СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Практикум

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

УДК 531(07)
ББК 22.2я73
Т338

А в т о р ы:
Т. А. Валькова, А. Е. Митяев, С. Г. Докшанин, О. И. Рабецкая, А. В. Мезенцев, А. А. Шаронов

Р е ц е н з е н т ы:
В. А. Меновщиков, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой общеинженерных дисциплин Института инженерных систем и энергетики КрасГАУ;
Н. А. Смирнов, доктор технических наук, доцент, зав. кафедрой теоретической механики Института космической техники СибГУ им. М. Ф. Решетнева

Т338 **Теоретическая механика** : практикум / Т. А. Валькова, А. Е. Митяев, С. Г. Докшанин [и др.]. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – 374 с.
ISBN 978-5-7638-4155-8

Рассмотрены примеры типовых задач по дисциплине «Теоретическая механика», изложены методические указания по их решению.

Предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся по укрупненной группе 23.00.00 «Техника и технологии наземного транспорта», специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», специализациям 23.05.01.01 «Автомобили и тракторы», 23.05.01.02 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование».

Электронный вариант издания см.:
http://catalog.sfu-kras.ru

УДК 531(07)
ББК 22.2я73

ISBN 978-5-7638-4155-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 1
СТАТИКА

Тема 1. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

На практическом занятии по теме «Система сходящихся сил» рассматриваются задачи на определение реакций связей несвободного твердого тела, которые можно решать геометрическим и аналитическим способами.

Равновесие системы сходящихся сил

Методические указания. I. *Геометрический способ* решения задачи о равновесии рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить тело, равновесие которого следует рассмотреть для отыскания искомых величин (для шарнирно-стержневых конструкций таким объектом является ее узел, т. е. шарнир, в котором сходятся оси стержней);

2) изобразить заданные силы;

3) применив принцип освобождаемости от связей, приложить к твердому телу соответствующие силы реакций связей;

4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела как свободного тела, находящегося под действием заданных сил и реакций связей, согласно уравнению

$$\vec{R} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_{\kappa} = 0, \tag{1.1}$$

построить силовой многоугольник (построение следует начинать с силы, известной как по модулю, так и по направлению);

5) геометрически решить силовой многоугольник и определить искомые величины.

Этим способом удобно пользоваться, если число задаваемых сил и сил реакций связей, приложенных к твердому телу, находящемуся в равновесии, в сумме равно трем и силы лежат в одной плоскости; тогда задача сводится к построению и решению плоского силового треугольника.

II. *Аналитический способ* решения задачи о равновесии рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить тело, равновесие которого следует рассмотреть для отыскания неизвестных величин;

2) изобразить активные (заданные) силы;

3) применив принцип освобождаемости от связей, приложить к твердому телу соответствующие силы реакций связей, в дальнейшем рассматривать равновесие данного несвободного твердого тела как свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связей;

4) выбрать декартову систему координат;

5) составить уравнения равновесия тела в проекциях на оси координат:

для плоской сходящейся системы сил

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0, \tag{1.2}$$

для пространственной сходящейся системы сил

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z} = 0; \tag{1.3}$$

6) решить полученную систему уравнений равновесия и определить искомые силы.

Если числовое значение какой-либо из неизвестных сил окажется отрицательным, то это означает, что в действительности направление силы противоположно тому, которое было указано на рисунке.

III. *При определении равнодействующей системы сходящихся сил* требуется придерживаться следующей последовательности действий:

1) изобразить заданные силы;

2) ввести декартову систему координат;

3) найти проекции R_x, R_y, R_z равнодействующей $\vec{R}$ на оси *x*, *y*, *z*;

4) вычислить модуль равнодействующей по $\vec{R}$ формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,; \tag{1.4}$$

5) определить направляющие косинусы по формулам:

$$\cos\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{i}\right) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{j}\right) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{k}\right) = \frac{R_z}{R}. \tag{1.5}$$

Пример 1.1 (2.6). Груз Q удерживается в равновесии двумя стержнями AC и BC, соединенными между собой и с вертикальной стеной шарнирами (рис. 1.1). Определить усилия в стержнях, считая их невесомыми, если углы, составляемые стержнями AC и BC со стеной соответственно равны α и β.

Решить задачу при следующих данных: $Q = 300$ Н, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

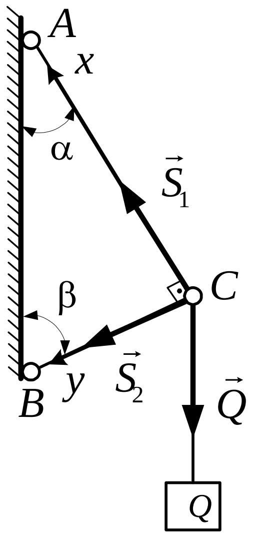


Рис. 1.1

Решение. Вырежем шарнир (узел) C и рассмотрим его равновесие.

Изобразим действующие на него силы: сила тяжести груза $\vec{Q}$, $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ – реакции невесомых стержней AC и BC соответственно, направленных по стержням в предположении, что они оба растянуты (рис. 1.1).

Шарнир C находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил. Для определения искомых усилий $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ можно воспользоваться геометрическим или аналитическими условиями равновесия для системы сходящихся сил. Рассмотрим оба способа решения этой задачи.

1. *Геометрический способ*. Согласно (1.1)

$$\vec{Q}+\vec{S}_1+\vec{S}_2=0, \tag{1.6}$$

т. е. треугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнут.

Построение начинаем в произвольной точке плоскости с известной по модулю и направлению силы $\vec{Q}$.

