

**А. И. Сандлер, С. А. Лагутин, Е. А. Гудов**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА  
ПРОИЗВОДСТВА ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ  
ОБЩЕГО ВИДА**

*Учебное пособие*

*Второе издание*

Москва Вологда  
«Инфра-Инженерия»  
2021

УДК 621.833  
ББК 34.445  
С18

**Сандлер, А. И.**

**С12** Теория и практика производства червячных передач общего вида : учебное пособие / А. И. Сандлер, С. А. Лагутин, Е. А. Гудов. – 2-е изд. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 348 с.  
ISBN 978-5-9729-0534-8

Рассмотрены основные типы червячных передач в современных машинах и механизмах. Представлена математическая модель червячной передачи общего вида, включая передачи с цилиндрическими, коническими и глобоидными червяками. Освещены избранные вопросы теории зацеплений таких передач, изложена методика расчета червячной передачи. Даны основы технологии производства червячных передач и его инструментального обеспечения.

Для инженерно-технических работников машиностроительных и инструментальных предприятий, а также студентов, аспирантов и преподавателей высшего и среднего профессионального образования.

УДК 621.833  
ББК 34.445

ISBN 978-5-9729-0534-8

© Сандлер А. И., Лагутин С. А., Гудов Е. А., 2021

© Издательство «Инфра-Инженерия», 2021

© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	7
<b>Часть 1. Теория и практика проектирования червячных передач</b>	14
<b>Глава 1. Избранные вопросы теории червячных передач общего вида</b>	14
1.1. Математическая модель образования червячной передачи общего вида	14
1.2. Оси зацепления и их аналоги в червячных передачах общего вида	18
1.2.1. Модифицированные глобоидные передачи	21
1.2.2. Передачи с коническими червяками	23
1.2.3. Передачи с плоским червяком	24
1.2.4. Передачи с цилиндрическим червяком	25
1.3. О сингулярностях и подрезании зубьев колес в станочном зацеплении	27
Библиография к главе 1	36
<b>Глава 2. Проектирование цилиндрических червячных передач</b>	37
2.1. Типы цилиндрических червячных передач	37
2.2. Геометрический расчет цилиндрической червячной передачи с архимедовым и эвольвентным червяками	39
2.3. Выбор степени точности и назначение допусков	47
2.4. Выбор материалов для червяка и колеса	49
2.5. Расчет нагрузочной способности передачи с учетом условий ее эксплуатации	52
2.6. Коэффициент полезного действия червячной передачи	55
Библиография к главе 2	57
Приложение 2А. Расчет червячной передачи с червяком ZA	58
<b>Глава 3. Проектирование глобоидных передач</b>	62
3.1. Геометрический расчет модифицированной глобоидной передачи	63
3.2. Расчет параметров станочного зацепления и установки резцов при нарезании червяка, модифицированного методом «AU»	66
3.3. Проектирование двух- и четырехрезцовых летучек для нарезания зубьев глобоидного колеса	73
3.4. Расчет нагрузочной способности глобоидной передачи с учетом условий ее эксплуатации	76
3.5. Коэффициент полезного действия глобоидной передачи	81
Библиография к главе 3	83
Приложение 3А. Расчет глобоидной передачи	84
<b>Глава 4. Червячные передачи жидкостного трения</b>	89
4.1. Синтез червячных передач с замкнутыми линиями контакта	91
4.2. Выбор и оптимизация параметров осевого профиля червяка для передачи с жидкостным трением	95
4.3. Червячные передачи с замкнутыми линиями контакта с червяком на базе стандартного зуборезного инструмента	98
4.4. Исследование геометрии червячных передач с ЗЛК	99
4.5. Смазочный зазор и чувствительность передачи к погрешностям сборки	101
4.6. Экспериментальные исследования КПД и износа	104
Библиография к главе 4	107
<b>Глава 5. Основные вопросы технологии производства червячных передач</b>	108
5.1. Станочное зацепление как аналог рабочего зацепления червячной передачи	108
5.2. Основные технологические погрешности и предпосылки их минимизации	109

5.3.	Способы достижения идентичности профилей червяка и червячной фрезы	115
5.4.	Контроль и анализ формообразования поверхностей зубьев червячной фрезы и витка червяка	118
5.5.	Особенности технологии изготовления червячных передач с исходным контуром большой кривизны	120
5.6.	О назначении допусков на погрешности формообразования червяка и производящей поверхности червячной фрезы	122
Библиография к главе 5		124
<b>Глава 6. Локализация контакта в червячных передачах</b>		125
6.1.	Локализация пятна контакта как резерв повышения качества червячной передачи	125
6.2.	Локализация пятна контакта в червячных передачах с нормированной точностью и нормами контакта	127
6.2.1	Расчет параметров и технология профильной локализации	127
6.2.2	Расчет параметров и технология продольной локализации	130
6.2.3	Продольная локализация пятна контакта в прецизионных передачах	144
6.3.	Метод первичности зуборезного инструмента при изготовлении силовых передач	147
6.3.1	Методика подбора параметров червячной фрезы	148
6.3.2	Коррекция червяка при использовании архимедовых червячных фрез	149
6.3.3	Возможности использования фрез меньшего диаметра	155
6.3.4	Использование червячных фрез для эвольвентных цилиндрических колес	156
6.3.5	Расчет параметров червячной фрезы для колес беззазорных передач с переменной толщиной витка червяка	159
Библиография к главе 6		164
<b>Часть 2. Червячные фрезы для червячных колес</b>		165
<b>Глава 7. Обеспечение технологичности и оптимальных эксплуатационных характеристик червячных фрез на этапе их проектирования</b>		166
7.1.	Выбор исходного контура производящего червяка	167
7.2.	Оптимизация угла профиля стружечной канавки	169
7.3.	Определение максимального числа зубьев фрезы	172
7.4.	Огранка как органическая погрешность профиля зубьев червячного колеса	172
7.5.	Расчет необходимых боковых задних углов зубьев фрезы и элементов наладок затылования	176
7.6.	Расхождение осевых углов профиля витка червяка и боковых затылованных поверхностей зубьев фрезы	182
7.7.	Структура погрешностей и формирование точности производящей поверхности при изготовлении новых фрез	186
7.8.	Расчет допуска на отклонение передней поверхности зубьев червячной фрезы от радиальности	192
7.9.	Сохранение точности червячных фрез при переточках	196
7.9.1	Определение числа переточек червячной фрезы	197
7.9.2	Компенсация погрешности профиля производящей поверхности при переточках	199
Библиография к главе 7		202
<b>Глава 8. Шлифование винтовых передних поверхностей зубьев червячных фрез</b>		203
8.1.	Определение отклонения образующей передней поверхности от радиальной прямой при заточке дисковым инструментом	205
8.2.	Определение параметров наладки заточного станка, обеспечивающих минимальное отклонение образующей от прямой	208
8.3.	Исключение подрезания и недопрофилирования шлифуемой поверхности	214

8.3.1	Исключение подрезания профиля образующей передней поверхности	215
8.3.2	Устранение недопрофилирования участка образующей передней поверхности	220
8.4.	Влияние погрешностей наладки заточного станка на точность обработки передней поверхности	221
8.5.	Правка шлифовальных кругов при заточке червячных фрез	225
8.5.1	Профилирование кругов с помощью копирных устройств	225
8.5.2	Правка шлифовального круга со сферической поверхностью	227
8.5.3	Правка методом кинематического огибания	229
Библиография к главе 8		236
<b>Глава 9. Затылование боковых поверхностей зубьев червячной фрезы и шлифование витков червяка</b>		237
9.1.	Схема и параметры радиально-осевого затылования	239
9.2.	Органическая погрешность затылования	241
9.3.	Минимизация отклонения осевого профиля затылованной поверхности от прямолинейного исходного контура	242
9.4.	Формирование профиля затылованной поверхности для локализации пятна контакта в передаче	245
9.5.	Исключение подрезания и недопрофилирования поверхностей зубьев фрезы при затыловании	247
9.6.	Шлифование боковых поверхностей витков червяка	251
9.7.	Особенности шлифования эвольвентных червяков	254
9.8.	Обеспечение совпадения формы профиля витков червяка и производящей поверхности фрезы	255
9.9.	Профилирование шлифовального круга при затыловании боковых поверхностей зубьев червячных фрез	261
9.9.1	Правка круга методом копирования	261
9.9.2	Профилирование круга методом кинематического огибания	265
9.10.	Правка шлифовального круга на червячно-шлифовальных станках.	266
9.11.	Затылование зубьев червячных фрез и шлифование витков червяков с профилем витка переменной кривизны	268
9.11.1	Определение угла установки шлифовального круга при шлифовании червяков и затыловании фрез	269
9.11.2	Профилирование шлифовальных кругов для червяков и фрез с переменной и существенной кривизной профиля	272
9.12.	Технологические особенности и органическая погрешность затылования глобидных червячных фрез	276
9.12.1	Особенности процесса затылования глобидных фрез	276
9.12.2	Органическая погрешность затылования	278
Библиография к главе 9		284
<b>Глава 10. Разработка конструкторско-технологической документации, особенности производства и эксплуатации червячных фрез для червячных колес</b>		285
10.1.	Выбор геометрических и конструктивных параметров фрез	285
10.2.	Особенности технологии изготовления червячных фрез для червячных колес	297
10.3.	Контроль параметров точности червячных фрез в процессе изготовления	303
10.4.	Паспортизация червячных фрез при их выпуске и эксплуатации	308
Библиография к главе 10		309
<b>Глава 11. Выбор режимов прецизионного шлифования винтовых и затылованных поверхностей</b>		310
11.1.	Методика назначения режимов профильного шлифования	310
11.2.	Особенности назначения режимов шлифования при применении абразивных кругов из эльбора	319
11.3.	Выбор характеристики абразивного инструмента	322

11.4. Выбор характеристики шлифовального круга и режимов шлифования при заточке без применения СОЖ	329
Библиография к главе 11	330
<b>Приложение I. Фрезы червячные чистовые для червячных колес, насадные с углом зацепления <math>\alpha = 20^\circ</math> (Стандарт предприятия СТП 2515-4000)</b>	331
<b>Приложение II. Фрезы червячные чистовые для червячных колес, хвостовые с углом зацепления <math>\alpha = 20^\circ</math> (Стандарт предприятия СТП 2515-4150)</b>	338

## ВВЕДЕНИЕ

### Червячные передачи в машиностроении

Решением вопросов качественного изготовления червячных передач наука и производство занимаются уже более 100 лет.

