уравнения Эйлера

$$dp_x = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx.$$

Тогда на противоположную, правую грань будет действовать давление

$$p + dp_x = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$$

и сила давления

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz.$$

Массовая сила, действующая на выделенный объем, равна произведению ускорения $\vec{G}$ на массу параллелепипеда

$$F_m = \vec{G} \cdot m = \vec{G} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Вектор ускорения массовой силы равен:

$$\vec{G} = G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k},$$

где G_x, G_y, G_z – проекции ускорения массовых сил на соответствующие координатные оси. Проекция массовой силы на координатную ось Ox равна

$$G_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

а уравнение равновесия сил в проекции на ось Ox будет иметь вид:

$$p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz + G_x \cdot \rho \cdot dxdydz = 0,$$

или

$$G_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Выведя по аналогии два других уравнения, получим уравнение равновесия Эйлера в компонентах:

$$\begin{cases} G_x - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ G_y - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ G_z - \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В векторной форме это уравнение имеет вид:

$$\vec{G} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p) = 0. \qquad (10)$$

Если первое уравнение (9) умножить на dx, второе – на dy, третье – на dz и сложить их, то получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left(G_x dx + G_y dy + G_z dz\right). \qquad (11)$$

Левая часть выражения (11) представляет собой полный дифференциал давления dp. Поэтому можно записать

$$dp = \rho\cdot(G_x dx + G_y dy + G_z dz). \qquad (12)$$

Это выражение называется основным дифференциальным уравнением гидростатики.

Правая часть уравнения (12) также должна быть полным дифференциалом, что возможно тогда, когда ускорения внешних массовых сил G_x, G_y, G_z сами будут частными производными некоторой функции U(x, y, z), называемой силовой функцией или потенциалом силового поля. Производные потенциала по координатам равны

$$G_x = \frac{\partial U}{\partial x}; G_y = \frac{\partial U}{\partial y}; G_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Тогда правая часть уравнения (12) может быть представлена следующимобразом:

$$\rho\left(G_x dx + G_y dy + G_z dz\right) = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = \rho dU,$$

а уравнение (12) примет вид:

$$dp = \rho\cdot dU. \qquad (13)$$

Функция потенциала является силой, способной удерживать жидкость в равновесии. К таким силам относятся силы тяжести, инерции, центробежные, электромагнитные.

2.3. Равновесие несжимаемой жидкости под действием сил тяжести

Рассмотрим простейший случай равновесия неподвижной массы несжимаемой жидкости, находящейся под воздействием только сил тяжести, ускорение которой направлено вертикально вниз. Если координатную ось направить вниз, то в уравнении (12) компоненты ускорения массовых сил $G_x = G_y = 0$, а $G_z = g$ и дифференциальное уравнение статики примет вид

$$dp = \rho \cdot g \cdot dz. \tag{14}$$

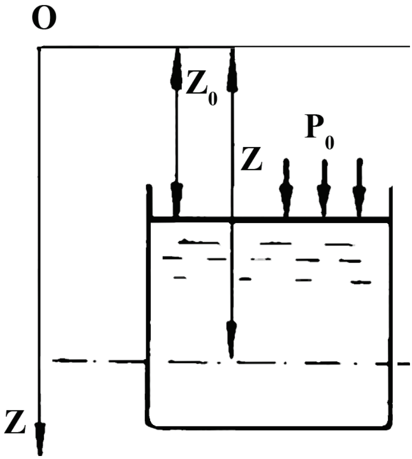

Рисунок 5 - К выводу основного уравнения гидростатики

Если полагать, что свободная поверхность (**рис. 5**) имеет координату z_0 и на этой поверхности внешнее давление равно p_0 (в частном случае это давление может быть равно атмосферному), то, интегрируя уравнение (14) в пределах от z_0 до z и от p_0 до p получим, при условии $\rho = const$

$$\int_{p_0}^{p} dp = \rho \int_{z_0}^{z} g dz$$

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot (z - z_0). \tag{15}$$

Если начало координатной оси Oz совместить с уровнем свободной поверхности, тогда $z_0 = 0$ и уравнение (15) примет вид:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot z. \tag{16}$$

Это выражение называется основным законом гидростатики: давление в любой точке покоящейся жидкости равно внешнему давлению (p_0), сложенному с весом столба жидкости высотой от поверхности до данной точки и с площадью основания, равной единице.

