



УЧЕБНИК
СИБИРСКОГО
ФЕДЕРАЛЬНОГО
УНИВЕРСИТЕТА

ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 2

**ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ
ВЫЕМОЧНО-ДОСТАВОЧНОГО КОМПЛЕКСА
НА ОТКРЫТЫХ ГОРНЫХ РАБОТАХ**

УДК 622.271.063.4(07)

ББК 33.22я73

Д466

К о л л е к т и в а в т о р о в : А. О. Шигин, А. В. Гилёв,
К. А. Бовин, А. А. Шигина, И. С. Плотников, Т. А. Герасимова

Р е ц е н з е н т ы :

И. Д. Ибатуллин, доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии машиностроения», Самарский государственный технический университет;

А. Г. Михайлов, доктор технических наук, старший научный сотрудник, зав. лабораторией «Проблемы освоения недр», Институт химии и химической технологии Сибирского отделения РАН

Д466

Динамика и прочность : учебник : в 2 ч. Ч. 2. Динамика и прочность выемочно-доставочного комплекса на открытых горных работах / А. О. Шигин, А. В. Гилёв, К. А. Бовин [и др.]. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – 524 с.

ISBN 978-5-7638-4192-3 (ч. 2)

ISBN 978-5-7638-4193-0

Во второй части учебника представлены принципы расчета деталей машин на прочность и жесткость, численные методы расчетов напряженно-деформированного состояния. Рассмотрены инженерные методы проектирования конструкций экскаваторов, способы определения напряженно-деформированного состояния в конструкциях машин, динамика и прочность автосамосвалов на горных предприятиях, факторы, влияющие на надежность экскаваторно-автомобильных комплексов, а также современные программные комплексы, используемые для проектирования и расчетов конструкций горных машин.

Предназначен для студентов специальности «Горные машины и оборудование» направления подготовки «Горное дело», изучающих дисциплины «Динамика и прочность», «Эксплуатация горных машин и оборудования», «Надежность горно-транспортных машин», может быть полезен инженерно-техническим работникам карьеров.

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 622.271.063.4(07)
ББК 33.22я73

ISBN 978-5-7638-4192-3 (ч. 2)
ISBN 978-5-7638-4193-0

© Сибирский федеральный
университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ДЕТАЛЕЙ МАШИН НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ.....	6
1.1. Основные сведения	6
1.2. Напряженное состояние в точке тела	8
1.3. Оценка прочности материала в точке тела	14
1.4. Деформированное состояние в точке тела	16
1.5. Физические уравнения	20
1.6. Полная математическая модель упругого деформируемого тела	21
1.7. Расчеты на выносливость	23
1.8. Характеристики циклов при постоянной амплитуде	24
1.9. Предел выносливости.....	25
1.10. Запас по пределу выносливости.....	28
1.11. Факторы, влияющие на запас выносливости	29
1.12. Запас выносливости при сложном напряженном состоянии	30
1.13. Расчет на выносливость при переменной амплитуде цикла	31
2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ.....	33
2.1. Основные сведения	33
2.2. Метод конечных разностей	34
2.3. Вариационно-разностный метод.....	40
2.4. Метод конечных элементов.....	44
2.5. Конечный элемент изгибаемого стержня	47
3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В СОВРЕМЕННЫХ САЕ СИСТЕМАХ	61
3.1. Обзор современных САЕ систем.....	61
3.2. Реализация МЭК простейших деталей в программном комплексе КУСТ	63
3.3. Управление программой	63

3.4. Устойчивость равновесия	70
3.4.1. Однопролетные стержни постоянного сечения на жестких опорах	70
3.4.2. Однопролетные стержни на упруго смещающихся и упруго поворачивающихся опорах	71
3.4.3. Однопролетные стержни переменного сечения на жестких опорах	73
3.4.4. Однопролетные прямые стержни постоянного сечения на упругом основании	74
3.4.5. Многопролетные стержни постоянного сечения на упругих опорах	76
3.4.6. Круговое кольцо	77
3.4.7. Круговые арки (устойчивость в плоскости).....	78
3.4.8. Параболические арки (устойчивость в плоскости)	80
3.4.9. Пологие двухшарнирные арки (устойчивость в плоскости)	82
3.4.10. Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных балок	83
3.4.11. Прямоугольная пластинка	83
3.4.12. Круглая пластинка	85
3.4.13. Косоугольная пластинка	87
3.4.14. Цилиндрическая панель	88
3.4.15. Коническая панель	89
3.4.16. Сферическая панель	90
3.4.17. Круговая цилиндрическая оболочка.....	91
3.4.18. Эллиптическая цилиндрическая оболочка.....	93
3.4.19. Усеченная коническая круговая оболочка	93
3.4.20. Сферическая оболочка	95
3.5. Частоты собственных колебаний	96
3.5.1. Однопролетные стержни постоянного сечения на жестких опорах	96
3.5.2. Однопролетные стержни на упругом основании	97
3.5.3. Стержни переменного сечения	98
3.5.4. Круговые кольца.....	100
3.5.5. Струны.....	101
3.5.6. Прямоугольные плиты	101
3.5.7. Круговые плиты	103
3.5.8 Цилиндрическая оболочка.....	104
3.5.9. Коническая оболочка	105
3.6. Другие задачи о колебаниях. Справочные данные о внутреннем трении	106