Пространственные передачи зацеплением, в том числе червячные с цилиндрическим червяком, глобоидные и спироидные, широко используются во многих современных машинах и механизмах. Червячные передачи, в частности, применяются в редукторах общемашиностроительного назначения, в нажимных механизмах прокатных станков, в приводах и кинематических цепях различных станков, в том числе, зубообрабатывающих, и т.д.

В любых разновидностях червячных передач передаточное число многократно превышает отношение делительных диаметров червяка и колеса, что позволяет заменить одной компактной передачей многоступенчатый зубчатый редуктор.

Однако компактность, обязанный несовпадению делительных поверхностей с аксоидами передачи, органически обуславливает высокую скорость скольжения в контакте. Отсюда следуют значительные потери на трение, ускоренный износ, необходимость применения антифрикционных материалов и более низкие, по сравнению с зубчатыми цилиндрическими и коническими передачами, несущая способность и КПД.

Способы повышения нагрузочной способности передач ориентированы на приближение линейного или точечного контакта к поверхностному. Теоретические исследования в области выявления и описания свойств червячных передач, в том числе отраженные авторами в главе 1, и опыт изготовления и эксплуатации червячных передач позволили установить основные тенденции развития этих передач.

### Основные типы и тенденции развития

#### червячных передач в современных машинах и механизмах

Широко известны типы червячных передач *с цилиндрическими линейчатыми червяками*: архимедов  $ZA$ , конволютные  $ZN$ , эвольвентный  $ZI$  в обозначении ГОСТ 3675-81 (или  $ZJ$  в обозначении ГОСТ 18498-89) и нелинейчатые червяки типа  $ZK$ , поверхность витков которых образована конусом и реально получается при шлифовании коническим кругом. Вопросы проектирования и

расчета передач с цилиндрическими червяками традиционных типов подробно рассмотрены в главе 2, а основные вопросы технологии их изготовления - в главе 5 данной книги.

Основные критерии при выборе геометрии витков червяка и зубьев колеса: функциональное назначение передачи (силовая или кинематическая передача), технологическое и метрологическое обеспечение производства. В этом плане наиболее отработанными являются передачи с архимедовыми и эвольвентными червяками, а также – при большей трудоемкости контрольных операций – передачи с нелинейчатыми червяками.

**В глобоидных передачах** червяк в осевой плоскости имеет вогнутую форму, охватывающую колесо, при этом в зацеплении с витками червяка находится столько зубьев, сколько шагов колеса умещается в дуге охватывающего глобоида. Многопарность зацепления обеспечивает высокую нагрузочную способность передачи. Кроме того, в глобоидной передаче линии контакта витков червяка с зубьями колеса ориентированы перпендикулярно винтовой линии витка, что при достаточной скорости вращения червяка способствует созданию гидродинамического масляного клина и, соответственно, повышению КПД передачи. Названные эксплуатационные свойства стали основной причиной достаточно широкого распространения глобоидных передач, главным образом, в силовых механизмах техники оборонного и специального назначения. Проектирование модифицированных глобоидных передач, совершенствование технологии их производства и ее инструментальное обеспечение (глава 3) остаются на настоящее время актуальными вопросами производства соответствующей техники.

Усилиями ижевской научной школы в России было создано и успешно коммерциализировано отечественное **направление спироидных передач** – червячных передач с цилиндрическим червяком и колесом с торцевыми зубьями. В спироидных передачах расположение линий контакта близко к глобоидной передаче и удачно сочетается с увеличенным относительно червячной передачи коэффициентом перекрытия, что обеспечивает им преимущества по нагрузочной способности и КПД. С другой стороны, технология производства этих передач весьма сходна с традиционной технологией червячных передач с цилиндрическими червяками, в связи с чем, их промышленное внедрение не представляет особых производственных трудностей. Поэтому такие передачи завоевали собственную «нишу» эффективного использования, особенно в редукто-



рах трубопроводной арматуры. Специфические особенности расчета, конструирования и технологии производства спироидных передач подробно рассмотрены в книгах проф. В.И.Гольдфарба и его сотрудников (в том числе: В.И. Гольдфарб, Д.В. Гловатских, Е.С. Трубочев и др. «Спироидные редукторы трубопроводной арматуры» под ред. В.И. Гольдфарба. М.: Вече, 2011, - 222с.), к которым мы и отсылаем читателей.

Поиски путей повышения нагрузочной способности передач с цилиндрическими червяками привели во второй половине XX века к созданию двух новых видов зацеплений: первое из них и наиболее известное - с червяками типа *ZT*, профилируемыми инструментом в виде тора, второе - с замкнутыми линиями контакта.

В передачах типа *ZT* нормальный профиль витков червяка выполнен вогнутым и очерчен дугой окружности, центр которой расположен вне делительного цилиндра червяка. Такая геометрия обеспечивает **максимальные радиусы приведенной кривизны** активных поверхностей, снижение контактных напряжений и как следствие, высокую нагрузочную способность передачи, что важно для силовых редукторов. С равным успехом такие передачи могут использоваться в кинематических цепях, поскольку им, как профильно-сопряженным, органично присуща плавность зацепления.

Наиболее исследованы в геометрическом и технологическом плане передачи с червяками типа *ZT1*, особенностью которых является скрещивание осей червяка и производящего тора (дискового шлифовального круга с дуговым профилем) под углом, равным углу подъема на делительном цилиндре червяка. Серийный выпуск передач типа *ZT1* для силовых и кинематических редукторов освоен фирмой «Flender» (ФРГ) и НПО «Редуктор» (Санкт-Петербург, РФ).

В передачах с червяками типа *ZT2* оси червяка и производящего тора скрещиваются под углом, при котором профиль одного из главных плоских сечений витка является дугой окружности, совпадающей с образующей производящего тора. Промышленного применения передачи с червяками *ZT2* не нашли по ряду причин, в том числе из-за недостатка теоретических разработок в области затылования червячных фрез с существенно криволинейным контуром осевого профиля для нарезания колес к этим передачам. В главе 9 авторы приводят методику решения подобной задачи.

Передачи с червяками типов *ZT* подробно исследованы в работах Ф.Л.

Литвина, И.П. Бернацкого, И.С. Кривенко и в данной книге не рассматриваются.

Профессору Московского станкоинструментального института Л.В. Коростелеву принадлежит идея принципиально нового способа обеспечения условий жидкостного трения в червячных передачах (Авт.свид. №257246 СССР, МКИ F 16Н1/16: «Червячная передача», 1969, Бюлл. изобр. №35). В предложенной им передаче выпуклый осевой профиль червяка имеет форму овала или близкой к нему плавной кривой. ГОСТ 18498-89 определяет червяк такого типа, как червяк с профилем витка  $ZV$ . Линия мгновенного контакта в заплоской передаче с таким червяком представляет собой замкнутую кривую. Именно по этому свойству – замкнутым линиям контакта (ЗЛК) – эти передачи получили свое название.

При работе передачи с ЗЛК в редукторе с маслом, в замкнутом объеме между поверхностями витка червяка и зуба колеса образуется масляный «карман». В процессе зацепления периметр линии контакта и замкнутый внутри ее контур объем масляного «кармана» плавно уменьшаются, внутри кармана создается избыточное давление, масло постепенно «выдавливается» из этого кармана и образует устойчивый масляный зазор вдоль замкнутой линии контакта. При этом нагрузка передается не по линиям контакта, как в традиционных зацеплениях, а по всей площади, ограниченной ЗЛК, что снижает поверхностные напряжения по сравнению с передачами, имеющими линейный контакт.

Создание стабильного масляного слоя между активными поверхностями может не только повысить нагрузочную способность передачи, но также существенно увеличить ее долговечность, снизить эксплуатационные температуры и, в конечном итоге, повысить КПД редуктора. Для прецизионных передач наличие устойчивого масляного слоя между контактирующими поверхностями позволяет снизить влияние шаговых и высокочастотных составляющих погрешностей зацепления

Особенности расчета, проектирования и технологии производства червячных передач с замкнутыми линиями контакта, а также первые результаты их экспериментальных исследований приведены в главах 4 и 5.

### **Функциональное назначение червячных передач, выбор степени точности и локализация контакта**

По функциональному назначению червячные передачи разделяют на делительные и силовые. Делительные передачи применяют в конструкциях кине-

матических цепей зубошлифовальных, зубофрезерных и иных станков, в том числе в поворотных столах универсальных координатно-расточных и фрезерных станков и современных обрабатывающих центров. Параметры кинематической точности такой передачи рассчитывают, исходя из требуемых норм точности станочного оборудования, или допустимой погрешности углового поворота рабочего стола, и в соответствии с этим назначают нормы плавности и нормы контакта передачи для изготовления червяка, колеса и передачи в целом.

Делительные червячные передачи станочного оборудования выполняют, как правило, прецизионными, с точностью в пределах степеней 3...5 по ГОСТ 3675-81. Для универсальной станочной оснастки типа поворотных столов применяют передачи 6 - 7 степеней точности. Прецизионные передачи могут выполняться как с регулируемым, так и с нерегулируемым межосевым расстоянием. Практика изготовления и контроля прецизионных передач показала, что в обоих случаях наиболее объективным показателем качества в передаче является суммарное пятно контакта с нормированием по высоте и длине зубьев.

Силовые червячные передачи, предназначенные для передачи крутящего момента и мощности привода исполнительным механизмам, выполняют с той точностью, которую обеспечивает имеющееся технологическое оборудование, как правило, степеней 7...9, и качество их исполнения также контролируют по показателям суммарного пятна контакта. При проектировании силовых передач следует учитывать, что при задании более высокой степени точности повышается плавность работы передачи и увеличиваются размеры нормированного пятна контакта, что заметно способствует повышению ее нагрузочной способности и ресурса работы.

