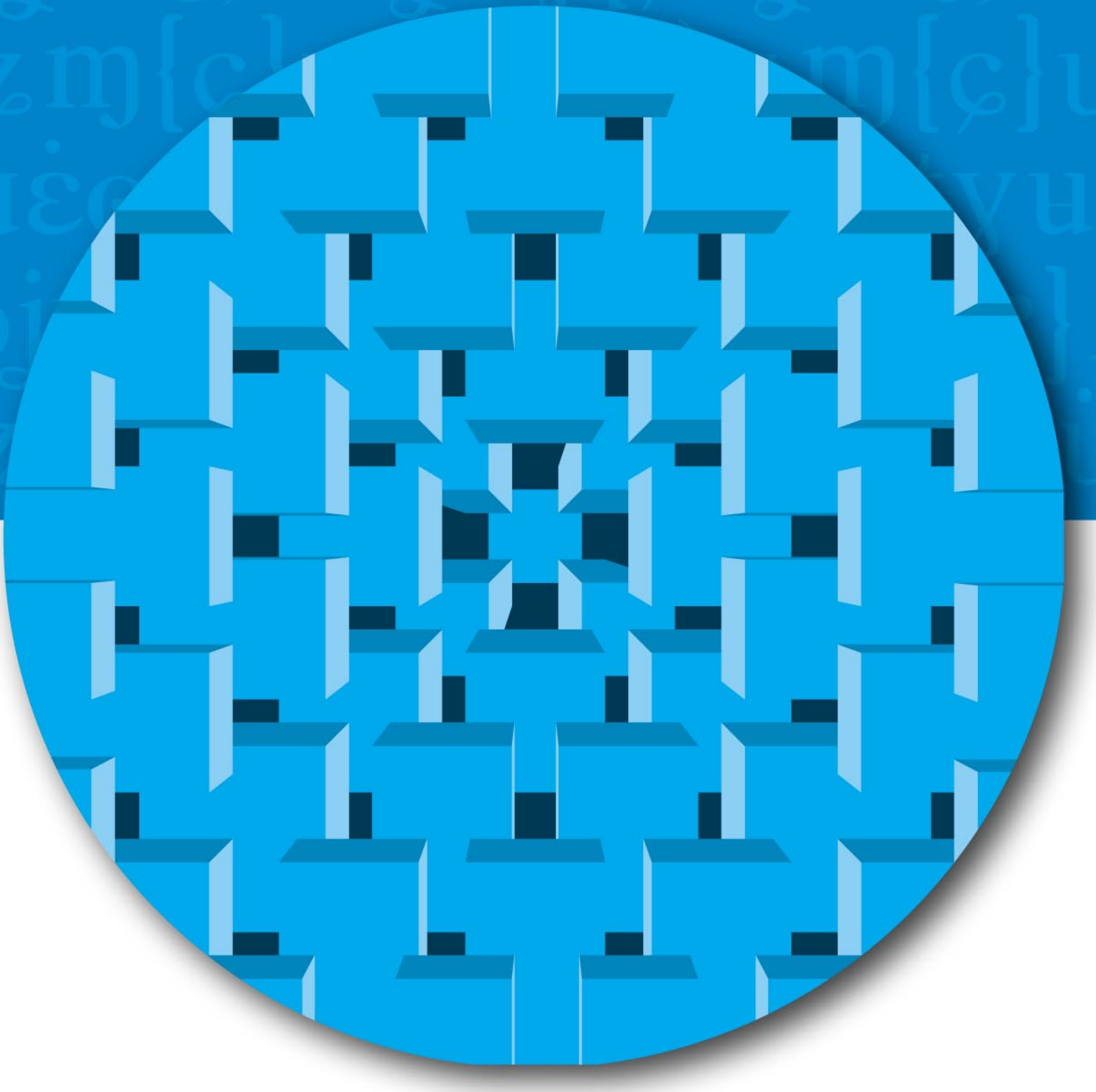
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY



А. М. Кытманов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

УДК 519.615+511.522
ББК 22.143+22.192.31
К978

Р е ц е н з е н т ы :
Н. Тарханов, доктор физико-математических наук, профессор (Университет Потсдама, Германия);
А. Садуллаев, доктор физико-математических наук, профессор (Национальный университет Узбекистана, Узбекистан)

Кытманов, А. М.
К978 Алгебраические и трансцендентные системы уравнений : монография / А. М. Кытманов ; науч. ред. Е. К. Лейнартас. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2019. – 356 с.
ISBN 978-5-7638-4158-9

Монография посвящена исследованию алгебраических и трансцендетных систем уравнений. Приведены утверждения об аналогах формул Ньютона для целых функций, о количестве нулей целой функции на комплексной плоскости, их расположении, о результанте двух целых функций. Рассмотрены алгебраические системы уравнений. Подробно изложены модифицированный метод исключения неизвестных, предложенный Л. А. Айзенбергом, и его отличие от классического метода и метода базисов Гребнера. Исследованы различные типы трансцендентных систем уравнений: вычетные интегралы, степенные суммы обратных величин корней и их связь с вычетными интегралами (аналоги формул Варинга), разные примеры трансцендентных систем уравнений.