3.7. Статические расчеты	107
3.7.1. Круглые пластинки.....	107
3.7.2. Прямоугольные пластинки	109
3.7.3. Сферические купола.....	110
3.8. Контактные напряжения.....	112
3.9. Вспомогательные вычисления	115
3.9.1. Корни полиномов	115
3.9.2. Моменты инерции простых тел	116
3.9.3. Геометрические характеристики.....	119
3.9.4. Детерминант матрицы.....	122
3.9.5. Вычисление обратной матрицы	123
3.9.6. Системы линейных уравнений	123
4. РЕАЛИЗАЦИЯ МКЭ	
В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS.....	125
4.1. Основные сведения	125
4.2. Основы работы в ANSYS Workbench	127
4.3. Графический интерфейс Workbench	128
4.4. Работа с проектом в Workbench.....	132
4.5. Геометрическое моделирование	138
4.6. Графический интерфейс модуля Design modeler	140
4.7. Создание эскиза геометрической модели	146
4.8. Инструменты рисования.....	150
4.9. Инструменты редактирования эскиза	153
4.10. Задание ограничений и связей между объектами	156
4.11. Задание размерных параметров эскиза	158
4.12. Создание объемных моделей	162
4.12.1. Простейшие операции моделирования.....	162
4.12.2. Операции с объемными моделями	171
4.12.3. Дополнительные инструменты моделирования	182
4.12.4. Управление элементами в дереве построения	187
4.12.5. Параметризация геометрической модели.....	189
4.13. Управление материалами и их свойствами	193
4.13.1. Графический интерфейс модуля управления материалами.....	193
4.13.2. Работа с источниками данных	198
4.13.3. Работа с материалами и их свойствами	200
4.13.4. Использование пластичных материалов	208
4.13.5. Задание пластических свойств материала	213
4.13.6. Задание свойств гиперупругих материалов.....	215
4.14. Генерация конечно-элементной сетки	221
4.14.1. Порядок разбиения.....	221

4.14.2. Общие настройки генератора сеток	224
4.15. Работа с меню Mesh Control	231
4.15.1. Контроль формы элементов	232
4.15.2. Локальное изменение сетки	240
4.15.3. Плотность сетки в контактной области. Команда Refinement	246
4.15.4. Генерация регулярной сетки по разметке	249
4.15.5. Сетка на сочетающихся поверхностях	251
4.15.6. Просмотр сетки конечных элементов	252
4.15.7. Ошибки при генерации сетки	253
4.15.8. Работа с виртуальной топологией	254
4.15.9. Соответствие команд изменения сетки в модуле симуляции Mechanical и ANSYS	257
4.16. Нагрузки и граничные условия. Настройка решателя	258
4.16.1. Виды нагрузок и особенности их задания	260
4.16.2. Инерционные нагрузки	265
4.16.3. Конструкционные нагрузки	268
4.16.4. Граничные условия	279
4.16.5. Параметры и опции решателя	287
4.16.6. Контроль шагов решения	288
4.16.7. Управление решателем	289
4.16.8. Управление нелинейным решением	291
4.16.9. Управление результатами решения	293
4.16.10. Управление текущим анализом	294
4.16.11. Управление отображением нагрузок	296
5. РЕАЛИЗАЦИЯ МЭК В ПАКЕТЕ APM FEM ПРОГРАММОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОМПАС-3D	297
5.1. Основные положения	297
5.2. Начало работы с APM FEM	298
5.3. Общий порядок расчета твердотельной модели. Подготовка модели к расчету	305
5.4. Работа с деревом прочностного анализа	316
5.5. Генерация КЭ-сетки	317
5.6. Выполнение расчета. Параметры и методы расчета	321
6. РЕАЛИЗАЦИЯ МЭК В ПАКЕТЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА AUTODESK INVENTOR PROFESSIONAL	334
6.1. Особенности наложения нагрузок на деталь	335
6.2. Доступные ограничения	339
6.3. Пример расчета	344

7. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ПРОЧНОСТНОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА ABAQUS.....	353
8. СИСТЕМА КОМПЛЕКСНОГО НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ MARC	355
9. СИСТЕМА РАСЧЕТА И ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ NASTRAN.....	357
10. СИСТЕМА ВИРТУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ ADAMS.....	363
11. СИСТЕМА ДЛЯ ВЫСОКОЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА LS-DYNA.....	366
12. СИСТЕМА ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ COSMOS.....	370
13. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЭКСКАВАТОРОВ.....	372
13.1. Нагрузки и определение усилий в несущих элементах конструкций	372
13.1.1. Расчетные случаи проектирования экскаваторов.....	378
13.1.2. Расчетные схемы конструкций экскаваторов	385
13.2. Аварии и разрушения конструкций экскаваторов.....	393
13.2.1. Надежность и аварийность экскаваторов на открытых горных работах	394
13.2.2. Причинно-следственный комплекс аварий и отказов несущих конструкций.....	398
13.2.3. Сценарии аварий экскаваторов.....	401
13.3. Новые задачи анализа напряженно-деформированного состояния при проектировании экскаваторов	405
13.4. Напряженное состояние с учетом технологической дефектности.....	414
13.4.1. Концентрация напряжений в области технологической дефектности	414
13.4.2. Статистическое моделирование параметров напряженно-деформированного состояния в связи с наличием дефектов	417
13.4.3. Обоснование сценариев аварийных ситуаций	427
13.5. Моделирование нелинейного поведения несущих конструкций экскаваторов	432

14. ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ ГОРНЫХ АВТОСАМОСВАЛОВ. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭКСПЛУАТАЦИИ И НАДЕЖНОСТЬ БОЛЬШЕГРУЗНЫХ АВТОСАМОСВАЛОВ НА ГОРНЫХ ПРЕДПРИЯТИЯХ.....	445
14.1. Показатели эффективности и области рационального использования карьерных автосамосвалов.....	445
14.2. Надежность и аварийность карьерных автосамосвалов.....	449
14.3. Постановка задачи повышения эффективности эксплуатации карьерных автосамосвалов.....	453
14.4. Классические методы расчета рам автосамосвалов и задачи оценки напряженно-деформированного состояния.....	461
14.5. Оценка опасности хрупкого разрушения и обоснование периодичности технической диагностики рам.....	470
14.6. Конструктивные усиления поврежденных фрагментов рам.....	478
15. ДОЛГОВЕЧНОСТЬ РАМ АВТОСАМОСВАЛОВ И НАДЕЖНОСТЬ ЭКСКАВАТОРНО-АВТОМОБИЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ.....	482
15.1. Ресурс рам при движении автосамосвала.....	482
15.2. Оценка динамического и повреждающего воздействия при загрузке автосамосвала экскаватором.....	486
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	492
ГЛОССАРИЙ.....	493
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	504

1. ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ДЕТАЛЕЙ МАШИН НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

1.1. Основные сведения

Поломкам и износу деталей машин обязательно сопутствует изменение формы и размеров – деформация. Деформация имеет место и при нормальной работе машины, так как действие эксплуатационных нагрузок неизбежно приводит к силовому взаимодействию частиц тела детали между собой и, следовательно, к изменению расстояний между ними.

Во многих машинах эксплуатационные деформации ограничены требованиями к точности рабочих движений, точности геометрии сопряжений кинематических пар. Особенно жесткие ограничения на деформации имеют место в среднем машиностроении, станкостроении, автоматостроении.

В большинстве конструкционных материалов небольшие (ограниченные) деформации происходят в условиях упругости, т. е. способности тел восстанавливать форму и размеры после разгрузки. При этом для конструкционных можно считать выполнимым свойство идеальной упругости и линейной зависимости между силами и деформациями. Противоположностью упругих свойств является пластичность. Переход к пластическим деформациям обычно происходит при нагрузках, близких к предельным, поэтому в расчетах можно принять допущение об идеальной упругости материала детали.

Расчет деталей машин на прочность и жесткость предполагает исследование взаимодействия частиц материала между собой по всему объему тела детали.

Если считать, что материал непрерывно заполняет объем, занятый телом детали, то можно при описании взаимодействия использовать хорошо разработанный математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Тогда и предельные взаимодействия должны рассматриваться не в атомном, а в гораздо более крупном объеме. Поскольку реальные дефекты и другие несовершенства структуры приводят к разрушениям не на атомно-молекулярном уровне, то принятие гипотезы сплошности в расчетах на прочность и жесткость вполне обосновано. Однако при этом необходимо экспериментально определять предельные взаимодействия на макроуровне.

Рассмотрение взаимодействия частиц материала под нагрузкой существенно упрощается, если считать тело изотропным. Это справедливо для основных конструкционных материалов – металлов и большинства пластмасс. Теория композитных (анизотропных) материалов рассматривается отдельно. Рассмотренная выше схематизация свойств материалов положена в основу расчетов на прочность и жесткость. Дополнительно предлагается линейная упругость материалов (выполнение законов Гука), что также в основном справедливо для абсолютного большинства конструкционных материалов при рабочих нагрузках (кроме резинотехнических изделий с выраженной нелинейной упругостью).

При рассмотрении взаимодействия частиц материала под нагрузкой фактически неприемлемо представление внешних сил как сосредоточенных в точке (как это делается в теоретической механике, где принимается модель абсолютно твердого тела). Сосредоточенная в точке (т. е. на бесконечно малом участке поверхности или объема тела) сила предполагает бесконечно большую интенсивность сил взаимодействия частиц в этой зоне. Поэтому при расчетах на прочность и жесткость необходимо рассматривать реальный характер приложения сил, т. е. их распределение по части поверхности или объема тела. Если же при решении задачи силы рассматриваются как сосредоточенные, то прилегающая часть объема должна исключаться из рассмотрения. В дальнейшем будет показана справедливость принципа Сен-Венана, согласно которому характер взаимодействия частиц в отдалении от зоны приложения нагрузки мало зависит от характера распределения последней в зоне ее приложения. Поэтому в некоторых случаях будем оперировать сосредоточенными силами и моментами, но в основном будем рассматривать реально распределенные по поверхности силы интенсивностью q (размерность Н/м^2) – поверхностные силы или силы взаимодействия деталей между собой. Иногда будем учитывать объемные силы, т. е. силы, распределенные по объему тела, интенсивностью q (размерность Н/м^3). Это обычно силы веса, силы инерции, силы от взаимодействия других полей, например магнитных [1].