Если в выражении (12) положить p = const, или dp = 0, то получим уравнение поверхности уровня

$$G_x \cdot dx + G_y \cdot dy + G_z \cdot dz = 0, \text{ или } dU = 0,$$

следовательно поверхность уровня является и поверхностью равного потенциала, или эквипотенциальной поверхностью. Какова форма поверхности уровня для жидкости, находящейся под действием только сил тяжести? Чтобы ответить на этот вопрос положим p = const, тогда уравнение поверхности (15) примет вид:

$$z = \frac{const - p_0}{\rho g} = const, \qquad (17)$$

т. е. поверхностью уровня является горизонтальная плоскость.

2.4. Равновесие несжимаемой жидкости при наличии негравитационных массовых сил

2.4.1. Равноускоренное движение жидкости в горизонтальном направлении

Рассмотрим движение жидкости в некотором сосуде (например, в цистерне) с горизонтальным ускорением **a**; жидкость находится под воздействием инерционной силы, а также под действием силы тяжести с ускорением **g** (**рис. 6**). Если координатную ось Ox направить горизонтально по ходу движения, а ось Oz – вертикально вниз, то в проекции ускорения массовых сил в уравнении (12) будут иметь место следующие значения:

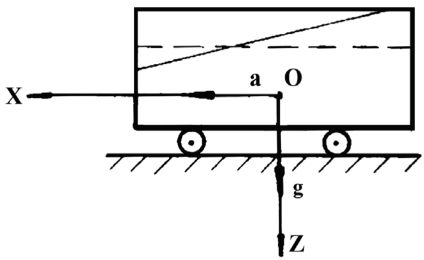

Рисунок 6 - Равновесие жидкости при равноускоренном горизонтальном движении

$$G_x = a; \qquad G_y = 0; \qquad G_z = g,$$

а основное дифференциальное уравнение гидростатики примет вид:

$$dp = \rho \cdot (a \cdot dx + g \cdot dz).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$p = \rho \cdot a \cdot x + \rho \cdot g \cdot z + C.$$

Константа интегрирования определяется из условия: $x = x_0$; $z = z_0$; $p = p_0$, следовательно, зависимость давления от координат будет иметь вид:

$$p = p_0 + \rho \cdot a(x - x_0) + \rho \cdot g \cdot (z - z_0). \quad (18)$$

Для того, чтобы определить форму поверхности уровня, положим p = const. Тогда уравнение (18) может быть преобразовано к выражению типа

$$z = -A + B \cdot x, \quad (19)$$

т. е. к уравнению прямой наклонной линии. Следовательно, в данном примере поверхностью уровня является наклонная плоскость.

2.4.2. Равновесие жидкости, покоящейся относительно сосуда и вращающейся относительно вертикальной оси

Пусть жидкость, находящаяся в сосуде, вращается вместе с сосудом относительно вертикальной оси с угловой скоростью ω (**рис. 7**). На покоящуюся относительно сосуда жидкость будут действовать центробежные силы и силы тяжести. Если расположить координатные оси Ox и Oy в горизонтальной плоскости, а ось направить вертикально вниз, то проекции ускорения центробежных сил будут равны (в соответствии с теорией вращательного движения): $G_x = \omega^2 x$, $G_y = \omega^2 y$, а ускорение силы тяжести $G_z = g$. Тогда основное дифференциальное уравнение гидростатики (12) примет вид:

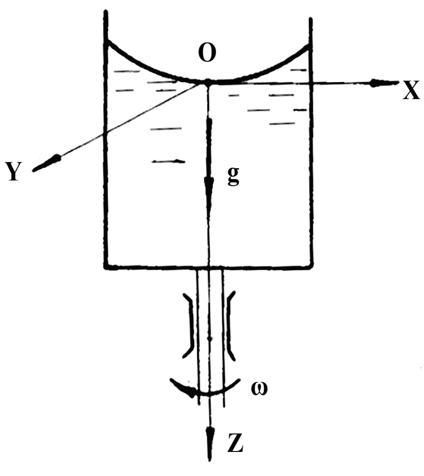

Рисунок 7 - Равновесие жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси

$$dp = \rho\cdot(\omega^2 xdx + \omega^2 ydy + gdz).$$

После интегрирования получим

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \rho gz + C.$$

Константа интегрирования определяется из условия: для $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$, $p = p_0$. Тогда

$$C = p_0 - \rho\cdot g\cdot z,$$

а зависимость давления от координат будет иметь вид:

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \rho g\left(z - z_0\right) + p_0. \tag{20}$$

Поверхность уровня (p=const) находится после преобразования (20) к виду:

$$x^2 + y^2 = -\frac{2gz}{\omega^2} + C_1 \tag{21}$$

(в константу C_1 вошли все постоянные величины). Выражение (21) представляет собой уравнение параболоида вращения.

2.5. Уравнения гидростатики для сжимаемых сред

Рассмотрим равновесие сжимаемой жидкости (газа), находящейся под действием только сил тяжести. В качестве примера рассмотрим изменение давления воздуха по высоте атмосферы. Направим координатную ось вертикально вверх. Тогда основное дифференциальное уравнение гидростатики (12) будет иметь вид

$$dp = -\rho\cdot g\cdot dz. \tag{22}$$

Так как воздух – сжимаемая среда, необходимо учитывать зависимость плотности от температуры и давления, что можно сделать, используя уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$\rho = \frac{p}{RT};$$

тогда учитывая зависимость температуры от высоты, из (22) получим:

$$\frac{dp}{p} = -g\frac{dz}{RT(z)}.$$

После интегрирования с учетом того, что на уровне $z = z_0$ давление $p = p_0$, получим

$$p = p_0 \exp\left(-g\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{RT(z)}\right). \tag{23}$$

Эта формула носит название барометрической. Если считать, что атмосфера находится в изотермическом равновесии, т. е. $T(z) = \text{const}$, то

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right). \tag{24}$$

Если задано линейное изменение температуры по высоте атмосферы $T = T_0 - b(z - z_0)$, что справедливо до $z = 11$ км, барометрическая формула примет вид:

$$p = p_0\left(1 - \frac{b(z - z_0)}{T_0}\right)^{\frac{g}{bRT_0}}. \tag{25}$$

Другой вариант барометрической формулы можно получить, приняв температуру одинаковой по высоте и используя закон Бойля – Мариотта. Подставляя в уравнение (22) $\rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0}$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$z = \frac{p_0}{g\rho_0}\ln\frac{p_0}{p}. \tag{26}$$

Вводя обозначение $h_0 = \frac{p_0}{g\rho_0}$ и решая относительно p, получим еще один вариант барометрической формулы:

$$p = p_0 e^{-\frac{z}{h_0}}. \tag{27}$$

Если записать (26) для двух высот z_1 и z_2:

$$z_1 = h_0 \ln \frac{p_0}{p_1}; \; z_2 = h_0 \ln \frac{p_0}{p_2}$$

получим барометрическую формулу в виде:

$$z_1 - z_2 = h_0 - \ln \frac{p_2}{p_1}, \tag{28}$$

которая используется для определения высоты по измеренным значениям барометрического давления p_1 и p_2.

На **рис. 8** приведены параметры международной стандартной атмосферы (МСА). На поверхности Земли z_0 приняты нормальные атмосферные условия: T = 288, p = 760 мм.рт.ст. (101300 Па). В пределах 11 километров падение температуры принимается линейным (6,5 °С на 1 км).