Предназначена для специалистов по многомерному комплексному анализу, а также студентов и аспирантов.

Электронный вариант издания см.: **УДК 519.615+511.522**
http://catalog.sfu-kras.ru **ББК 22.143+22.192.31**

ISBN 978-5-7638-4158-9

Оглавление

Глава 1

Алгебраические и трансцендентные уравнения на комплексной плоскости

1.1. Логарифмический вычет

Сначала напомним некоторые факты из комплексного анализа. Все определения и утверждения этого параграфа можно найти в классических учебниках по теории функций одного комплексного переменного [56, 74, 107].

Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Элементы $z \in \mathbb{C}$ имеют вид $z = x + iy$, где x, y — вещественные числа ($x, y \in \mathbb{R}$), а i есть мнимая единица ($i^2 = -1$);

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}, \ \bar{z} = z - iy, \ \operatorname{Re} z = x, \ \operatorname{Im} z = y.$$

Можно также представить комплексные числа в *тригонометрической форме*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$. *Аргумент* комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. В силу формулы Эйлера комплексное число можно также представить в *экспоненциальной форме*: $z = re^{i\varphi}$.

Топология поля $\mathbb{C}$ дается метрикой $d(z, w) = |z - w|$. Как обычно, область $D \subset \mathbb{C}$ это открытое связное множество, а компакт $K \subset \mathbb{C}$ это замкнутое ограниченное множество. Обозначим через $\mathcal{C}(F)$ класс комплексно значных непрерывных функций, определенных на множестве F.

Напомним, что комплексно значная функция f голоморфна в области D, если для каждой точки $z_0 \in D$ существует степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

который сходится к f в некотором круге радиуса $r > 0$ с центром в точке z_0. Далее будем обозначать этот круг через $U_r(z_0)$. Например, любой полином

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

$(a_j \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \ldots, n)$ является голоморфной функцией на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а любая рациональная функция $R(z) = P(z)/Q(z)$ (P и Q — полиномы) голоморфна в $\mathbb{C}$ за исключением точек, в которых знаменатель Q равен нулю.

Функции $f(z) = |z|$ и $\varphi(z) = \bar{z}$ не являются голоморфными в любой области D.

Элементарные функции, определенные для вещественных значений, аргумента продолжаются до голоморфных функций (в некоторые области) с помощью их тейлоровских разложений. Например, функции

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Более того, эти ряды сходятся во всей плоскости $\mathbb{C}$.

Фундаментальную роль в теории функций играет теорема Коши. Пусть функция f голоморфна в ограниченой области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из конечного числа гладких кривых (каждая γ входит в ∂D с ориентацией такой, что при обходе вдоль этой кривой γ область D остается слева). Если

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где u, v есть вещественно значные функции $(z = x + iy)$, то

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(udy + vdx).$$

Поэтому мы можем определить

$$\int_\gamma f(z)dz$$

(γ есть кривая с заданной ориентацией) как

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$$

(криволинейный интеграл второго рода).

Теорема 1.1.1 (Коши)**.** *При сделанных предположениях интеграл*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Теорема Коши есть в действительности следствие того факта, что голоморфная функция f удовлетворяет *уравнениям Коши–Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (f = u + iv).$$

Если мы определим *формальные производные* функции f следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}i\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

тогда уравнения Коши–Римана могут быть записаны более выразительно:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0.$$

Пусть функция f голоморфна в круге $U_R(a)$ с центром в точке a, исключая (быть может) саму точку a, и пусть γ_r — граница $U_r(a)$, где $0 < r < R$, $\gamma_r \subset U_R(a)$. Ориентация γ_r задана обходом против часовой стрелки.

Локальный вычет

$$\operatorname*{res}_a f$$

функции f в точке a определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Теорема Коши показывает, что $\operatorname*{res}_a f$ не зависит от радиуса r.

Пример 1.1.1. Найдем

$$\operatorname*{res}_a (z-a)^n,$$

где n — целое число ($n \in \mathbb{Z}$). Рассмотрим следующую параметризацию $\gamma_r : z = a + re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда $(z-a)^n = r^n e^{in\varphi}$, а $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$ на γ_r (мы использовали экспоненциальную форму комплексного числа z). Тогда

$$\int_{\gamma_r} (z-a)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= ir^{(n+1)} \int_0^{2\pi} (\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi) d\varphi = 0,$$

если $n + 1 \neq 0$. При $n = -1$ получаем

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Поэтому $\operatorname*{res}_a (z-a)^n = 0$, если $n \neq -1$, и $\operatorname*{res}_a (z-a)^{-1} = 1$.