Заметим, что внешние силы не всегда можно считать заданными, т. е. они не всегда могут быть определены из условий равновесия тела. Даже если считать деформации тела, т. е. его форму и размеры, мало изменяемыми под нагрузкой, то и в этом случае внешние сосредоточенные силы можно определить из условий равновесия только в том случае, если на тело наложено не более шести связей. Фактически же на реальные детали чаще всего с целью повышения жесткости накладывают больше связей (мост имеет больше двух опор, стул – больше трех ножек и т. д.). Равновесие деформированного тела как абсолютно жесткого будет рассматриваться на основе принципа отвердевания (после приложения на-

грузки и окончания динамических процессов), который мы будем широко применять, учитывая большую жесткость реальных деталей.

Задачи, в которых, используя принцип отвердевания, можно из условий равновесия найти все внешние силы, называют *статически определенными*. Очевидно, что такие задачи являются частным случаем статически неопределимых задач и всегда – следствием существенного упрощения расчетной схемы задачи. В дальнейшем будем в основном решать задачи в общем виде, не разделяя их на статически определимые и неопределимые.

Перейдем к понятию внутренних сил и их схематизации.

Внутренние силы, как и внешние, будем характеризовать их интенсивностью, т. е. степенью распределенности по некоторой поверхности, что прямо связано со степенью и характером взаимодействия частиц тела, расположенных по обе стороны этой условной поверхности. Принято в качестве поверхности выбирать плоскость, а интенсивность внутренних сил на этой плоскости – называть полными напряжениями (размерность Н/м²). Очевидно, что в каждой точке плоскости напряжение характеризуется величиной и направлением, т. е. является вектором. Проекцию этого вектора на нормаль к плоскости называют нормальным напряжением, а на плоскость – касательным. Нормальное напряжение характеризует интенсивность сил, отрывающих частицы по обе стороны условной плоскости друг от друга, а касательное – интенсивность сил, сдвигающих частицы вдоль плоскости их действия. При высокой величине напряжений в одной из точек тела может произойти разрыв или сдвиг, приводящий к потере сплошности, т. е. к разрушению. Сдвиг или отрыв частиц, происходящий на поверхности тел, – результат износа в процессе механического взаимодействия. Очевидно, что местные изменения размеров и формы также связаны с напряжениями в этой зоне. Изменение же формы и размеров тела вообще – следствие местных деформаций во всем объеме, т. е. напряжений.

1.2. Напряженное состояние в точке тела

Условие прочности детали соблюдено, если оно выполнено в любой точке детали. Прежде чем перейти к изучению прочности материала, исследуем напряженное состояние в точке нагруженного тела.

Через любую точку тела можно провести бесконечное множество плоскостей, в каждой из которых будет свой по величине и направлению вектор напряжения \underline{p} , а значит, свое нормальное и касательное напряжения. Совокупность этих напряжений и есть напряженное состояние в точке. Напряженное состояние должно быть описано какой-то более общей, чем вектор, величиной, так как каждое полное напряжение в одной из плоскостей – уже есть вектор. Из математики известно понятие тензора. Например,

число – это тензор нулевого ранга, вектор-тензор первого ранга. Покажем, что напряженное состояние в точке – тензор второго ранга, характеризующийся девятью числами, и исследуем его свойства.

Предположим, что проекции векторов напряжений в трех взаимно перпендикулярных плоскостях – это девять величин, характеризующих тензор напряженного состояния в точке. Свяжем плоскости с декартовой системой координат. Проекциям напряжений на оси (нормальным напряжениям) будем присваивать индекс оси, которая перпендикулярна площадке действия данных напряжений, а для касательных введем второй индекс оси, которой параллельна данная проекция. Сведем все девять величин в матрицу напряжений:

$$|\sigma| = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Если около точки выделить координатными плоскостями элементарный объем в виде параллелепипеда dx, dy, dz , то по трем его граням с положительной внешней нормалью положительные напряжения будут действовать в направлении соответствующих осей, а по трем остальным – в противоположном направлении. Причем по всем граням элементарного параллелепипеда ввиду его малости имеем равномерное распределение напряжений с равнодействующей, приложенной в центре тяжести грани [2].

Если рассечь элементарный параллелепипед некой произвольной плоскостью с нормалью $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ единичной длины, то получим элементарный тетраэдр (рис. 1.1). По трем координатным граням его действуют девять составляющих напряжений, а по четвертой – неизвестное напряжение $\bar{p}_v(p_x, p_y, p_z)$. Поскольку все тело находится в равновесии, то и любой его объем находится в равновесии. Действующие силы получаем умножением соответствующего напряжения на площадь грани [3].

В дальнейшем для сокращения записи иногда будем заменять: $v_x = l, v_y = m, v_z = n$.

Обозначим площадь наклонной грани dF . Соответственно площади остальных граней: $dF \cdot l = 1/2 \cdot dy \cdot dz, dF \cdot m = 1/2 \cdot dx \cdot dz, dF \cdot n = 1/2 \cdot dy \cdot dx$.