С целью компенсации неизбежных погрешностей изготовления и сборки передачи, а также влияния силовых и температурных деформаций, возникающих в процессе работы, при проектировании и изготовлении передач необходимо обеспечить локализацию пятна контакта в заданной зоне активной поверхности зубьев колеса. При этом следует учитывать, что в передачах с линейчатыми цилиндрическими червяками профильная локализация позволяет сгладить погрешности шага, а продольная - предупредить уход контакта на кромки зубьев, компенсируя погрешности сборки.

В силовых передачах локализация контакта должна быть обеспечена на всем диапазоне передаваемых усилий, чтобы минимизировать время приработ-

ки передачи и исключить существенный взаимный износ рабочих поверхностей зубьев колеса и витков червяка, необратимо искажающий геометрию зацепления.

При кинематическом назначении передач локализация нужна для обеспечения качественного пятна контакта с первых минут работы передачи без ее приработки. Однако в этом случае модификация рабочих поверхностей витков червяка и зубьев колеса, обеспечивающая локализацию контакта, должна быть ограничена по параметрам неравномерности вращения ведомого колеса.

Подробно вопросы обеспечения локализации контакта в цилиндрических червячных передачах с учетом функционального назначения передачи рассмотрены в главе 6 данной книги.

### **Проектирование и изготовление червячных фрез для нарезания червячных колес**

Узловой вопрос качественного изготовления червячных передач состоит в проектировании и изготовлении производительного зуборезного инструмента – точной червячной фрезы, производящая поверхность которой должна быть идентична рабочей поверхности червяка. Эта проблема является наиболее сложной в технологии производства червячных передач.

Конструкторско-технологические условия формирования и эксплуатации червячных фрез для червячных колес принципиально отличаются от геометрии станочного зацепления, конструкции и условий работы стандартных зуборезных фрез для нарезания зубьев цилиндрических колес. Это различие сводит к минимуму возможность использования опыта производителей стандартных зуборезных фрез при производстве инструмента для червячных колес.

Создание точных червячных фрез для червячных колес наталкивается на ряд весьма серьезных трудностей, связанных с их проектированием, изготовлением и эксплуатацией. В первую очередь к ним относятся: обеспечение нормальных условий резания путем исключения возможности возникновения в динамике обработки колеса отрицательных задних углов; расчет и распределение полей допусков на углы профиля затылованной поверхности фрезы, при которых гарантируется плавность работы передачи; технологические особенности процессов заточки и затылования зубьев фрез, особенно многозаходных и крупномодульных, при обработке которых многократно возрастают органические погрешности формы поверхностей, формирующих режущие кромки зубьев фрезы.

Червячные фрезы для нарезания зубьев червячных колес являются специальным инструментом, изготавливаемым в условиях единичного и мелкосерийного производства инструментальных цехов машино- и станкостроительных заводов. В связи с этим обобщение опыта решения изложенных вопросов является весьма актуальной задачей.

Практика производства показала, что вопросы обеспечения технологичности и оптимальных эксплуатационных характеристик червячных фрез должны решаться на этапе проектирования, начиная с выбора исходного контура производящего червяка и определения оптимального числа зубьев фрезы и заканчивая вопросом сохранения точности фрезы при переточках (глава 7). Основные требования к разработке проектно-конструкторской документации на червячные фрезы для червячных колес и методам их контроля при изготовлении и эксплуатации сформулированы в главе 10.

Как известно, производящая поверхность червячной фрезы образуется режущими кромками ее зубьев пересечением винтовых передних поверхностей и боковых затылованных задних. В этой связи актуальными для производства червячных фрез для червячных колес остаются вопросы шлифования винтовых передних поверхностей червячных фрез, включая расчет параметров наладки точного станка и выбор методов правки шлифовального круга, обеспечивающих минимальное искажение производящей поверхности (глава 8). Не менее важен выбор методов и параметров затылования боковых задних поверхностей зубьев фрезы, а также шлифования боковых поверхностей витков червяка (глава 9).

Одним из важных аспектов производства червячных передач, является обеспечение качества поверхностного слоя витков рабочих червяков, а также зубьев фрез, на операциях шлифования и затылования абразивными кругами. Основные параметры качества поверхностного слоя, а именно: отсутствие прижогов и трещин на шлифуемых поверхностях, достижение требуемого класса шероховатости, - зависят от правильного выбора абразивных характеристик шлифовальных кругов и режимов шлифования (глава 11).

Авторы выражают надежду, что предлагаемая книга окажется интересной и полезной для конструкторов и технологов, занятых проектированием и производством червячных передач, а также для студентов и преподавателей образовательных учреждений профессионального образования машиностроительной и инструментальной специализации.

# ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

## Глава 1. Избранные вопросы теории червячных передач общего вида

В настоящей главе рассматриваются вопросы теории червячных передач общего вида, включая глобоидные и спироидные. Предложена математическая модель условий сопряженности активных поверхностей в расчетной точке контакта таких передач. Модель представляет собой систему векторных уравнений, связывающих параметры относительного движения червяка, колеса и производящих инструментов с положением общей контакт-нормали.

В пространстве зацепления червячной передачи общего вида обнаружена пара сопряженных линий, которые заведомо лежат на поверхности зацепления и, в известной мере, аналогичны осям зацепления передач с цилиндрическим червяком. Использование свойств указанных линий позволяет, облегчить анализ известных и синтез новых червячных передач.

Рассмотрены условия появления сингулярных точек на огибаемой поверхности зуба и исключения на этой основе вероятности подрезания зубьев червячного колеса.

Выполненные на сегодня исследования червячных передач общего вида ни в коей мере нельзя считать законченными и они должны быть продолжены.

### 1.1 Математическая модель червячной передачи общего вида

Понятие о червячной передаче общего вида впервые появилось в работе [2]. В дальнейшем оно было подробно развито в работах [6, 16]. Основными элементами любой червячной передачи являются ведущий червяк 1 и ведомое червячное колесо 2, инструмент 3 для профилирования активных поверхностей витков рабочего червяка 1, производящий червяк 4 зуборезного инструмента для нарезания зубьев колеса 2, инструмент 5 для профилирования производящего червяка 4.

Ведущий рабочий червяк 1 и ведомое колесо 2 вращаются вокруг своих осей  $O_1-O_1$  и  $O_2-O_2$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В случае если оси 1 и 2 элементов передачи взаимно перпендикулярны, то передача называется ортогональной, в противном случае – неортогональной. На рис. 1.1 показаны начальные поверхности элементов червячной передачи общего вида в ее ортогональном варианте.

Активные поверхности витков рабочего червяка *1* и производящего червяка (производящей поверхности фрезы) *4* формируются движением инструментов, соответственно, *3* и *5* – образующей кромкой резца или поверхностью шлифовального круга. Образующие кромки (поверхности) инструментов *3*, *5* либо вращаются с угловыми скоростями  $\omega_3$ ,  $\omega_5$  – при нарезании глобоидных червяков, либо поступательно перемещаются со скоростями  $V_3$ ,  $V_5$  – при нарезании цилиндрических, конических, гиперболоидных и плоских червяков.

Зубья колеса *2* нарезаются червячной фрезой *4*, вращающейся вокруг оси  $O_4-O_4$  с угловой скоростью  $\omega_4$ .

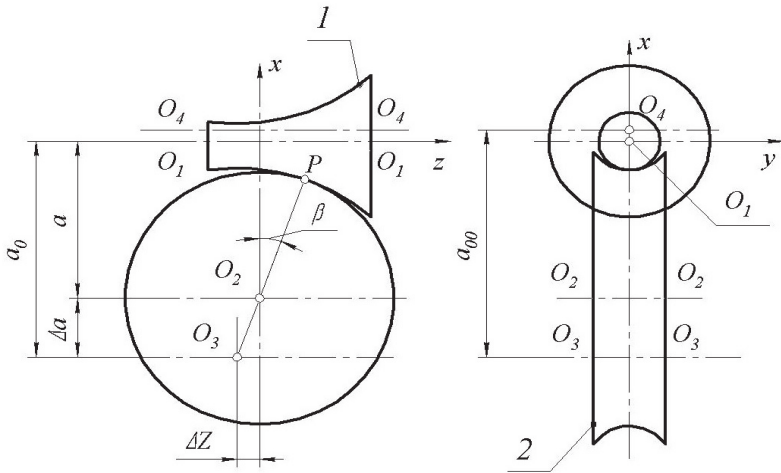


Рис. 1.1. Схема образования ортогональной червячной передачи общего вида

Вид червяка определяется взаимным расположением осей  $O_2-O_2$  и  $O_3-O_3$ . В частности, при их совпадении образуется классический глобоидный червяк [2]. При наличии смещений  $\Delta a$  и  $\Delta z$ , малых по отношению к величине межосевого расстояния  $a$  передачи, а также при изменении передаточного числа в станочном зацеплении по отношению к рабочему и при смещении режущей кромки инструмента *3* из средней плоскости колеса получают различные варианты модифицированной глобоидной передачи [3]. Как варианты червячной передачи общего вида могут рассматриваться также глобоидная передача с исходным цилиндрическим колесом [11] и червячная передача с винтовым движением косозубого колеса [9].

В случае, если ось  $O_3-O_3$  относительно оси  $O_2-O_2$  удаляется в бесконечность, глободный червяк превращается в конический с углом конусности  $\beta = \text{atan}(\lim(\Delta z/\Delta \alpha))$ , цилиндрический ( $\beta=0$ ) или плоский ( $\beta=\pi/2$ ).

В червячных и глободных передачах зона контакта активных поверхностей витков червяка и зубьев колеса пересекает плоскость, проходящую через ось  $O_1-O_1$  червяка и межосевой перпендикуляр. В спироидных передачах зона зацепления расположена вне указанной плоскости, что является их основным отличительным признаком [1, 14]. Известны также передачи с двумя зонами зацепления [5], одна из которых лежит вблизи межосевого перпендикуляра, а вторая – вне него.