Рисунок 8 - Изменение давления, температуры и плотности по высоте атмосферы

Объекты промтеплоэнергетики имеют относительно небольшую высоту (дымовые трубы – до 300–400 м), поэтому на практике для определения изменения давления газа по высоте используют основной закон гидростатики для несжимаемой жидкости:

$$p = p_0 - (z - z_0)\cdot g\cdot \rho.$$

Если высота объекта не более 400 м, погрешность этой формулы не превышает 0,5 %, что вполне допустимо для технических расчетов.

2.6. Статика двух газов. Дымовая труба

В некоторых промтеплоэнергетических установках, например, паровых котлах или промышленных печах, имеет место взаимное действие горячих газов (продуктов сгорания топлива), заполняющих установку, и относительно холодного атмосферного воздуха, окружающего установку. Плотность продуктов сгорания, состоящих в основном из углекислого газа CO_2, водяных паров H_2O, азота N_2 и кислорода O_2, при н.ф.у, близка к плотности воздуха ($\rho_{г0}$ = 1,25 – 1,35 кг/м^3; $\rho_{в0}$ = 1,29 кг/м^3), но при высокой температуре становится значительно ниже:

t, °C	0	200	500	1000	1500	2000
ρ, кг/м^3	1,30	0,664	0,459	0,279	0,201	0,156

Поэтому здесь мы говорим о взаимодействии легкого и тяжелого газов, разделенных некоторой преградой; что является следствием такого взаимодействия, рассмотрим на следующем примере. На **рис. 9** схематично показана рабочая камера печи с участком дымохода, заполненного горячими продуктами сгорания, плотность которых намного меньше плотности окружающей атмосферы ($\rho_г \ll \rho_в$). Если топливная горелка отключена, шибер закрыт, а заслонка рабочего окна немного приподнята, то будет наблюдаться равновесие печных га-

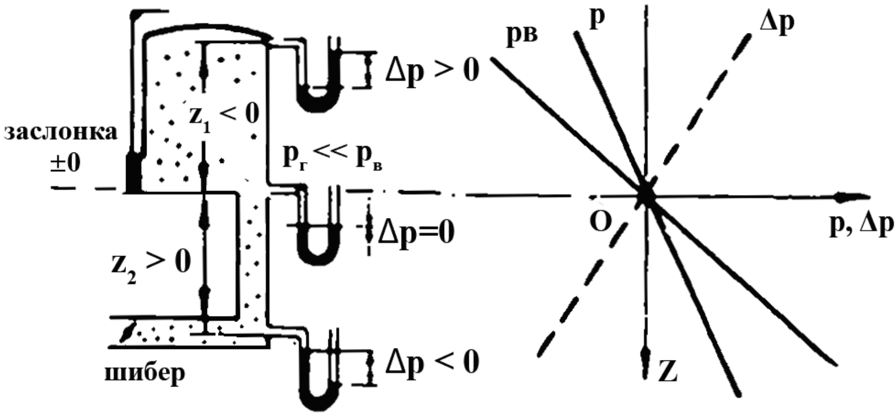

Рисунок 9 - Статика двух газов

зов и окружающей атмосферы, вследствие чего не будет наблюдаться ни выбивания газов, ни засасывания воздуха в печь через приоткрытое окно. Таким образом, на уровне печного окна абсолютное давление печных газов равно давлению окружающего воздуха, т. е. избыточное давление газов равно нулю. Этот уровень обычно называют нулевой линией ±0. Направим координатную ось Oz вертикально вниз от нулевой линии, а ось абсолютных и избыточных давлений направим горизонтально вправо (**рис. 9**). Линии абсолютного атмосферного давления

$$p_в = p_0 + zg\rho_в$$

и абсолютного давления печных газов

$$p_г = p_0 + zg\rho_г$$

проведем через начало координат. (Здесь p_0 – абсолютное давление на уровне $z = 0$). Отметим, что вторая линия пройдет более круто чем первая, т. к. печные газы имеют плотность меньше чем атмосфера. Избыточное давление газов

$$\Delta p = p_г - p_в$$

будет положительным выше нулевой линии и отрицательным – ниже. Проведем мысленный эксперимент по измерению избыточного давления газов с помощью дифференциального U-образного манометра