Рассмотрим сначала равновесие моментов относительно осей, параллельных исходным, с началом координат в центре тяжести наклонной площадки:

$$\tau_{yx} \cdot 1/2 dx \cdot dz \cdot 1/3 dy - \tau_{xy} \cdot 1/2 dy \cdot dz \cdot 1/3 dx = 0, \quad (1.2)$$

$$\tau_{yz} \cdot 1/2 dx \cdot dz \cdot 1/3 dy - \tau_{zy} \cdot 1/2 dy \cdot dx \cdot 1/3 dz = 0, \quad (1.3)$$

$$\tau_{xz} \cdot 1/2 dz \cdot dy \cdot 1/3 dx - \tau_{zx} \cdot 1/2 dy \cdot dx \cdot 1/3 dz = 0. \quad (1.4)$$

С другой стороны,

$$\overline{p}_v = |\sigma| \cdot v. \quad (1.11)$$

Напряжение на любой площадке p_v получают линейным преобразованием орта нормали с матрицей преобразования – симметричной матрицей напряжений.

Из математики известно, что такое преобразование полноосно, т. е. имеет три взаимно перпендикулярных собственных вектора $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$, преобразование которых есть умножение на скаляр – собственное число матрицы, т. е.

$$\overline{p}_{v1} = \sigma_1 \cdot \overline{V}_1, \quad \overline{p}_{v2} = \sigma_2 \cdot \overline{V}_2, \quad \overline{p}_{v3} = \sigma_3 \cdot \overline{V}_3. \quad (1.12)$$

Таким образом, в точке существует три взаимно перпендикулярных площадки, в которых полное напряжение направлено по нормали и численно равно одному из собственных чисел матрицы, а касательные напряжения отсутствуют [5]. Такие площадки называют главными площадками, а нормальные напряжения на них – главными напряжениями. Принято обозначать главные напряжения так, чтобы

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.13)$$

Главные напряжения – собственные числа матрицы напряжений – находят из характеристического уравнения матрицы

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (1.14)$$

что в развернутом виде может быть записано как

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + \sigma_2 - I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (1.15)$$

Коэффициенты I_1, I_2, I_3 называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= |\sigma|. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Величины главных напряжений зависят только от формы тела и внешних нагрузок, т. е. инвариантны к выбору осей. Поэтому, выбрав

в качестве координатных осей главные оси, получаем матрицу напряжений в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

а инварианты напряженного состояния в точке

$$\begin{pmatrix} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_3 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

а также

$$p_x = \sigma_1 l, \quad p_y = \sigma_2 m, \quad p_z = \sigma_3 n,$$

где l, m, n – направляющие косинусы нормали относительно главных осей. Тогда нормальное напряжение на произвольной площадке есть проекция полного напряжения p_ν на нормаль к площадке, т. е.

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.19)$$

Квадрат касательного напряжения на произвольной площадке равен

$$\tau_\nu^2 = p_\nu^2 - \sigma_\nu^2, \quad (1.20)$$

или

$$\tau_\nu^2 + \sigma_\nu^2 = p_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (1.21)$$

Учтем также, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = |\nu|^2 = 1. \quad (1.22)$$

Нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения на произвольной площадке по (1.19), (1.21), (1.22) связаны с $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и не могут принимать любые значения. Исследуем эти соотношения.

Очевидно, что линейная относительно l^2, m^2, n^2 система уравнений

$$\begin{cases} \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \sigma_\nu \\ \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases} \quad (1.22)$$

должна иметь только положительное решение, т. е. допустимы только такие σ_ν, τ_ν , которые доставляют системе положительные корни [6]. Решив систему, например относительно l^2 , получим

$$\frac{\tau_\nu^2 + (\sigma_\nu - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_\nu)}{l^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)}. \quad (1.23)$$

Но так как знаменатель больше нуля, то условие $l^2 > 0$ сводится к условию

$$\tau_v^2 > (\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_v). \quad (1.24)$$

Аналогично, вычисляя m^2 , получаем

$$\tau_v^2 < (\sigma_1 - \sigma_v)(\sigma_v - \sigma_3). \quad (1.25)$$

Вычисляя n^2 и проведя соответствующие преобразования, получаем

$$\tau_v^2 > (\sigma_1 - \sigma_v)(\sigma_v - \sigma_2). \quad (1.26)$$

Рассмотрим графическую интерпретацию неравенств (1.24)–(1.26) в осях $\sigma_v - \tau_v$.

Поскольку перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть среднее квадратичное отрезков диаметра, то тензор напряжений можно представить с помощью круговой диаграммы Мора (рис. 1.2).

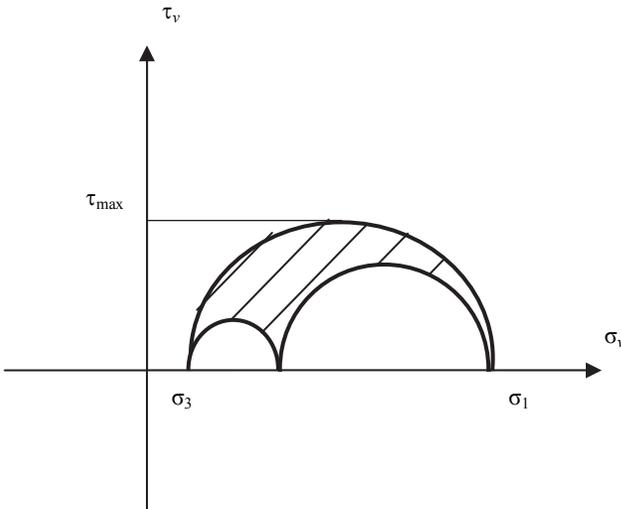


Рис. 1.2. Круговая диаграмма Мора

На диаграмме видно, что

$$\sigma_1 > \sigma_v > \sigma_3, \quad \tau_v < \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (1.27)$$