Через начало и конец вектора $\vec{Q}$ проводим прямые, параллельные силам $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Точка пересечения этих прямых даст третью вершину треугольника. Направление обхода треугольника, т. е. направления векторов $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, задает вектор $\vec{Q}$ (рис. 1.2).

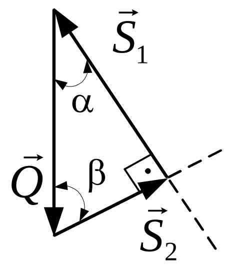


Рис. 1.2

Заметим, что направление вектора $\vec{S}_1$ на рис. 1.2 противоположно его первоначально выбранному направлению на рис. 1.1. Это означает, что предположение о том, что в положении равновесия стержень *BC* растянут неверно; в действительности стержень *BC* сжат.

Решим этот треугольник сил. Поскольку $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, то угол между векторами $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ равен 90°.

Определяем величины усилий S_1 и S_2 как катеты прямоугольного треугольника по известной величине Q его гипотенузы и острым углам α и β:

$$S_1 = Q\cos\alpha = 260 \text{ Н};$$
$$S_2 = Q\cos\beta = 150 \text{ Н}.$$

2. *Аналитический способ*. Проводим в точке *C* координатные оси: *Cx* по стержню *AC*, а *Cy* – по стержню *BC*, так как по условию задачи $\angle ACB = 90^\circ$ (рис. 1.1).

Записываем аналитические условия равновесия тела при действии плоской системы сходящихся сил (1.2):

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0;$$

и, проецируя уравнение (1.6) на выбранные координатные оси, получаем:

$$-Q\cos\alpha + S_1 = 0;$$
$$Q\cos\beta + S_2 = 0.$$

Решая эти уравнения относительно S_1 и S_2, находим:

$$S_1 = Q\cos\alpha = 260\ \text{Н},$$
$$S_2 = -Q\cos\beta = -150\ \text{Н}.$$

Здесь знаки S_1 и S_2 означают, что стержень *AC*, как первоначально предполагали, растянут, а стержень *BC* сжат.

Ответ: $S_1 = 260$ Н; $S_2 = 150$ Н.

Пример 1.2 (2.30). Балка *AB* шарнирно закреплена на опоре *A*, а у конца *B* она положена на катки (рис. 1.3, *а*). В середине балки, под углом 45° к её оси, действует сила $\vec{P}$. Определить реакции опор, пренебрегая весом балки.

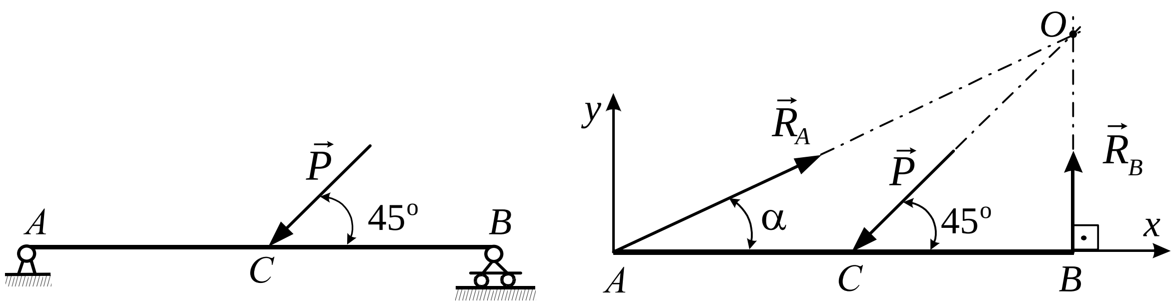


Рис. 1.3

Решить задачу при следующих данных: $P = 2$ кН, $AC = CB = 2$ м.

Решение. Рассмотрим равновесие балки *AB*, находящейся под действием силы $\vec{P}$.

Отбросим связи, заменив их действие реакциями связей. В точке *B* реакция шарнирно-подвижной опоры $\vec{R}_B$ направлена перпендикулярно к опорной поверхности. По теореме о трех силах реакция $\vec{R}_A$ подшипника A проходит черезк точку O пересечения линий действия сил $\vec{P}$ и $\vec{R}_B$ (рис. 1.3, *б*).

Следовательно, балка AB находится под действием плоской системы сходящихся сил. Для решения задачи введем декартову систему координат Axy и запишем аналитические условия равновесия (1.2) для рассматриваемой задачи:

$$R_A \cos\alpha - P\cos 45^{\circ} = 0,$$

$$R_A \sin\alpha - P\cos 45^{\circ} + R_B = 0, \qquad (1.7)$$

где α – угол, который реакция $\vec{R}_A$ образует с осью Ax.

Вычислим входящие в (1.7) синус и косинус угла α. Треугольник CBO является прямоугольным и равнобедренным: $CB = BO = 2$ м.

Из прямоугольного треугольника ABO по теореме Пифагора находим гипотенузу AO:

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ м.}$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AO} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из (1.4) определяем значения искомых реакций балки AB:

$$R_A = \frac{P\cos 45^{\circ}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1{,}58 \text{ кН};$$

$$R_B = P\cos 45^{\circ} - R_A \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 1{,}58$ кН; $R_B = 0{,}71$ кН.

Пример 1.3. Определить модуль равнодействующей двух сходящихся сил $F_1 = F_2 = 10$ Н, образующих между собой угол 60° (рис. 1.4, *а*).

Решение. 1. *Геометрический способ*. Построим по правилу сложения векторов равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

т. е. вектор, соединяющий начало первой силы $\vec{F}_1$ с концом второй силы $\vec{F}_2$ (рис. 1.4, *б*).