Пять перечисленных выше элементов образуют одно рабочее 1-2 и три станочных 3-1, 4-2, 5-3 зацепления, для каждого из которых может быть записано уравнение зацепления:

$$\text{в рабочем зацеплении} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{12}) = 0 \quad (1.1.1),$$

$$\text{при нарезании рабочего червяка} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{13}) = 0 \quad (1.1.2),$$

$$\text{при нарезании зубьев колеса} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{42}) = 0 \quad (1.1.3),$$

$$\text{при профилировании производящего червяка} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_{35}) = 0 \quad (1.1.4).$$

Здесь  $\mathbf{n}$  - вектор общей нормали к зацепляющимся поверхностям в расчетной точке контакта,  $\mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \mathbf{V}_{24}, \mathbf{V}_{35}$  - векторы относительных скоростей элементов в той же точке, причем  $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$  и т.д.

Система уравнений (1.1.1)...(1.1.4) в инвариантной к системе координат сжатой и наглядной форме описывает необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять поверхности элементов и параметры их относительного движения для сопряженности зацепления.

Червячные передачи с линейным контактом синтезируются по второму принципу Оливье-Гохмана, согласно которому активная поверхность рабочего червяка должна быть конгруэнтна производящей поверхности и  $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{42}$ ; в этом случае уравнения (1.1.1)...(1.1.4) соблюдаются на всей поверхности зацепления.

При синтезе передач с локализованным контактом отклонения формы и расположения элементов должны быть такими, чтобы уравнения (1.1.1)...(1.1.4) соблюдались в расчетной точке для приближенных зацеплений или вдоль линии зацепления передач с постоянным передаточным отношением.

Методы обеспечения локализованного контакта в передаче связаны с комплексом конструкторских и технологических решений на стадии проекти-



рования как собственно передачи, так и инструментального обеспечения технологии изготовления червяка, червячного колеса и червячной фрезы [12].

В частности, профильная локализация достигается преднамеренным отклонением от исходного контура профиля витка рабочего или производящего червяка вблизи границ активной поверхности. При этом делительные поверхности этих червяков, а также параметры станочного и рабочего зацеплений совпадают между собой, как и при синтезе зацеплений с теоретически линейным контактом.

Продольная локализация обеспечивается модификацией формы и размеров делительных поверхностей червяков 1 и 3 чаще всего увеличением диаметра производящего червяка по отношению к рабочему. При этом параметры червяков должны быть связаны между собой уравнением

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_3) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_5), \quad (1.1.5)$$

полученным из системы (1.1.1)...(1.1.4) путем замены векторов относительных скоростей на разность векторов линейных скоростей соответствующих элементов и последующим исключением векторов линейных скоростей червяков 1, 4 и колеса 2 [ 16].

При увеличении диаметра производящего червяка по отношению к рабочему их оси в зацеплениях 1-2 и 4-2 не совпадают. В этом случае четыре вектора относительных скоростей  $\mathbf{V}_{12}$ ,  $\mathbf{V}_{31}$ ,  $\mathbf{V}_{42}$ ,  $\mathbf{V}_{53}$  должны быть компланарны в расчетной точке. Это означает, что два смешанных произведения этих векторов должны быть одновременно равны нулю:

$$\mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{V}_{42} \times \mathbf{V}_{53} = 0, \quad \mathbf{V}_{13} \cdot \mathbf{V}_{12} \times \mathbf{V}_{42} = 0 \quad (1.1.6)$$

Выражения (1.1.6) представляют необходимые и достаточные условия для выбора взаимного положения осей, а также отношений угловых скоростей  $\omega_1 \dots \omega_5$  или значений винтовых параметров рабочего  $p_1 = V_3 / \omega_1$ , и производящего  $p_4 = V_5 / \omega_4$  червяков. Эти требования являются менее жесткими, чем обычное требование коллинеарности векторов  $\mathbf{V}_{31}$  и  $\mathbf{V}_{54}$ , т.е. касания винтовых линий рабочего и производящего червяков, что расширяет возможности синтеза передач с локализованным контактом.

Для цилиндрических червяков, подставляя в (1.1.5) значения векторов  $\mathbf{V}_3 = p_1 \boldsymbol{\omega}_1$  и  $\mathbf{V}_5 = p_4 \boldsymbol{\omega}_4$  и раскрывая скалярные произведения, получаем непосредственную зависимость между числами  $z$  заходов, осевыми модулями  $m_x = 2p/z$ , углами  $\gamma$  подъема витка и нормальными углами  $\alpha_n$  профиля червяков 1 и 4 в виде:

$$m_{x1} \cos \gamma_1 \cos \alpha_{n1} = m_{x4} \cos \gamma_4 \cos \alpha_{n4} \quad (1.1.7)$$

Из выражения (1.1.7), в частности, следует, что, изменяя нормальный

угол  $\alpha_{n1}$  профиля витка червяка по отношению к углу  $\alpha_{n4}$  профиля фрезы, осевые модули червяка и фрезы можно принять равными между собой, выбрав их из стандартного ряда. Конкретные примеры синтеза передач с цилиндрическими червяками, основанного на использовании условий (1.1.5), (1.1.6), подробно рассмотрены в работах [12, 16].

## 1.2. Оси зацепления и их аналоги в червячных передачах общего вида

Как известно, исследование червячных передач с цилиндрическими червяками существенно упрощается благодаря использованию свойств осей зацепления - пары сопряженных прямых, лежащих на поверхности зацепления и пересекаемых всеми контакт-нормальными передачи [10, 18, 19]. Их положение в неподвижном пространстве не зависит от формы осевого профиля витка, что позволяет судить о расположении линий контакта без подробного исследования поверхности зацепления [5]. В каждой точке оси зацепления вектор относительной скорости касается винтовой линии червяка. С одной стороны, это свойство позволяет выбирать их в качестве расчетных точек касания начальных поверхностей передачи [19]. С другой стороны, оно облегчает определение таких качественных показателей зацепления, как удельное скольжение и мгновенный КПД [13]. Отыскание на поверхности зацепления червячной передачи общего вида линий, в некотором роде аналогичных осям зацепления, и является целью данной работы.

Обратимся к рис. 1.2. На этом рисунке скрещивающиеся прямые  $O_1-O_1$ ,  $O_2-O_2$  и  $O_3-O_3$  представляют собой оси, вокруг которых соответственно червяк, глобоидное колесо и инструмент вращаются с угловыми скоростями  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .

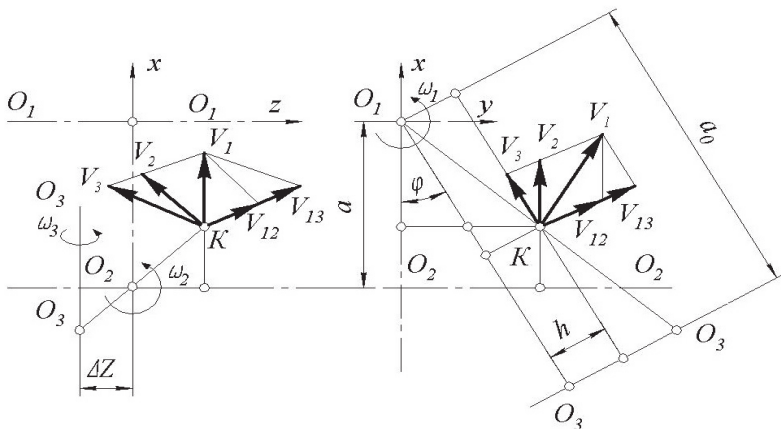


Рис.1.2. К выводу расчетных зависимостей

Через  $a$  и  $a_0$ , обозначены номинальное и станочное межосевые расстояния. Положение оси  $O_3-O_3$  задано также величиной  $\Delta z$ , а расстояние между плоскостью вращения режущей кромки и станочным межосевым перпендикуляром – величиной  $h$ . Правая прямоугольная система координат  $XYZ$  жестко связана с осями  $O_1-O_1$  червяка и  $O_2 - O_2$  колеса. Ось инструмента повернута вокруг оси червяка на угол  $\varphi$  в то положение, при котором плоскость вращения режущей кромки проходит через заданную точку  $K$  неподвижного пространства.

Отыскиваемые в данной работе линии представляют собой геометрическое место таких точек неподвижного пространства, в которых вектор относительной скорости звеньев передачи  $\mathbf{V}_{12}=\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2$  касается винтовой линии червяка, т. е. коллинеарен вектору  $\mathbf{V}_{13}=\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_3$  относительной скорости в станочном зацеплении при обработке червяка. Вектор  $\mathbf{N}$  нормали к поверхности червяка можно представить через вектор  $\mathbf{t}$  касательной к режущей кромке инструмента в виде векторного произведения

$$\mathbf{N} = \mathbf{t} \times \mathbf{V}_{13}, \quad (1.2.1)$$

Тогда, при подстановке в уравнение зацепления передачи  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}_{12} = 0$  условия коллинеарности векторов относительных скоростей

$$\mathbf{V}_{12} = \lambda \mathbf{V}_{13} \quad (\lambda \neq 0) \quad (1.2.2)$$

это уравнение обращается в тождество  $\lambda \mathbf{t} \mathbf{V}_{13} \mathbf{V}_{13} = 0$ .