т. е. σ_1 – наибольшее из всех нормальных напряжений в точке, максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.28)$$

Таким образом, по величинам главных напряжений можно оценивать опасность разрушения (прочность) в точке нагруженного тела. Если, например, разрушение происходит от разрыва частиц по обе стороны плоскости сечения, то условием прочности в точке будет – $\sigma_1 \leq [\sigma]$, где $[\sigma]$ – допускаемое на разрыв напряжение [7]. Если разрушение происходит от сдвига частиц в плоскости сечения, то условие прочности в точке формулируется в следующем виде:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau], \quad (1.29)$$

где $[\tau]$ – допускаемое на сдвиг напряжение.

Элементы матрицы напряжений в разных точках тела в общем случае могут быть различными, т. е. должны быть функциями координат точки [8]. Их зависимость от координат описывается тремя уравнениями равновесия элементарного объема тела. Приведем их без вывода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

где g_x, g_y, g_z – проекции на координатные оси объёмных сил, отнесённых к единице объёма.

Напомним, что, приняв гипотезу сплошности, мы вынуждены механические характеристики и допускаемые напряжения определять опытным путем. При этом нужно обеспечить однородное по объёму напряженное состояние, иначе не удастся определить величину опасных напряжений.

1.3. Оценка прочности материала в точке тела

Рассмотрим сначала прочность при однократном приложении нагрузки – статическую прочность.

Уже отмечалось, что вывод о допустимых напряжениях можно сделать только на базе опытов при однородном напряженном состоянии. Ясно, что поставить такие опыты, да еще при всем бесконечном числе возможных соотношений главных напряжений по величине и знаку, невозможно. Наиболее простой и осуществимый опыт – испытание на растяжение (сжатие) специального образца из данного материала. При этом вдоль оси растяжения действуют $\sigma_z = \sigma_1$ – известное напряжение, равное растягивающей силе, деленной на площадь сечения образца, а по двум

другим осям главные напряжения равны нулю. При сжатии для большинства сталей разрушение происходит в плоскости под углом 45° к оси действия силы. Направляющие косинусы нормали к этой площадке

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = n = 0. \quad (1.31)$$

Таким образом, по (1.19), (1.21)

$$\sigma_v = 0,5\sigma_1, \quad \tau_v = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_1^2 - \frac{1}{4}\sigma_1^2} = \frac{1}{2}\sigma_1. \quad (1.32)$$

Но было показано, что

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} = \frac{\sigma_1}{2}, \quad (1.33)$$

т. е. разрушение происходит по площадке, где действуют максимальные касательные напряжения [9]. Гипотеза о том, что разрушение возникает из-за максимальных касательных напряжений, является наиболее широко применяемой в настоящее время, особенно для сталей, где металлографическими исследованиями установлено появление сдвигов после нагружения.

Определив из опыта на растяжение предельное значение напряжения σ_{lim} и выбрав коэффициент запаса прочности n , найдём допускаемое напряжение для данного материала $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n}$. Приняв гипотезу разрушения от максимальных касательных напряжений, приходим к условию прочности в виде

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \sigma_3. \quad (1.34)$$

Прочность детали обеспечивается, если в любой ее точке выполняется условие прочности (1.34).

Проверку этой гипотезы можно провести еще на одном реализуемом опыте при однородном напряженном состоянии – кручении тонкостенной трубки. Здесь в сечениях, перпендикулярных оси, действует только касательное напряжение τ , т. е. в плоскостях, перпендикулярных радиусу, нет напряжений [10]. В сечениях, проходящих через ось трубки, по закону парности касательных напряжений действует также касательные напряжения. Матрица напряжений для этого напряженного состояния имеет вид

$$|\sigma| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

откуда $I_1 = 0$, $I_2 = -\tau^2$, $I_3 = 0$, а характеристическое уравнение примет вид

$$\sigma^2 - \tau^2 \cdot \sigma = 0. \quad (1.36)$$

Следовательно, $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, $\tau_{\max} = \tau$.

Если разрушение будет происходить при $\tau = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{2}$, то гипотеза справедлива. Опыт показывает, что практически отклонения лежат в пределах точности определения σ_{lim} . В дальнейшем при статических расчетах ограничимся применением гипотезы максимальных касательных напряжений.

Существуют и другие гипотезы. Например, согласно гипотезе, по которой разрушение вызывают нормальные напряжения, получаем условие прочности

$$[\sigma] \geq \sigma_1. \quad (1.37)$$

А по гипотезе, согласно которой разрушение происходит при достижении предельного значения удельной потенциальной энергии изменения формы,

$$[\sigma] \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.38)$$

Прочность при действии переменных нагрузок будет рассмотрена позже.

Таким образом, расчет на прочность требует определения главных напряжений во всех точках тела [11]. А это в свою очередь требует определения зависимости элементов матрицы напряжений от координат точки, т. е. нахождения шести функций $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$.