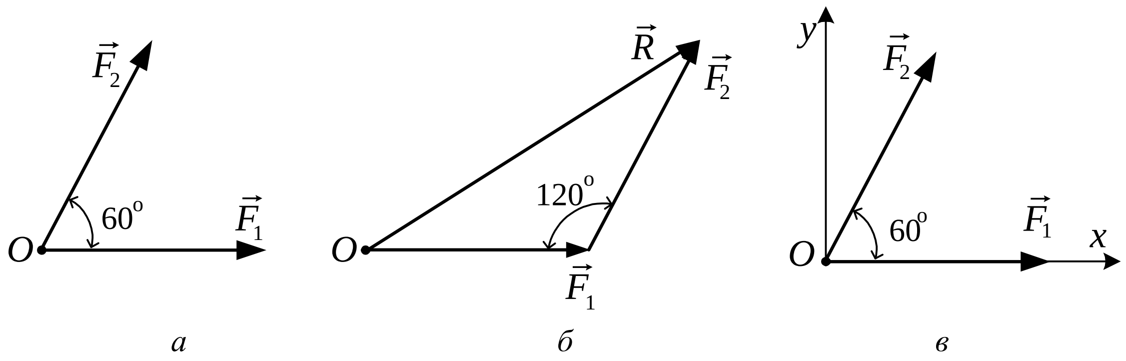


Рис. 1.4

Тогда модуль равнодействующей $\vec{R}$ определим по теореме косинусов

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_1^2 - 2F_1F_2\cos\,120^{\circ}} = 17{,}3\ \text{Н}.$$

2. *Аналитический способ*. Введем в точке O декартову систему координат Oxy, направив ось Ox по силе $\vec{F}_1$ (рис. 1.4, *в*). Вычислим проекции равнодействующей $\vec{R}$ на декартовы оси:

$$R_x = F_1 + F_2\ \cos 60^{\circ} = 15\ \text{Н},$$

$$R_y = F_2\ \sin 60^{\circ} = 8{,}66\ \text{Н}.$$

Тогда модуль равнодействующей $\vec{R}$ найдем по формуле

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{15^2 + 8{,}66^2} = 17{,}3\ \text{Н}.$$

Ответ: $R = 17{,}3$ Н.

Пример 1.4. Определить равнодействующую сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, приложенных в вершине O прямоугольного параллелепипеда, если углы, образованные линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ с ребром параллелепипеда, соответственно равны α и β (рис. 1.5).

Решить задачу при следующих данных: F_1 = 15 Н; F_2 = 20 Н; F_3 = 25 Н; α = 60°; β = 45°.

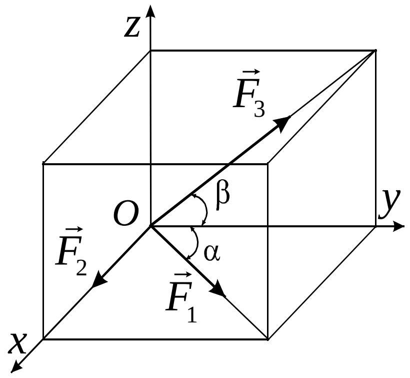


Рис. 1.5

Решение. На прямоугольный параллелепипед действует пространственная система сходящихся сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

Введем в точке сходимости сил начало *O* декартовой системы координат *Oxyz* (рис. 1.5).

Для определения модуля равнодействующей $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ вычислим её проекции на декартовы оси:

$$R_x = F_1 \cos(90^\circ - \alpha) + F_2 \cos 0^\circ + F_3 \cos 90^\circ =$$
$$= F_1 \sin\alpha + F_2 \approx 33 \text{ Н};$$
$$R_y = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos 90^\circ + F_3 \cos\beta =$$
$$= F_1 \cos\alpha + F_3 \cos\beta \approx 25{,}2 \text{ Н};$$

$$R_z = F_1 \cos 90^\circ + F_2 \cos 90^\circ + F_3 \sin\beta =$$
$$= F_3 \sin\beta \approx 17{,}7 \text{ Н}.$$

Тогда согласно (1.4) модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}} \approx 45{,}1 \text{ Н}.$$

По формулам (1.7) вычислим направляющие косинусы углов

$$\cos\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{i}\right) = \frac{R_x}{R} = 0{,}73; \quad \cos\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{j}\right) = \frac{R_y}{R} = 0{,}56; \quad \cos\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{k}\right) = \frac{R_z}{R} = 0{,}39;$$

откуда находим углы с осями $\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{i}\right) = 43^\circ 7'$; $\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{j}\right) = 55^\circ 57'$; $\left(\vec{R}\,\hat{}\,\vec{k}\right) = 67^\circ 3'$.

В декартовой системе координат вектор равнодействующей сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ приложен в точке *O* и равен $\vec{R} = 33\,\vec{i} + 25{,}2\,\vec{j} + 17{,}7\,\vec{k}$.

Ответ: $R = 45{,}1$ Н; $R = 45{,}1$ Н; $\vec{R} = 33\,\vec{i} + 25{,}2\,\vec{j} + 17{,}7\,\vec{k}$.

Пример 1.5. Три стержня *AO*, *BO* и *CO* шарнирно-стержневой конструкции соединены в точке *O*.

Определить усилия, возникающие в стержнях под действием силы $\vec{F}$, приложенной к шарниру *O* (рис. 1.6), если $AB = AO = AA'$.

Решить задачу при следующих данных: $F = 12$ Н, $AB = AO = AA' = a$.