Отсюда следует, что среди множества точек, определяемых уравнением зацепления, находится подмножество, удовлетворяющее условию (1.2.2.), т. е. искомые линии заведомо лежат на поверхности зацепления. Спроектировав векторы  $\mathbf{V}_{12}$  и  $\mathbf{V}_{13}$  на оси принятой системы координат, условие их коллинеарности запишем в виде:

$$V_{12x}/V_{13x} = V_{12y}/V_{13y} = V_{12z}/V_{13z}$$

Подставляя в эту систему выражения для проекций линейных скоростей  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  и  $\mathbf{V}_3$  через координаты искомой точки и угловые скорости, получим:

$$\frac{\omega_1 y - \omega_2 z}{\omega_1 y - \omega_3 (z + \Delta z) \cos \varphi} = \frac{\omega_1 x}{\omega_1 x - \omega_3 (z + \Delta z) \sin \varphi} = \frac{\omega_2 (a + x)}{\omega_3 (a_0 + x \sec \varphi - h \operatorname{tg} \varphi)} \quad (1.2.3)$$

Преобразовав систему (1.2.3) и обозначив  $u_{12} = \omega_1/\omega_2$ ;  $u_{13} = \omega_1/\omega_3$ , получим выражения для определения координат  $x$  и  $z$  искомой линии через произвольный параметр  $\varphi$

$$\frac{u_{12}}{a+x} = \frac{u_{13}}{a_0+x \sec \varphi - h \operatorname{tg} \varphi} - \frac{\Delta z \sin \varphi \cos \varphi}{a_0 x \cos \varphi - a(x-h \sin \varphi)}, \quad (1.2.4)$$

$$z = \Delta z \frac{(a+x)(x-h \sin \varphi)}{a_0 x \cos \varphi - a(x-h \sin \varphi)}. \quad (1.2.5)$$

Третья координата  $y$  определяется непосредственно из построений, приведенных на рис. 1.2, выражением:

$$y = h \sec \varphi - x \tan \varphi. \quad (1.2.6)$$

В явном виде абсцисса  $x$  определяется из квадратного уравнения, полученного преобразованием выражения (1.2.4),

$$aX^2 - (a_0 - u_{23}a + u_{21}\Delta z \sin \varphi)X + u_{22}a_0 = 0 \quad (1.2.7)$$

где

$$X = \frac{a_0 - a \sec \varphi - h \tan \varphi}{a+x} + \sec \varphi$$

Поскольку уравнение (1.2.7) дает два значения  $X$ , то система (1.2.5) – (1.2.7) определяет две сопряженные линии на поверхности зацепления червячной передачи общего вида. Вполне очевидно, что при  $\varphi=0$  одна из них проходит через точку, в которой векторы скоростей  $\mathbf{V}_{12}$  и  $\mathbf{V}_{13}$  совпадают как по величине, так и по направлению. По аналогии с обозначениями, принятыми в [10, 19] для осей зацепления в передаче с цилиндрическим червяком, назовем эту линию II–II, а указанную точку – соответственно  $P_2$ . Ее координаты определяются непосредственно из (1.2.4) – (1.2.6) выражениями:

$$x_{P_2} = -(a_0 - a u_{23}) / (1 - u_{23}), \quad y_{P_2} = h, \quad z_{P_2} = \Delta z / (1 - u_{23}). \quad (1.2.8)$$

Линия зацепления I–I при  $\varphi=0$  проходит через расположенную в плоскости  $x=0$  точку  $P_1$ , аппликата которой после раскрытия неопределенности в системе (1.2.3), определяется выражением:

$$z_{P_1} = h u_{12} \frac{a_0 - a u_{23}}{a_0 - a} + \frac{\Delta z a}{a_0 - a} \quad (1.2.9)$$

Обе сопряженные линии в общем случае являются пространственными кривыми второго порядка и состоят каждая из двух ветвей, одна из которых получается при изменении  $\varphi$  от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$  а вторая – при  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ . В дальнейшем эти вторые ветви обозначаются соответственно I'–I' и II'–II'.

Отметим, что аналогия найденных линий с осями зацепления является неполной, так как в общем случае они не пересекаются всеми контакт-нормальными передаточными. Однако, поскольку положение этих линий не зависит от формы режущей кромки, образующей червяк, их существование позволяет зна-

чительно облегчить анализ поверхности зацепления и ориентировать последнюю в пространстве, а также упростить определение некоторых качественных показателей передачи.

Одновременно условие (1.2.2) дает возможность решать задачи синтеза новых разновидностей червячных передач. В этом случае по заданным межосевому расстоянию  $a$ , передаточному отношению  $u_{12}$  и координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  некоторой расчетной точки контакта, произвольно выбрав две из четырех величин  $h$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta z$ ,  $u_{13}$ , две другие величины следует определять из системы (1.2.3). Тем самым будут обеспечены прохождение поверхности зацепления через заданную расчетную точку и касание в ней начальных поверхностей передачи.

В частных случаях червячной передачи общего вида, когда один из параметров модификации равен нулю или бесконечности, выражения (1.2.4) – (1.2.6) могут существенно упрощаться. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

### 1.2.1. Модифицированные глобoidные передачи

Рассмотрим передачу, червяк которой модифицирован методом *hua* [3], т. е. увеличением станочных межосевого расстояния  $a_0$  и передаточного числа  $u_{13}$  по отношению к параметрам  $a$  и  $u_{12}$  передачи, а также смещением режущей кромки инструмента относительно средней плоскости на величину  $h$ . В этом случае величина  $\Delta z=0$  и система уравнений (1.1.4), (1.1.5) распадается на две. Первое решение найдем, приравняв нулю знаменатель выражения (1.2.5), откуда

$$x_1 = (ah \sin\varphi)/(a - a_0 \cos\varphi) \quad (1.2.10)$$

Для определения соответствующих значений аппликаты линии I—I заменим в (1.2.4)  $\Delta z$  через  $z$  согласно (1.2.5) и, подставив в это выражение  $x_1$  из (1.2.10), разрешим его относительно  $z$

$$z_1 = h(u_{12} a_0 - u_{13} a)/(a_0 \cos\varphi - a) \quad (1.2.11)$$

Ордината  $y$  линии зацепления здесь и далее (кроме особо оговоренных случаев) определяется выражением (1.2.6).

Второе решение системы (1.2.4), (1.2.5) в случае  $\Delta z=0$  очевидно

$$z_2=0; \quad x_2 = (a_0 - au_{23} - h \tan \varphi)/(u_{23} - \sec\varphi), \quad (1.2.12)$$

т. е. линия II–II лежит в плоскости, проходящей через ось колеса и межосевой перпендикуляр.

Если к указанным условиям добавить  $h=0$ , т. е. перейти к передаче, модифицированной методом *au*, то согласно (1.2.10)  $x_1$  может быть отличен от нуля только при  $\cos\varphi_c = a/a_0 = \text{const}$ . Отсюда:

$$y_1/x_1 = -\sqrt{a_0^2 - a^2} / a, \quad z_1/x_1 = (u_{13}a - u_{12}a_0),$$

т. е. в этом случае линия I-I оказывается прямой, проходящей через начало ко-

ординат, и образует с плоскостью  $YZ$  угол  $\varphi_c$  (рис.1.3,а). Линия II-II при  $h=0$  определяется выражениями  $x_2=(a_0 - au_{23})/u_{23}$ ,  $y_2= -x_2 \tan \varphi$  и представляет собой гиперболу с асимптотами

$$x_a = \frac{(a_0 - au_{23})u_{23}}{u_{23} - 1} \pm \frac{y_a}{\sqrt{u_{23}^2 - 1}} \quad (1.2.13)$$

Отметим, что экстремум кривой продольной модификации витка по методу  $au$  будет смещен в сторону выхода червяка из зацепления, как того требует ГОСТ 17696-72, в случае, если точка  $P_2$  лежит внутри делительного глобоида червяка.

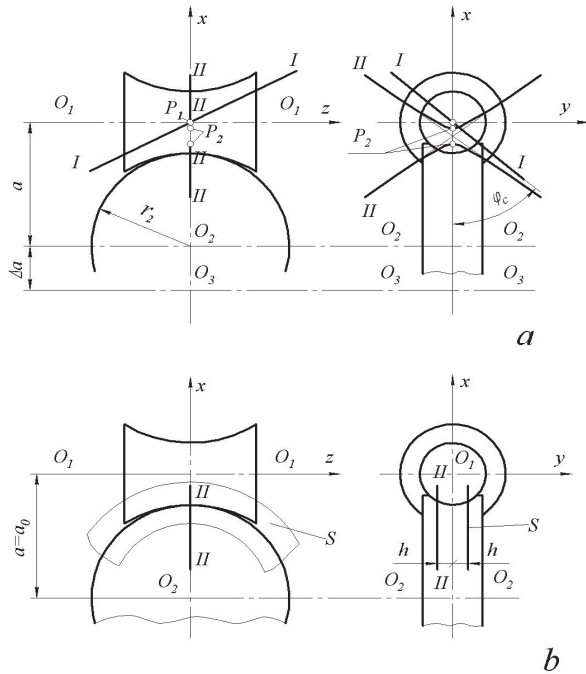


Рис. 1.3. Сопряженные линии зацепления глобоидной передачи, модифицированной:  $a$  — методом  $au$ ;  $b$  — методом  $ah$

Для передачи, модифицированной методом  $ah$  [3], т. е. при  $u_{13}=u_{12}$ , преобразование выражений (1.2.10)-(1.2.12) не представляет затруднений. Обратим внимание только на то обстоятельство, что в этом случае точка  $P_2$  уходит в бесконечность.

В передаче, модифицированной только смещением  $h$  режущей кромки (рис.1.3,  $b$ ), т. е. при  $u_{13}=u_{12}$  и  $\Delta a=0$ , условию коллинеарности векторов  $\mathbf{V}_{12}$  и  $\mathbf{V}_{13}$

удовлетворяет любая точка, лежащая на поверхности ее вращения, т.е. особые линии расплываются в плоскость  $y=h$  (плоскость S), разделяющую обкатную и подрезную зоны активной поверхности зуба колеса. Кроме того, уравнениям (1.2.6), (1.2.12) в данном случае удовлетворяет также прямая II-II ( $z_2=0, y_2=-h$ ), лежащая на второй полости поверхности зацепления. В классической глобоидной передаче плоскость S совпадает с ее средней плоскостью.