1.4. Деформированное состояние в точке тела

Точки тела под действием внешней нагрузки перемещаются. Проекции перемещений точки на координатные оси обозначим: $u(x, z, y)$, $v(x, z, y)$, $w(x, z, y)$, имея в виду, что это функции координат начального (до нагружения) положения точки. Сами перемещения не отражают нагруженности тела, так, например, если переставить стул, то все точки переместятся, но напряжений в нем нет, так как тело не нагружено.

Нагружение приводит к изменению формы и размеров, что, конечно, отражается и на виде функций u , v , w .

Элементарный (простейший) объем в точке получим, соединив прямыми линиями четыре точки. Изменение этого объема можно характеризовать изменением шести или трех длин отрезков, выходящих из одной точки, и трех углов между ними. Остановимся на втором способе, выбрав в качестве отрезков отрезки, параллельные координатным осям, а в качестве углов – координатные углы.

Относительное изменение этих величин характеризует деформированное состояние в точке тела, а соответствующие функции координат – деформированное состояние тела.

Обозначим относительные изменения длин ε ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) и углов γ ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$). Покажем, что в любой точке тела можно вычислить деформации в любом направлении через деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в той же точке. Тем самым докажем, что эти шесть величин (а на самом деле девять, так как очевидно, что $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$) определяют деформированное состояние в точке, которое также есть симметричный тензор второго ранга [12].

Выберем вектор длиной $|\overline{dS}|$, направленный вдоль прямой $\bar{v}(l, m, n)$ и имеющий проекции на оси координат dx, dy, dz . После нагружения проекции этого же вектора станут $(dx + du), (dy + dv), (dz + dw)$, т. е. к нему прибавляется вектор $\Delta \overline{dS}(du, dv, dw)$ (рис. 1.3).

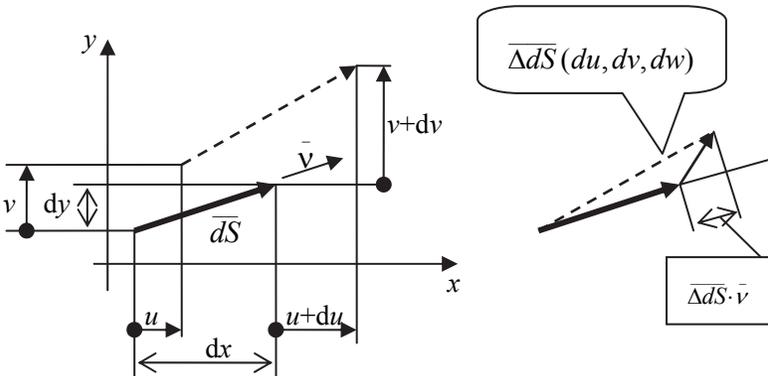


Рис. 1.3. Перемещение точек тела под действием нагрузки

Проекция этого вектора на исходное направление есть удлинение в этом направлении:

$$dw \cdot n + du \cdot l + dv \cdot m, \quad (1.39)$$

которое после деления на dS и есть относительное удлинение отрезка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{dS} \cdot \bar{v}}{dS} = \frac{du}{dS} \cdot l + \frac{dv}{dS} \cdot n + \frac{dw}{dS} \cdot m. \quad (1.40)$$

Расписав полные дифференциалы перемещений по осям через частные производные и dy, dx, dz , а также учитывая, что $\frac{dx}{dS} = l, \frac{dy}{dS} = m, \frac{dz}{dS} = n$.

После преобразований получаем

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot n^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot l \cdot m + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot m \cdot n + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot n \cdot l. \quad (1.41)$$

Если положение начального отрезка совпадает с осью X , то $m = n = 0, l = 1$, тогда

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.42)$$

Точно так же

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.43)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.44)$$

Выражения в скобках есть изменения координатных углов, т. е. угловые деформации. Действительно, отрезок dx поворачивается вокруг оси Z на угол

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon_x)} \approx \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.45)$$

А отрезок dy – на $\frac{\partial u}{\partial y}$, т. е. угол между ними уменьшается на величину

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.46)$$

При этом мы считаем линейные деформации достаточно малыми, т. е. строим теорию малых деформаций. Аналогично получаем

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1.47)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.48)$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cdot l^2 + \varepsilon_y \cdot m^2 + \varepsilon_z \cdot n^2 + \gamma_{xy} \cdot l^2 \cdot m^2 + \gamma_{yz} \cdot m^2 \cdot n^2 + \gamma_{zx} \cdot n^2 \cdot l^2, \quad (1.49)$$

что доказывает, что деформированное состояние в точке – тензор второго рода с симметричной матрицей. Полученные при этом формулы (1.42)–(1.48) есть формулы Коши, устанавливающие зависимость между перемещениями и деформациями в данной точке тела [13].

Ранее получена формула для определения нормальных напряжений в наклонной площадке σ_v :

$$\sigma_v = \bar{p}_v \cdot \bar{v}. \quad (1.50)$$

Если составляющие тензора деформаций выбрать так, как показано ниже:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

то квадратичные формы (1.50) и (1.51) полностью совпадут и, следовательно, тензор деформаций имеет те же свойства, что и тензор напряжений. В любой точке тела существуют главные оси деформированного состояния, в направлении которых линейные деформации достигают экстремальных значений, а угловые деформации отсутствуют, т. е. прямые углы между главными осями при деформировании тела не искажаются.