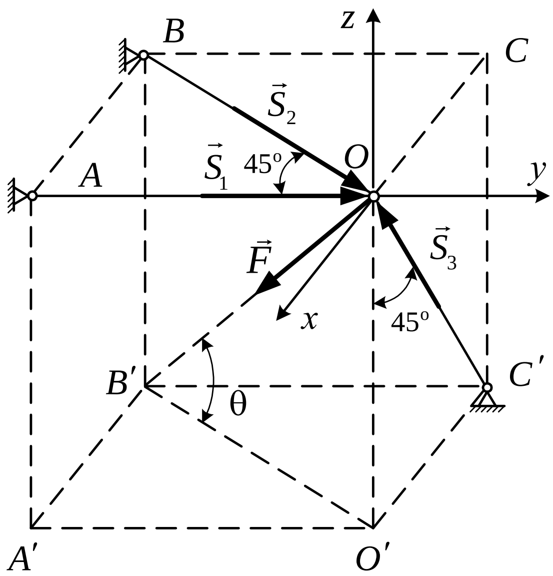


Рис. 1.6

Решение. Рассмотрим равновесие узла *O*, в котором соединяются стержни *AO*, *BO* и *CO*.

Узел *O* находится под действием силы $\vec{F}$, направленной по пространственной диагонали куба, так как по условию $AB = AO = AA' = a$.

Отбросим стержни, заменив их действие реакциями $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, направленными по стержням в узел *O*, предполагая, что в положении равновесия конструкции все стержни сжаты (рис. 1.6).

В точке *O* введем декартову систему координат *Oxyz*, направив оси по ребрам куба.

Узел *O* шарнирно-стержневой конструкции находится в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил. Поэтому запишем аналитические условия равновесия (1.3) для данной задачи:

$$S_2 \cos 45^\circ + S_3 \cos 45^\circ - F \cos\theta \cos 45^\circ = 0,$$

$$S_1 + S_2 \cos 45^{\circ} - F \cos\theta \sin 45^{\circ} = 0,$$

$$S_3 \cos 45^{\circ} - F \sin\theta = 0. \qquad (1.8)$$

Здесь использовалось свойство, что диагонали граней куба образуют с его ребрами углы 45°.

При определении проекций силы $\vec{F}$ на оси x и y применяется метод двойного проецирования: сначала силу $\vec{F}$ проецируют на координатную плоскость Oxy, проекция которой $\vec{F}_{xy}$ является вектором; затем этот вектор $\vec{F}_{xy}$ проецируют на оси координат Ox и Oy, расположенные в этой плоскости.

Для решения системы уравнений (1.8) вычислим синус и косинус угла θ между вектором силы $\vec{F}$ и плоскостью Oxy:

$$BO = \frac{AO}{\cos 45^{\circ}} = a\sqrt{2}\ , \qquad OB' = \sqrt{(BB')^2 + (BO)^2} = a\sqrt{3}\ ;$$

$$\sin\theta = \frac{OO'}{OB'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \cos\theta = \frac{O'B'}{OB'} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Тогда из третьего уравнения (1.8) находим

$$S_3 = \frac{F \sin\theta}{\cos 45^{\circ}} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}8 \text{ Н}.$$

Разделив первое уравнение системы (1.8) на $\cos 45^0$, определяем

$$S_2 = F\cos\theta - S_3 = 0 \text{ Н}.$$

Из второго уравнения (1.8) вычисляем

$$S_1 = F\cos\theta\sin 45^{\circ} - S_2\cos 45^{\circ} = 4\sqrt{3} \text{ Н} \approx 6{,}93 \text{ Н}.$$

Следовательно, в положении равновесия шарнирно-стержневой конструкции (рис. 1.6) стержни AO и CO сжаты, а стержень BO не напряжен.

Ответ: $S_1 = 6{,}93$ Н; $S_2 = 0$ Н; $S_3 = 9{,}8$ Н.

Пример 1.6. Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2, …, 6, соединенных друг с другом в узлах H и L и с неподвижными опорами A, B, C и D шарнирами (рис. 1.7). В узлах H и L приложены силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, образующие с координатными осями углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 соответственно (углы α_2, β_2, γ_2 на рисунке не показаны). Грани параллелепипеда, параллельные плоскости xy – квадраты. Диагонали боковых граней образуют с плоскостью xy угол φ, а диагонали параллелепипеда составляют с этой же плоскостью угол θ (см. рис. 1.7). Определить усилия $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, $\vec{N}_5$, $\vec{N}_6$ в стержнях 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно.

Решить задачу при следующих данных: P = 80 Н; Q = 40 Н; $\alpha_1 = 60^\circ$; $\beta_1 = 45^\circ$; $\gamma_1 = 60^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $\beta_2 = 45^\circ$; $\gamma_2 = 45^\circ$; $\varphi = 45^\circ$; $\psi = 45^\circ$; $\theta = 60^\circ$.

Решение. Сначала рассмотрим равновесие узла H, в котором сходятся три стержня 2, 3 и 4.

На этот узел действует сила $\vec{P}$ и реакции $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, которые направим по соответствующим невесомым стержням 2, 3, 4 от узла H, предполагая, что в положении равновесия все стержни растянуты (рис. 1.7).