### 1.2.2. Передачи с коническими червяками

Конический червяк получается из червяка общего вида в том случае, когда ось вращения инструмента  $\theta_3-\theta_3$  уходит в бесконечность, и при этом отношение  $\Delta z/\Delta a = \tan \beta$  остается постоянным, а скорость поступательного перемещения режущей кромки  $V_3=\omega_2 r_2$ , где  $r_2$  – делительный радиус червячного колеса. Для такой передачи выражения (1.2.4) и (1.2.5) после раскрытия неопределенности преобразуются к виду

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{r_2 \cos \beta} - \frac{\tan \beta \sin \varphi}{u_{12} x}, \quad (1.2.14)$$

$$z = \operatorname{tg} \varphi \frac{(a+x)(x-h \sin \varphi)}{x \cos \varphi}. \quad (1.2.15)$$

На рис. 1.4 представлены сопряженные линии зацепления для передачи с коническим червяком при  $h=0$ , построенные по уравнениям (1.2.6), (1.2.14), (1.2.15).

Абсциссы  $x_a$  асимптот этих линий определяются как корни квадратного уравнения (1.2.7) при  $\sin \varphi = \pm 1$ , а угол наклона к оси  $z$  – отношением

$$z_a/y_a = \pm \tan \beta [(a+x_a)/x_a].$$

При синтезе передач с коническим червяком и глобоидным колесом зону контакта активных поверхностей следует выбирать в окрестности точки  $P_2$ . Симметрия линий II—II и II'—II' относительно межосевого перпендикуляра позволяет в этом случае жестко установить на одном валу два конических червяка, сопряженных с одним колесом. При синтезе спироидных передач параметры червяка должны выбираться таким образом, чтобы линия I—I или I'—I' проходила через желательную зону контакта.

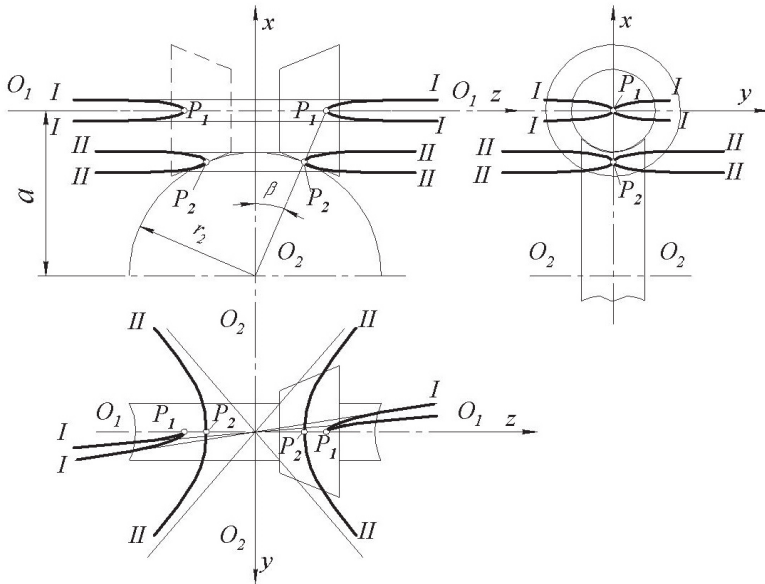


Рис. 1.4. Сопряженные линии зацепления передачи с коническим червяком

Отметим, что хотя во всех рассмотренных примерах режущая кромка, формирующая глобoidный или конический червяк, принималась расположенной в плоскости  $h=const$ , полученные зависимости остаются справедливыми и при подстановке любого другого закона  $h=h(r_3)$ , где  $r_3$  - расстояние от произвольной точки этой кромки до ее оси вращения.

### 1.2.3. Передачи с плоским червяком

Очевидно, что с увеличением угла  $\beta$  точки  $P_1$  и  $P_1'$  удаляются от межосевого перпендикуляра. В частности, при  $\beta = 90^\circ$  получаем передачу с плоским червяком (рис. 1.5). В этом случае особая линия I—I уходит в бесконечность, а линия II—II описывается уравнениями

$$x_2 = -a, z_2 = \frac{au_{12}r_2 \sec \varphi}{au_{12} + r_2 \sin \varphi} \quad (1.2.16)$$

и представляет собой плоскую гиперболу с асимптотами:

$$y_a/z_a = (h \pm a) \{ au_{12} \pm r_2 \} / au_{12}r_2.$$



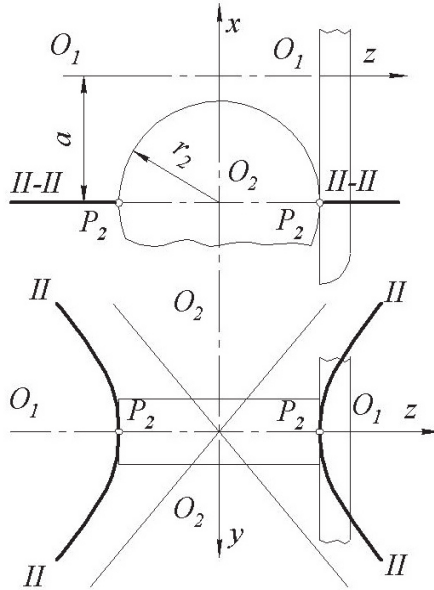


Рис. 1.5. Сопряженные линии зацепления передач с плоским червяком

В приводах машин червячные передачи с плоским червяком используются крайне редко. Однако плоский производящий червяк, или спирально-дисковая фреза, эффективно используется при нарезании цилиндрических колес с арочными зубьями. В этом случае наличие на поверхности зацепления линии, описываемой выражениями (1.2.6), может заметно облегчить исследование станочного зацепления.

#### 1.2.4. Передачи с цилиндрическим червяком

Для передачи с цилиндрическим червяком уравнения рассматриваемых линий зацепления получаются из уравнений (1.2.6), (1.2.14), (1.2.15), если положить в них угол  $\beta$  равным нулю. В этом случае уравнению (1.2.4) при любом  $\varphi$  удовлетворяют два значения  $x$ :

$$x_1 = 0, x_2 = r_2 - a \quad (1.2.17)$$

После подстановки этих значений в уравнения (1.2.6), (1.2.15) и раскрытия неопределенности в случае  $x_1 = 0$  отношение  $z/y$  вне зависимости от величины  $h$  приобретает вид

$$\frac{z_1}{y_1} = u_{12} \left( \frac{a}{r_2} - 1 \right), \frac{z_2}{y_2} = 0 \quad (1.2.18)$$

Как и следовало ожидать, уравнения (1.2.17), (1.2.18) описывают известную пару осей зацепления ортогональной червячной передачи.

На рис. 1.6 показана передача с цилиндрическим червяком и двухвенцовым червячным колесом [5]. Зона контакта червяка с глобoidным венцом расположена в окрестности оси II-II, а с плоским венцом – в окрестности оси I-I.

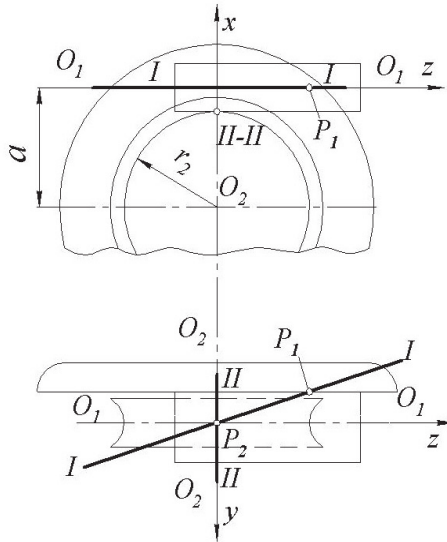


Рис. 1.6. Передача с цилиндрическим червяком и двумя зонами зацепления

Отметим, что приведенные выше векторные уравнения (1.1.1)-(1.1.6), (1.2.1), (1.2.2) не зависят от выбора системы координат и все следующие из них выводы справедливы при любом угле скрещивания осей червяка и колеса.

Однако для получения расчетных уравнений, определяющих положение обнаруженных линий, векторные уравнения нужно спроецировать на оси некоторой системы координат. В данной работе эта система была связана с взаимно перпендикулярными осями червяка и колеса. Поэтому расчетные уравнения (1.2.3)-(1.2.18) относятся только к ортогональным передачам.

Для неортогональных передач общего вида расчетные уравнения, определяющие положение аналогов осей зацепления, должны включать в себя угол скрещивания осей передачи и получаются более сложными.

Для неортогональных передач с цилиндрическим червяком пара осей зацепления была найдена в работах [10, 19]. Подробное исследование таких передач было выполнено в работе [15]. В ней, в частности, был обнаружен такой

диапазон сочетания исходных параметров передачи, в котором квадратное уравнение типа уравнения (1.2.7) не имеет решения, и оси зацепления не существуют. При этом показано, что именно в этом диапазоне обеспечиваются, как это ни парадоксально, наилучшие эксплуатационные характеристики передачи.

Таким образом, исследование пространства зацепления для червячной передачи с червяками общего вида, включая глобоидные и конические, показало наличие пары сопряженных линий, положение которых определяется положением поверхности вращения или поступательного перемещения режущей кромки, формирующей червяк, независимо от профиля этой кромки.

Обнаруженные сопряженные линии заведомо лежат на поверхности зацепления и в этом смысле аналогичны осям зацепления передач с цилиндрическим червяком. Использование свойств указанных линий позволяет, в известной мере, облегчить анализ известных и синтез новых червячных передач общего вида.

### **1.3. О сингулярностях и подрезании зубьев колес в станочном зацеплении**

*Об истории вопроса.* Как известно, при математическом огибании некоторой регулярной, т.е. не имеющей особенностей, поверхностью на ее огибающей могут, тем не менее, возникать линии сингулярных (особых или предельных) точек [4]. Физически это означает, что при нарезании зубчатого колеса зуб в окрестности такой линии окажется подрезан инструментом. В этой связи вопрос об отыскании особых точек и предотвращении подрезания является одним из самых важных в теории зацеплений.

В начале 60-х годов, в период бурного становления теории зацеплений как самостоятельной науки, он исследовался с разных сторон в работах В.М.Васильева, И.И. Дусева, М.Л. Ерихова, Л.В. Коростелева. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в работе [8]. В монографии [10] Ф.Л.Литвин решил его с достаточной полнотой и надолго «закрыл» эту проблему. В 70-е годы в литературе рассматривались только некоторые ее математические нюансы, а также практические приложения к проектированию конкретных типов передач, в частности, червячных [7].