Из опыта на растяжение изотропного тела видно, что главные оси напряжений совпадают с главными осями деформаций.

Три уравнения равновесия (1.30) и шесть уравнений Коши пока не представляют полной математической модели, так как содержат пятнадцать неизвестных функций. Кроме того, среди полученных уравнений отсутствуют зависимости между составляющими напряжённого и деформированного состояния, которые, несомненно, для каждого материала связаны определенным образом [14]. Поскольку связь определяется физическими свойствами материала, соответствующие уравнения называют физическими.

1.5. Физические уравнения

Вследствие принятых допущений о сплошности и однородности материала уравнения, связывающие напряжения и деформации, могут быть получены только в опытах при однородном напряженном состоянии.

При испытании стержня на растяжение при малых деформациях имеют место следующие зависимости:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_1}{E},$$

где коэффициенты E и μ – упругие постоянные материала. Постоянная E называется модулем упругости или модулем Юнга, постоянная μ называется коэффициентом Пуассона.

Учитывая допущение о линейной упругости, можно применить принцип суперпозиции (наложения), из которого получаем формулы

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad (1.53)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_1)], \quad (1.54)$$

выражающие закон Гука в главных осях.

Преобразуем полученные экспериментально зависимости в главных осях для случая осей общего положения.

Перепишем первое уравнение в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [(1 + \mu) \cdot \sigma_1 - \mu \cdot I_1 \cdot (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)]. \quad (1.55)$$

Аналогично могут быть переписаны и другие уравнения. Вычислим σ_1 по общей формуле (1.10) и подставим в последнее выражение для ε_1 . После преобразований получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & \frac{1}{E} ((1 + \mu) \sigma_x - \mu J_1) l_1^2 + \frac{1}{E} ((1 + \mu) \sigma_y - \mu J_1) m_1^2 + \frac{1}{E} ((1 + \mu) \sigma_z - \mu J_1) n_1^2 + \\ & + \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy} l_1 m_1 + \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{yz} m_1 n_1 + \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{zx} n_1 l_1. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Поскольку главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают, то, сравнивая с общим выражением, получим шесть уравнений закона Гука в общих осях

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)), \quad (1.57)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)), \quad (1.58)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)), \quad (1.59)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (1.60)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (1.61)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (1.62)$$

где

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (1.63)$$

Эта величина является также упругой постоянной и называется модулем сдвига [15].

Модуль сдвига G так же, как модуль нормальной упругости E и коэффициент Пуассона μ , может быть получен опытным путем (из опыта на кручение). Поскольку точность его определения выше, чем точность определения μ , то обычно находят E , G , а μ вычисляют по формуле (1.63).

1.6. Полная математическая модель упругого деформируемого тела

Шесть уравнений закона Гука не доставляют новых неизвестных в математическую модель упругого деформированного тела, т. е. замыкают ее, доводя число уравнений до 15: (1.30), (1.42) – (1.48), (1.57) – (1.62).

Система содержит 9 дифференцированных уравнений, т. е. для ее решения необходимо сформулировать граничные условия. В нашем случае эти условия на поверхности тела – силовые, кинематические и смешанные.

Силовые условия – это равенство полных напряжений в площадках, совпадающих с поверхностью тела, поверхностным внешним силам:

$$\overline{p}_v = \overline{q}.$$

Считая элемент поверхности наклонной площадкой с нормалью $\vec{n}(l, m, n)$, получим

$$\begin{aligned} q_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{yz} n, \\ q_y &= \sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{yz} n, \\ q_z &= \sigma_z n + \tau_{zy} m + \tau_{zx} l. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Кинематические условия – это ограничение перемещений точек поверхности тела в местах их закрепления.

Смешанные условия содержат силы и перемещения.

Доказана теорема единственности, утверждающая, что если найдено решение, удовлетворяющее системе уравнений и граничным условиям, то оно единственно. Прямое решение задачи в квадратурах для тела любой формы и при любых нагрузках невозможно. Численные решения трудоемки и малопредставительны, поэтому разработаны основные приемы получения приближенных решений. Здесь встречаются два типа приближений [16].

Во-первых, можно подобрать форму тела и систему нагрузок, дающих точное решение, и распространить полученные результаты на реальные тела и нагрузки, исключая по принципу Сен-Венана особенности вблизи мест приложения нагрузок и изменений формы.

Во-вторых, можно внести ряд правдоподобных гипотез о напряженном и деформированном состоянии тела, позволяющих упростить модель и решить задачу в квадратурах. Мы будем использовать оба приема.

Многие точные решения получены обратным методом. Сущность метода состоит в том, что делаются упрощающие предположения о напряженном или деформированном состоянии, а затем на основе полной модели – вывод о форме тела и нагрузке, которые приводят к этому напряженному или деформированному состоянию. Примером такого решения является задача о гидростатическом давлении [17].

Предположим, что в каждой точке упругого тела матрица напряжений имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Объемные силы отсутствуют.

Тогда из уравнений равновесия получаем $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$, т. е. во всех точках упругого тела главные напряжения одинаковые. Круг Мора вырождается в точку, т. е. $\tau = 0$ во всех площадках и все площадки во всех