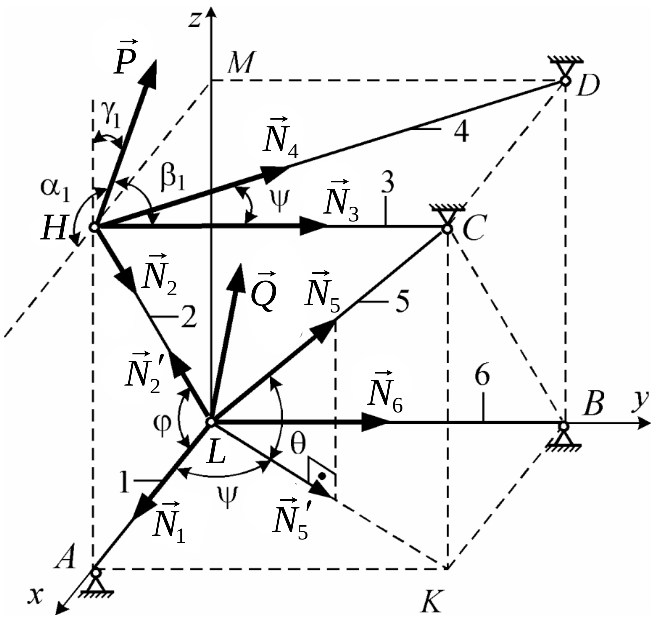


Рис. 1.7

Узел H находится в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил, для которой аналитические условия равновесия имеют вид

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z} = 0.$$

Составим эти уравнения равновесия для узла H:

$$\begin{cases} P\cos\alpha_1 - N_2\cos\varphi - N_4\sin\psi = 0, \\ P\cos\beta_1 + N_3 + N_4\cos\psi = 0, \\ P\cos\gamma_1 - N_2\sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Решим систему алгебраических уравнений (1.9) относительно искомых реакций $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$ и, подставив численные данные задачи, находим:

$$N_2 = \frac{P\cos\gamma_1}{\sin\varphi} = 46{,}2\ \text{Н},$$

$$N_4 = \frac{P\cos\alpha_1 - N_2\cos\varphi}{\sin\psi} = 65{,}3\ \text{Н},$$

$$N_3 = -P\cos\beta_1 - N_4\cos\psi = -103\ \text{Н}.$$

Теперь рассмотрим равновесие узла L. На него действует сила $\vec{Q}$ и реакции $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2'$, $\vec{N}_5$, $\vec{N}_6$, направленные от узла L по стержням 1, 2, 5 и 6 соответственно (рис. 1.7). Согласно аксиоме 4 статики реакция $\vec{N}_2'$ направлена противоположно силе $\vec{N}_2$ и численно ей равна ($N_2' = N_2 =$ $= 46{,}2$ Н).

Узел L находится в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил. Запишем уравнения равновесия (1.3) для данного узла:

$$\begin{cases} Q\cos\alpha_2 + N_1 + N_2'\cos\varphi + N_5\cos\theta\cos\psi = 0, \\ Q\cos\beta_2 + N_5\cos\theta\sin\psi + N_6 = 0, \\ Q\cos\gamma_2 + N_2'\sin\varphi + N_5\sin\theta = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

При определении проекций силы $\vec{N}_5$ на оси x и y пользуемся методом двойного проецирования. Сначала проецируем $\vec{N}_5$ на плоскость xy и получим вектор $\vec{N}_5'$, модуль которого равен $N_5' = N_5\cos\theta$; затем вектор $\vec{N}_5'$ проецируем на оси x и y и определяем проекции силы $\vec{N}_5$ на эти оси:

$$N_{5x} = N'_5 \cos\psi = N_5 \cos\theta \cos\psi,$$

$$N_{5y} = N'_5 \sin\psi = N_5 \cos\theta \sin\psi.$$

Решим полученную систему алгебраических уравнений (1.10) и, подставив численные данные задачи, найдем усилия $\vec{N}_5$ $\vec{N}_1$, $\vec{N}_6$, возникающие в соответствующих стержнях:

$$N_5 = -\frac{Q\cos\gamma_2 + N'_2 \sin\varphi}{\sin\theta} = -78{,}9 \text{ Н},$$

$$N_1 = -(Q\cos\alpha_2 + N'_2\cos\varphi + N_5 \cos\theta \cos\psi) = -78{,}2 \text{ Н},$$

$$N_6 = -(Q\cos\beta_2 + N_5 \cos\theta \sin\psi) = -63{,}4 \text{ Н}.$$

Знаки показывают, что в положении равновесия шарнирно-стержневой конструкции стержни 2 и 4 растянуты, а стержни 1, 3, 5 и 6 сжаты.

Ответ: $N_1 = -78{,}2$ Н; $N_2 = 42{,}6$ Н; $N_3 = -103$ Н; $N_4 = 65{,}3$ Н; $N_5 = -78{,}9$ Н; $N_6 = -63{,}4$ Н.

По теме 1 «Система сходящихся сил» рекомендуется решить следующие задачи из сборника [1]: 2.11, 2.18, 2.24, 2.26, 2.29, 2.31, 6.4, 6.8, 6.10.

Тема 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

На практических занятиях решаются задачи на определение реакций различных связей при действии на тело плоской системы сил; вычисляются реакции внешних и внутренних связей сочлененных тел.

2.1. Уравнения равновесия для плоской системы сил

Методические указания. Задачи на равновесие твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выделить тело, равновесие которого следует рассмотреть для определения искомых величин;

2) изобразить заданные силы;

3) применить принцип освобождаемости от связей: заменить действие связей на тело соответствующими реакциями связей;

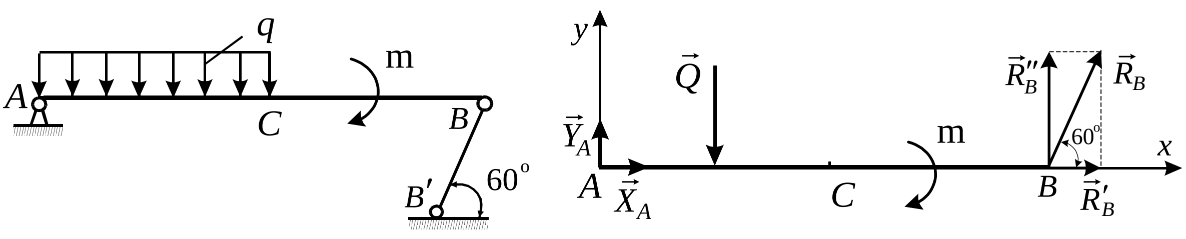
4) определить систему сил, под действием которой тело находится в равновесии и записать соответствующие аналитические условия равновесия.