Однако замечено, что существует некий временной интервал, “период отстоя информации”, в течение которого возникают новые пути решения, казалось бы, уже решенных задач. Наверное, именно поэтому профессор Ф.Л. Литвин в работах конца 90-х годов вновь обратился к вопросу о сингулярностях и подрезании, углубил и упростил его решение [19 - 21]. В частности, в работе [20] представлены более полные и строгие условия существования огибающих

$E_1$  и  $E_2$  к мгновенным линиям контакта как на производящей  $\Sigma_1$ , так и на огибающей  $\Sigma_2$  поверхностях; получены и богато проиллюстрированы на примерах условия совпадения  $E_2$  с ребром возврата поверхности  $\Sigma_2$ .

При этом в работах [19, 20] так же, как в предыдущих работах автора, исходное для отыскания особых точек условие остановки точки контакта на поверхности  $\Sigma_2$  используется в виде

$$\mathbf{V}_r^{(2)} = \mathbf{V}_r^{(1)} + \mathbf{V}^{(12)} = 0, \quad (1.3.1)$$

где  $\mathbf{V}_r^{(2)}$ ,  $\mathbf{V}_r^{(1)}$  - скорости перемещения точки контакта соответственно по поверхностям  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$ ,  $\mathbf{V}^{(12)}$  - относительная скорость.

В работе [21] авторами развивается альтернативный подход, согласно которому точка на огибающей  $\Sigma_2$  становится сингулярной тогда, когда ее скорость  $\mathbf{V}_{tr}^{(2)}$  в переносном (вместе с нарезаемым колесом) движении совпадает с абсолютной скоростью  $\mathbf{V}_m$  перемещения точки контакта в неподвижной системе координат  $S_m$ , и следовательно,  $\mathbf{V}_{tr}^{(2)}$  касается поверхности зацепления  $\Sigma_m$ . При этом:

$$\mathbf{N}_m \mathbf{V}_{tr}^{(2)} = 0 \quad (1.3.2)$$

т.е. нормаль  $\mathbf{N}_m$  к поверхности  $\Sigma_m$  перпендикулярна  $\mathbf{V}_{tr}^{(2)}$  и пересекает ось  $O_2-O_2$  вращения колеса. Совместив ось  $Z_m$  системы  $S_m$  с осью  $O_2-O_2$ , и, раскрыв  $\mathbf{V}_{tr}^{(2)}$  через координаты  $x_m$ ,  $y_m$  точек поверхности зацепления, уравнение (1.3.2) можно преобразовать к виду:

$$x_m N_{ym} - y_m N_{xm} = 0 \quad (1.3.3)$$

Уравнения поверхности  $\Sigma_m$  содержат те же параметры, что и уравнения поверхностей  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ . Уравнение (1.3.3) связывает между собой эти параметры. Таким образом, оно определяет линию сингулярных точек на огибающей  $\Sigma_2$  и соответствующие ей линии на поверхностях  $\Sigma_m$  и  $\Sigma_1$ .

В работе [21] на примерах конкретных пространственных зацеплений показано, что такой подход заметно облегчает разработку и использование компьютерных программ для отыскания сингулярностей.

Ниже этот подход, исторически восходящий еще к Вильдхаберу, применен к исследованию простого, но важного случая плоского станочного зацепления между производящей рейкой произвольного профиля и нарезаемым колесом.

**Уравнение сингулярности.** В рассматриваемом случае решение вопроса существенно упрощается тем обстоятельством, что из уравнений линии зацепления заведомо можно исключить обобщенный параметр движения и представить их в однопараметрической форме.

Свяжем с производящей рейкой систему координат  $S_c$ , ось  $Y_c$  которой направлена вдоль делительной прямой рейки, а  $X_c$  - от центра нарезаемого колеса, и опишем профиль рейки транспонированной матрицей:

$$\mathbf{r}_c(u) = [x_c(u) \quad y_c(u) \quad 0]^T \quad (1.3.4)$$

а нормаль к нему:

$$\mathbf{N}_c = \left[ \frac{dy_c}{du} \quad -\frac{dx_c}{du} \quad 0 \right]^T \quad (1.3.5)$$

В плоском зацеплении относительное движение сводится к вращению вокруг полюса  $P$ , и в системе  $S_c$  вектор относительной скорости в точке контакта равен:

$$\mathbf{V}_c^{(c1)} = \omega_1 [-y_c + r_1 \psi_1 \quad x_c \quad 0]^T, \quad (1.3.6)$$

где  $\omega_1$ ,  $\psi_1$  и  $r_1$  - угловая скорость, угол поворота и радиус делительной окружности нарезаемого колеса,  $r_1 \psi_1$  - перемещение рейки.

Тогда уравнение зацепления предстает в виде:

$$f(u, \psi_1) = \mathbf{N}_c \cdot \mathbf{V}_c^{(c1)} = \frac{dy_c}{du} (-y_c + r_1 \psi_1) - \frac{dx_c}{du} x_c = 0 \quad (1.3.7)$$

или

$$r_1 \psi_1 = y_c(u) + x_c(u) \frac{dx_c/du}{dy_c/du} \quad (1.3.8)$$

Совместим начало неподвижной системы координат  $S_m$  с центром колеса и направим ее оси параллельно осям системы  $S_c$  (рис.1.7). Запишем в  $S_m$  уравнения линии зацепления в двухпараметрической форме:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_m(u, \psi_1) = [x_c(u) + r_1 & y_c(u) - r_1 \psi_1 & 0]^T \\ f(u, \psi_1) = 0 \end{cases} \quad (1.3.9)$$

и подставляя в  $\mathbf{r}_m$  значения  $r_1 \psi_1$  из (1.3.8), получим уравнение с одним параметром

$$\mathbf{r}_m(u) = \left[ x_c(u) + r_1 - x_c(u) \frac{dx_c/du}{dy_c/du} \quad 0 \right]^T \quad (1.3.10)$$

При этом вектор касательной к линии зацепления записывается как:

$$\mathbf{T}_m(u) = [dx_m/du \quad dy_m/du \quad 0]^T \quad (1.3.11)$$

а необходимое условие сингулярности  $\mathbf{T}_m \mathbf{r}_m = 0$  приводится к виду:

$$\frac{x_m(u)}{y_m(u)} = -\frac{dy_m/du}{dx_m/du} \quad (1.3.12)$$

Возвращаясь к координатам профиля рейки, обозначив их производные по  $u$  через  $x'_c, y'_c, x''_c, y''_c$  и отбросив тривиальное решение  $x'_c = 0$ , уравнение (1.3.12) можно переписать в виде:

$$r_1 + x_c \left( 1 + \left( \frac{x'_c}{y'_c} \right)^2 + x_c \frac{(x''_c y'_c - x'_c y''_c)}{(y'_c)^3} \right) = 0 \quad (1.3.13)$$

или, обращаясь к геометрическим образам, в виде:

$$r_1 R_c \sin^3 \alpha_c + x_c (R_c \sin \alpha_c + x_c) = 0 \quad (1.3.14)$$

или, наконец, в виде 
$$\frac{1}{r_1} = \left( \frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_c} \right) \sin^2 \alpha_c, \quad (1.3.15)$$

где  $R_c = R_c(u)$  - радиус кривизны профиля рейки в произвольной точке;

$x_B(u) = R_c \sin \alpha_c + x_c$  - ордината центра кривизны профиля;

$\alpha_c = \alpha_c(u) = \arctan(y'_c/x'_c)$  - угол между нормалью к профилю и осью  $Y_C$ .

Отметим, что выражение (1.3.15) можно получить и иным путем: подставив в формулу Эйлера-Савари радиус центроиды рейки, равный бесконечности, и радиус кривизны обрабатываемого профиля в предельной точке, равный нулю.

Выражение (1.3.15) позволяет анализировать условия существования сингулярных точек на головке и ножке обрабатываемого зуба в зависимости от вогнутости или выпуклости профиля рейки. Например, на головке ( $x_c > 0$ ) зуба, нарезанного рейкой с вогнутым профилем ( $x_B < 0$ ), подрезание не может иметь места, поскольку правая часть уравнения (1.3.15) отрицательна, и для  $r_1 > 0$  оно заведомо не имеет решения. Аналогично могут быть исследованы пять других сочетаний знаков  $x_B, x_c$  и  $(x_B - x_c)$ .

**Практические аспекты.** Практика проектирования выдвигает, вообще говоря, три различных задачи, связанные с исключением подрезания в станочном зацеплении.

**Задача 1.** Заданы уравнения (1.3.4) профиля рейки относительно делительной прямой, проходящей через полюс станочного зацепления, и радиус  $r_1$  делительной окружности обрабатываемого колеса.

Из уравнения (1.3.12) находим значение параметра  $u = u_a$ , определяющее положение предельной точки, и ограничиваем высоту головки профиля рейки значением  $y_a = y_c(u_a)$ . Это простейший случай.

**Задача 2.** Заданы уравнения (1.3.4) профиля рейки и его границы, т.е. крайние значения параметра  $u$ . Требуется определить минимальный радиус  $r_{min}$  делительной окружности колеса, допустимый из условия неподрезания обрабатываемых зубьев.

Для любой точки линии зацепления из выражения (1.3.13) можно определить расстояние

$$\rho(u) = -x_c \left( 1 + \left( \frac{x'_c}{y'_c} \right)^2 + x_c \frac{(x''_c y'_c - x'_c y''_c)}{(y'_c)^3} \right) \quad (1.3.16)$$

от полюса до точки пересечения нормали к этой линии с межосевым перпендикуляром. Максимальное значение  $\rho(u)$  и является искомым радиусом  $r_{\min}$ . При этом возможны два случая:

- 1) в заданных границах изменения  $u_f \geq u \geq u_a$  величина  $\rho(u)$  изменяется монотонно, в этом случае, например, при нарезании эвольвентных зубьев прямобочной рейкой,  $r_{\min} = \rho(u_a)$ ;
- 2) величина  $\rho(u)$  имеет максимум внутри указанных границ, в этом случае,  $r_{\min} = \rho(u_0)$ , где  $u_0$  - корень уравнения  $d\rho(u)/du = 0$ .