5) выбрать в плоскости действия сил декартову систему координат xy и составить уравнения равновесия для данной задачи.

6) решить систему полученных алгебраических уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

Для упрощения решения точку, относительно которой предполагается составить уравнение моментов, следует выбирать на пересечении линий действия искомых сил.

Пример 2.1. Определить реакции связей балки AB, находящейся в равновесии под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и пары сил с моментом m (рис. 2.1, *а*). Весом балки и стержня BB' пренебречь.



а *б*

Рис. 2.1

Решить задачу при следующих данных: $q = 1{,}5$ кН/м, $\mathrm{m} = 2$ кН·м, $AC = CB = 2$ м.

Решение. Рассмотрим равновесие балки AB. Изобразим на рис. 2.1, *б* действующие на балку силы: пару сил с моментом m и равнодействующую равномерно-распределенной нагрузки $\vec{Q}$, приложенную в середине участка AC, численно $Q = qAC = 3$ кН.

Отбросим связи, заменив их действие реакциями связей: реакцию $\vec{R}_A$ цилиндрического шарнира A разложим на две составляющие: горизонтальную $\vec{X}_A$ и вертикальную $\vec{Y}_A$, а реакцию $\vec{R}_B$ шарнира B направим по невесомому стержню BC, предполагая, что стержень сжат (рис. 2.1, *б*).

Балка AB находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил. В этом случае аналитические условия равновесия имеют вид

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa) = 0. \tag{2.1}$$

Поскольку количество уравнений равновесия (2.1) равно числу неизвестных реакций $\vec{X}_A,\ \vec{Y}_A,\ \vec{R}_B$, то задача является статически определимой.

Проведем координатные оси *Axy*. Запишем уравнения равновесия (2.1) для данной задачи:

$$X_A + R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q + R_B \sin 60^\circ = 0;$$

$$-Q\,\frac{AC}{2} - \mathrm{m} + R_B''\,AB = 0. \tag{2.2}$$

При вычислении момента силы $\vec{R}_B$ относительно точки *A* разложим ее в точке *B* на составляющие: $\vec{R}_B = \vec{R}_B' + \vec{R}_B''$ (рис. 2.1, *б*), модули которых равны $R_B' = R_B \cos 60^\circ$, $R_B'' = R_B \sin 60^\circ$, и применим теорему Вариньона: $\mathrm{m}_A(\vec{R}_B) = \mathrm{m}_A(\vec{R}_B') + \mathrm{m}_A(\vec{R}_B'') = \mathrm{m}_A(\vec{R}_B'')$, поскольку $\mathrm{m}_A(\vec{R}_B') = 0$, так как линия действия силы $\vec{R}_B'$ пересекает точку *A*.

Решив систему уравнений (2.2) и подставив числовые данные, определим искомые реакции:

$$R_B = \frac{Q\dfrac{AC}{2} + \mathrm{m}}{AB\sin 60^\circ} = 4{,}4\ \text{кН};$$

$$Y_A = Q - R_B \sin 60^\circ = 1{,}8\ \text{кН};$$

$$X_A = -R_B \cos 60^\circ = -2{,}2\ \text{кН}.$$

Здесь знак «–» указывает, что в равновесии составляющая $\vec{X}_A$ направлена противоположно оси *Ox*.

Ответ: $X_A = -2{,}2$ кН; $Y_A = 1{,}8$ кН; $R_B = 4{,}4$ кН.

Пример 2.2. Определить вес *P* груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка *AB* находилась в равновесии в положении, изображенном на рис. 2.2, *а*. Вес балки *AB* равен *G*.

Решить задачу при следующих данных: *G* = 300 Н.

Решение. Рассмотрим равновесие однородной балки AB (рис. 2.2, *б*). Изобразим действующую на балку силу тяжести $\vec{G}$, приложенную в её середине C ($AC = CB$).

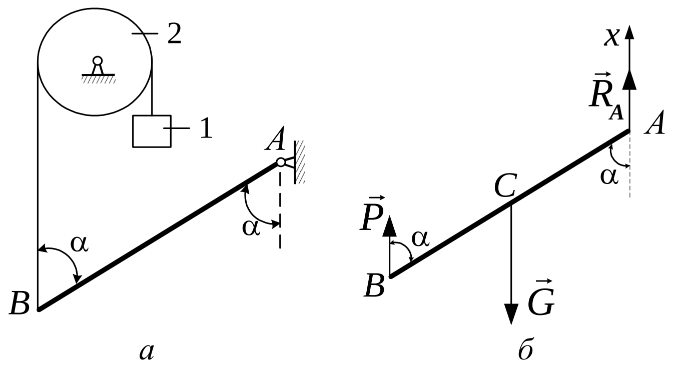


Рис. 2.2

Отбросим связи, заменив их действие реакциями связей. В точке B натяжение $\vec{P}$ вертикального троса направим по тросу (из условия равновесия неподвижного блока 2 сила натяжения троса равна весу груза 1, висящего на этом тросе). Реакция $\vec{R}_A$ цилиндрического шарнира A может быть направлена только по вертикали, поскольку все другие силы, действующие на балку AB, являются вертикальными (рис. 2.2, *б*).

Балка AB находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил. В этом случае аналитические условия равновесия имеют вид

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

Так как в данной задаче требуется определить только вес P груза 1, то из этих уравнений равновесия достаточно составить уравнение моментов сил относительно точки A, чтобы исключить из рассмотрения неизвестную по величине реакцию $\vec{R}_A$:

$$-P\,AB\sin\alpha\; + G\,AC\sin\alpha = 0\,,$$

или

$$-P\,AB\; + G\,AC = 0\,. \tag{2.3}$$

Отсюда определим искомую величину веса P груза 1 в положении равновесия

$$P = \frac{G\,AC}{AB} = \frac{G}{2} = 150 \text{ Н.}$$

Из (2.3) следует, что в случае параллельных сил величины реакций связей $\vec{P}$ и $\vec{R}_A$ не зависят от угла α, который балка AB составляет с вертикалью.

Ответ: $P = 150$ Н.

2.2. Равновесие системы тел

Методические указания. Задачи на равновесие системы твердых тел рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выделить систему тел и отдельно твердые тела, равновесие которых следует рассмотреть для определения искомых величин;

2) изобразить заданные силы;

3) применить принцип освобождаемости от связей: мысленно отбросить связи, заменить их действие силами реакций связей;

4) сопоставить число неизвестных величин и количество независимых уравнений равновесия (для статически определимой системы эти числа должны быть равны);

5) выбрать систему декартовых координат, при этом для каждого тела и для системы тел можно взять одну и ту же, или для каждого тела (системы) свою наиболее удобную систему координат;

6) записать аналитические условия равновесия для каждого твердого тела (для системы тел) в соответствии с силами, которые к ним приложены;

7) решить систему полученных уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

Если система твердых тел расчленяется на отдельные тела, то их взаимодействие заменяется реакциями внутренних связей, которые согласно аксиоме статики равны по модулю, но направлены в противоположные стороны.

Пример 2.3 (3.17). Горизонтальная разрезная балка ACB у конца A заделана в стену, у конца B опирается на подвижную опору; в точке C – шарнир (рис. 2.3). Балка загружена краном, несущим груз ве P, вес крана Q, центр тяжести крана лежит на вертикали CD.

Определить, пренебрегая весом балки, опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.

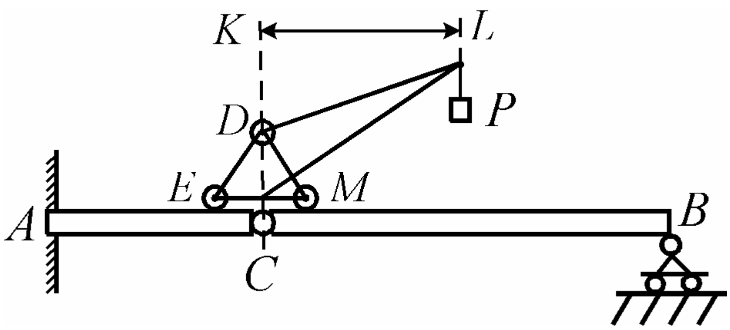


Рис. 2.3

Решить задачу при следующих данных: $P = 10$ кН, $Q = 50$ кН, $KL = 4$ м, $AC = 4$ м, $CB = 8$ м.

Решение. Разрежем конструкцию на отдельные тела: кран и балки AC и CB.

1. Для определения искомых опорных реакций в точках A и B найдем сначала силы, с которыми кран давит на балку в точках E и M. Для этого рассмотрим равновесие крана (рис. 2.4).

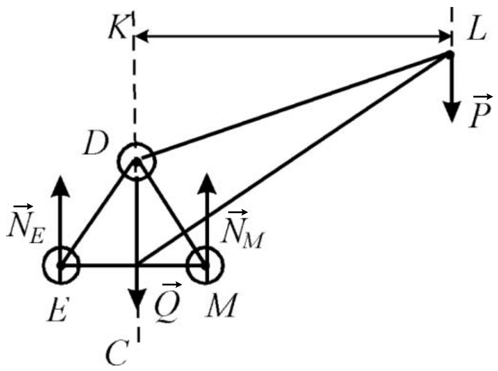


Рис. 2.4

Изобразим действующие на кран силы: силу тяжести груза $\vec{P}$, на вертикали CD – вес крана $\vec{Q}$ и реакции гладкой поверхности $\vec{N}_E$ и $\vec{N}_M$ составной балки ACB.

К крану приложена плоская система параллельных сил, направленных по вертикали.

Для определения $\vec{N}_E$ и $\vec{N}_M$ запишем аналитические условия равновесия для плоской системы параллельных сил в форме уравнений моментов относительно точек E и M приложения искомых реакций:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_E(\bar{F}_\kappa) = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_M(\bar{F}_\kappa) = 0 \tag{2.4}$$

или

$$\begin{cases} -Q\dfrac{EM}{2} + N_M EM - P\left(\dfrac{EM}{2} + KL\right) = 0, \\ -N_E EM + Q\dfrac{EM}{2} - P\left(KL - \dfrac{EM}{2}\right) = 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Каждое уравнение (2.5) содержит только по одному неизвестному, что позволяет сразу найти искомые реакции:

$$N_M = 0{,}5\ (5P + Q) = 50 \text{ кН},$$

$$N_E = 0{,}5\ (Q - 3P) = 10 \text{ кН}.$$

Силы $\vec{N}'_E$ и $\vec{N}'_M$, с которыми кран давит на составную балку *ACB*, направлены противоположно соответствующим реакциям $\vec{N}_E$ и $\vec{N}_M$, но равны по модулю, т. е. $N'_M = N_M =$ 50 кН, $N'_E = N_E =$ 10 кН.