*Задача 3.* Уравнения (1.3.4) профиля рейки содержат один варьируемый параметр, например, смещение  $x$  рейки относительно делительной прямой. Требуется определить минимальное значение  $x$ , при котором для заданного  $r_1$  предельная точка лежит вне заданных границ изменения  $u$ . Разрешаем уравнение (1.3.13) относительно  $x$ . При этом возможны различные варианты решения.

Линия особых точек на огибающей поверхности обычно, но не всегда является ребром возврата [4]. Для плоского зацепления различные виды особых точек, включая точки возврата, перегиба и самопересечения огибаемого профиля, подробно рассмотрены в работах [8, 17].

### **Приложение к исследованию червячных передач**

Все сказанное выше распространяется на исследование ортогональных червячных передач, как обычных, так и спироидных.

В этом случае мы можем рассматривать сечения поверхности червяка плоскостями, перпендикулярными оси колеса, как профили реек, а точки оси зацепления II-II (в обозначениях Литвина [10]), как мгновенные центры вращения.

Рассмотрим ортогональную червячную передачу со следующими параметрами: межосевое расстояние  $a_w$ , число зубьев колеса  $z_2$ , число заходов червяка  $z_1$ , и осевой модуль червяка  $m_x$ . Тогда радиусы  $R_2$  и  $R_1$  начальных цилиндров колеса и червяка определяются выражениями:

$$R_2 = 0.5 m_x z_2, \quad R_1 = a_w - R_2. \quad (1.3.17)$$

Подчеркнем, что согласно ГОСТ 18498-89 «Передачи червячные. Термины, определения и обозначения» начальный и делительный цилиндры червяч-

ного колеса совпадают между собой, а для червяка начальный цилиндр в общем случае отличается от делительного.

В реальной передаче червяк и колесо вращаются вокруг своих осей с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega_1 z_1 / z_2$ . Но, как известно, если активная поверхность цилиндрического червяка представляет собой геликоид с постоянным винтовым параметром  $p = 0.5 m_x z_1$ , то его вращение вокруг своей оси кинематически можно заменить поступательным перемещением вдоль той же оси с линейной скоростью  $V = p\omega_1$ . В этом случае к реальному вращению геликоида добавляется его винтовое движение «самого в себе», и такая замена не изменяет огибаемую поверхность.

Свяжем с таким червяком систему координат  $S_c$ , у которой ось  $Y$  параллельна оси червяка и пересекает межосевой перпендикуляр передачи в точке касания начальных цилиндров, ось  $Z$  параллельна оси колеса и ось  $X$  направлена от центра колеса. В этой системе уравнения поверхности червяка могут быть записаны различными способами.

В частности, пусть произвольный осевой профиль геликоидального червяка задан в системе координат  $S_0$ , ось  $Y$  которой совпадает с осью червяка, выражениями  $x_0(u)$ ,  $y_0(u)$ . Тогда поверхность червяка может быть получена винтовым движением этого профиля вокруг и вдоль оси  $Y$  с винтовым параметром  $p$  и описана двухпараметрическими уравнениями:

$$x_1(u, \varphi) = x_0(u) \cos \varphi, \quad y_1(u, \varphi) = y_0(u) + p\varphi, \quad z_1(u, \varphi) = x_0(u) \sin \varphi \quad (1.3.18)$$

В системе координат  $S_c$  любое сечение этой поверхности плоскостью  $z_c = c$ , перпендикулярной оси колеса, описывается однопараметрическими уравнениями:

$$x_c(u) = x_0(u) \cos \varphi + R_w, \quad y_c(u) = y_0(u) + p\varphi \quad (1.3.19)$$

где переменный угол  $\varphi = \varphi(u) = \arcsin[c / x_0(u)]$ .

Если червяк имеет линейчатую поверхность, образованную винтовым движением прямой, которая касается некоторого соосного червяку цилиндра с радиусом  $a$  под углом  $\delta$  к его оси (рис.1.7), то более удобно записать уравнения такого сечения в виде:

$$x_c(u) = \frac{a - c \sin u}{\cos u} + R_w, \quad y_c(u) = \frac{c - a \sin u}{\cos u} \tan \delta + pu, \quad (1.3.20)$$



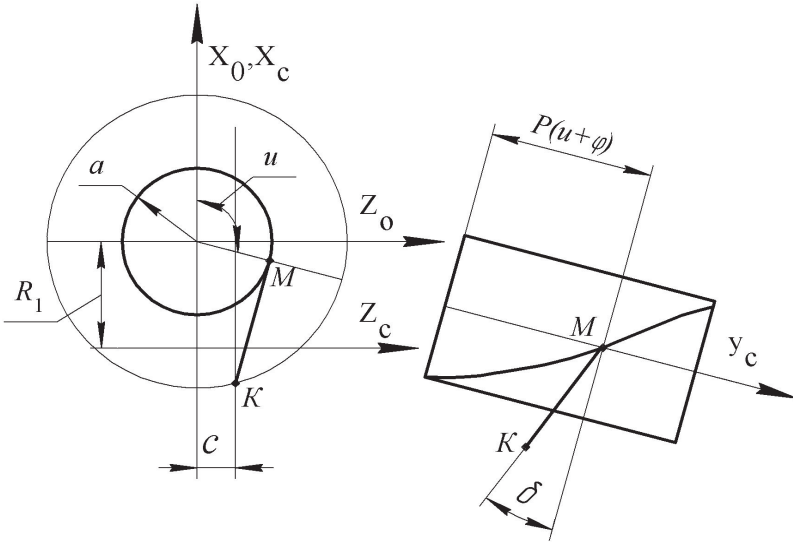


Рис 1.7. Сечение линейчатого геликоида плоскостью, перпендикулярной его оси, и винтовая линия на его направляющем цилиндре

В частности, прямолинейная образующая  $KM$  геликоида может пересекать ось червяка, в этом случае  $a = 0$  и уравнения (1.3.20) описывают сечение архимедова червяка (ЗА). Если указанная образующая касается винтовой линии основного цилиндра, т.е.  $\tan \delta = p/a$ , то эти уравнения описывают эвольвентный геликоид (ZI).

В любом случае, при постоянном  $c$  однопараметрические уравнения (1.3.19), (1.3.20) подобны уравнениям (1.3.1), описывающим профиль плоской производящей рейки. Относительное движение между этим профилем и нарезаемым колесом такое же, как в случае реечного зацепления. Поэтому все зависимости и выводы, описанные уравнениями (1.3.2)...(1.3.16) остаются справедливыми для любого сечения ортогональной червячной передачи.

В частности, подставляя в уравнение (1.3.10) первую и вторую производные от компонентов вектора  $\mathbf{r}_c(u)$  по параметру  $u$ , мы можем найти значения параметра  $u_0$ , определяющие положение предельной точки в любом сечении передачи для каждого значения  $c = \text{const}$ . Множество этих точек формирует на поверхности червяка некоторую предельную линию. Для того, чтобы предотвратить подрезание или срезание зубьев, необходимо и достаточно исключить эту линию из границ активного участка поверхности витка червяка.

Уравнение (1.3.13) позволяет решить наиболее важную в конструкторской практике задачу: определить минимальный делительный радиус червячно-

го колеса  $R_{\min}=R(u_a)$ , который гарантирует отсутствие подрезания поверхности зуба в любом ее сечении.

Результаты расчета показаны на Рис. 1.8 на примере некорректированной передачи с линейчатым правозаходным червяком и следующими параметрами: осевой модуль  $m_x = 1$ , число заходов  $Z_1 = 2$ , делительный радиус червяка  $R_1 = 4$ , радиус вершин витков  $R_a = 5$ .

Кривая 1 показывает значение  $R_{\min}$  в зависимости от величины  $c$  смещения от средней плоскости для конвольютного червяка с радиусом направляющего цилиндра  $a = 2$  и углом  $\delta = 20^\circ$ . Кривая 2 относится к архимедову червяку ( $a = 0$ ), кривая 3 – к эвольвентному червяку с радиусом основного цилиндра  $a = p/\tan\delta = 2,747$ . Кривая 4 построена для такого экзотичного конвольютного червяка, у которого прямолинейная образующая направлена навстречу винтовой линии направляющего цилиндра, т.е. угол  $\delta = -20^\circ$ .

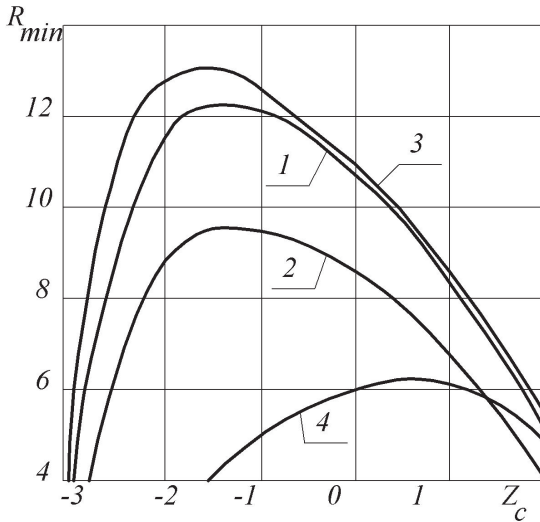


Рис. 1.8. Минимально допустимый радиус колеса в сечениях червячной передачи с различными типами линейчатых геликоидов

Сравнение этих кривых показывает, что наиболее опасное с точки зрения подрезания сечение смещено относительно средней плоскости колеса в направлении выхода червяка из зацепления. Чем больше величина  $a$ , тем больше это смещение, но даже для архимедова червяка значение  $R_{\min}$ , которое следует принимать в расчет, заметно больше, чем в средней плоскости колеса.

Все приведенные выше соображения могут быть распространены на исследование спироидных передач с геликоидными червяками. В частности,