Рассмотрим теперь равновесие балки *CB* (рис. 2.5).

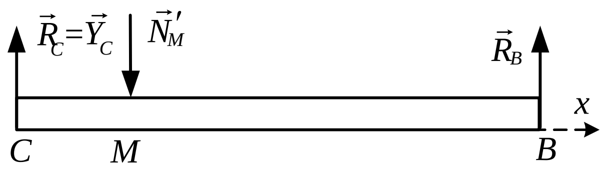


Рис. 2.5

На нее действует сила давления крана $\vec{N}'_M$, реакция подвижной опоры $\vec{R}_B$ и реакция $\vec{R}_C$ соединительного шарнира *C*, направленная по вертикали. Если в точке *C* реакцию $\vec{R}_C$ заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\vec{R}_C = \vec{X}_C + \vec{Y}_C$ и записать уравнение проекций всех сил, приложенных к балке *CB*, на горизонтальную ось *x*, то получим $\vec{X}_C = 0$. Поэтому $\vec{R}_C = \vec{Y}_C$, и реакция соединительного шарнира *C* в рассматриваемом случае направлена по вертикали.

Запишем аналитические условия равновесия для плоской системы параллельных сил в форме (2.4) относительно точек *C* и *B* приложения неизвестных реакций:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_C(\vec{F}_\kappa) = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_B(\vec{F}_\kappa) = 0$$

или

$$\begin{cases} R_B CB - N'_M CM = 0, \\ - R_C BC + N'_M BM = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим R_B = 6,25 кН, R_C = 43,75 кН.

3. Рассмотрим равновесие балки *AC* (рис. 2.6). Проведем в точке *A* декартовы оси *Axy*. К балке *AC* приложены в точке *E* сила давления крана $\vec{N}'_E$, реакции заделки в точке *A* $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$, реактивный момент m_A и реакция $\vec{R}'_C$ соединительного шарнира *C*, направленная согласно аксиоме 4 статики противоположно вектору $\vec{R}_C$ и равная ему по величине R'_C = R_C = 43,75 кН.

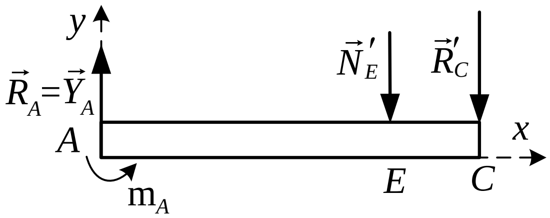


Рис. 2.6

Поскольку силы $\vec{N}'_E$ и $\vec{R}'_C$ – вертикальные, то из уравнения проекций сил, приложенных к балке *AC*, на горизонтальную ось *Ax*, получаем X_A = 0, и поэтому $\vec{R}_A = \vec{Y}_A$, т. е. направлена также по вертикали.

Следовательно, балка *AC* находится под действием плоской системы сил, параллельных оси *Ay*. Воспользуемся основной формой аналитических условий равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa) = 0,$$

или

$$\begin{cases} R_A - N'_E - R'_C = 0, \\ \mathrm{m}_A - N'_E AE - R'_C AC = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим искомые реакции заделки A:

$$R_A = N'_E + R'_C = 53{,}75 \text{ кН},$$

$$\mathrm{m}_A = N'_E AE + R'_C AC = 175 \text{кН}.$$

Ответ: $R_A = 53{,}75$ кН; $\mathrm{m}_A = 175$ кН·м; R_B = 6,25 кН.

Пример 2.4. Конструкция состоит из жесткого угольника AEC и стержня CK, которые в точке C (рис. 2.7) соединены друг с другом с помощью цилиндрического шарнира. Внешними связями являются: в точке A – шарнирно-неподвижная опора, в точке B – невесомый стержень BB', в точке D – шарнирно-подвижная опора. К конструкции приложена сила $\vec{F}$, пара сил с моментом М и на участке KB равномерно распределенная нагрузка интенсивности q. Определить реакции связей в точках A, B, C и D, вызванные заданными нагрузками.

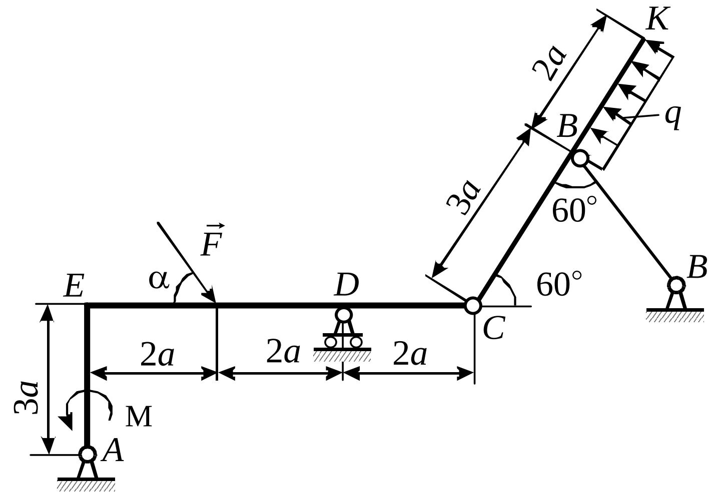


Рис. 2.7

Решить пример при следующих данных: F = 10 кН, α = 60°, q = 20 кН/м, М = 50 кН·м, a = 0,5 м.

Решение. 1. Для определения реакций расчленим конструкцию по шарниру C и рассмотрим сначала равновесие стержня KC (рис. 2.8).