Появление множителя $1/(2\pi i)$ в определении вычета связано с тем фактом, что

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Рассмотрим для $f(z)$ разложение в *ряд Лорана:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

сходящийся в $U_r(a)$, кроме самой точки a. Используя пример 1.1.1, получам

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\gamma_r}(z-a)^n dz = c_{-1}.$$

Отсюда вычет

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1},$$

т.е. вычет функции равен коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана с центром в точке a функции f. Это свойство является основным при вычислении вычета.

Логарифмический вычет есть специальный случай вычета. Он тесно связан с числом нулей функции. Пусть f — голоморфная функция в круге $U_R(a)$, и пусть a — корень уравнения $f(z) = 0$ (т. е. пусть a — нуль функции f). Если $f(z) = (z-a)^n\varphi(z)$, где φ голоморфна в $U_R(a)$, и $\varphi(a) \neq 0$, тогда число n называется *кратностью* нуля a функции f. Если $n = 1$, тогда ноль a называется *простым* (он характеризуется условием, что $f'(a) \neq 0$). Пусть функция h голоморфна в $U_R(a)$. *Логарифмический вычет* функции h в точке a определяется интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{hdf}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{hf'dz}{f} = \operatorname*{res}_a \frac{hf'}{f},$$

где, как и раньше, γ_r — окружность радиуса r с центром в точке a, лежащая в $U_R(a)$. Название "логарифмический" отражает тот факт, что отношение $\dfrac{f'}{f}$ есть логарифмическая производная $(\ln f)'$ функции f.

Если a — нуль кратности n функции f, тогда $f(z) = (z-a)^n\varphi(z)$ and $\varphi(a) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n\varphi'(z)}{(z-a)^n\varphi(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

$$\operatorname*{res}_a \frac{hf'}{f} = \frac{n}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{h(z)dz}{(z-a)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{h(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)}.$$

Поскольку $\varphi(a) \neq 0$, то можно считать, что $\varphi \neq 0$ in $U_R(a)$. Поэтому функция $h\varphi'/\varphi$ голоморфна в $U_R(a)$, так что по теореме Коши

$$\int_{\gamma_r} \frac{h\varphi'}{\varphi} dz = 0.$$

Разлагая h в ряд Тейлора в $U_R(a)$, получаем

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (c_0 = h(a)).$$

Следовательно,

$$\frac{h(z)}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} = \frac{h(a)}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n$$

поэтому (см. пример 1.1.1.)

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)dz}{z-a} = h(a)2\pi i.$$

Так что получаем

$$\operatorname*{res}_a \frac{hf'}{f} = nh(a).$$

В частности,

$$\operatorname*{res}_a \frac{f'}{f} = n,$$

если $h \equiv 1$.

Отсюда, используя теорему Коши, получаем теорему о логарифмическом вычете. Пусть D — область, ограниченная конечным числом гладких кривых (ориентированных таким же образом, как и в теореме Коши). Пусть функция h голоморфна в D и непрерывна на $\overline{D}$, а функция f голоморфна в окрестности $\overline{D}$. Далее предположим, что $f \neq 0$ на ∂D. Тогда f имеет конечное число нулей в D. Обозначим это множество через E_f. Если a — нуль кратности n, тогда предполагается, что n копий a содержатся в E_f.

Теорема 1.1.2 (о логарифмическом вычете)**.** *Таким образом, при сделанных предположениях справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} h\frac{df}{f} = \sum_{a\in E_f} \operatorname*{res}_a \frac{hf'}{f} = \sum_{a\in E_f} h(a). \qquad (1.1.1.)$$

Следствие 1.1.1. *Если N есть число нулей f в области D (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность), то*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{df}{f}. \qquad (1.1.2.)$$

В качестве приложения этого следствия не трудно получить теорему Руше.

Пусть область D такая же, как в теореме Коши.

Теорема 1.1.3 (Руше)**.** *Если f и g голоморфны в окрестности замыкания $\overline{D}$ и для всех $z\in\partial D$ справедливо неравенство*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

тогда функции f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей в D.

Доказательство. Рассмотрим функции $f+tg$, где $t\in[0,1]$. Из условия теоремы получаем

$$|f+tg| \geqslant |f| - t|g| > 0$$

на ∂D. Следовательно, функции $f+tg\neq 0$ на ∂D, и поэтому они имеют конечное число нулей в D. По следствию 1.1.1 интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{d(f+tg)}{f+tg}$$

есть целое число. Но этот интеграл является непрерывной функцией по $t\in[0,1]$, поэтому

$$\int_{\partial D} \frac{d(f+tg)}{f+tg} \equiv \mathrm{const},$$

$$\int_{\partial D} \frac{df}{f} = \int_{\partial D} \frac{d(f+g)}{f+g}.$$

$\square$

Пример 1.1.2. Из теоремы Руше легко получается основная теорема алгебры многочленов: каждый полином $P(z)$ степени n имеет с учетом их кратностей точно n комплексных корней.

Действительно, пусть

$$P(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n, \quad f(z) = a_0 z^n,$$

а

$$g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тогда $P(z) = f(z) + g(z)$. По лемме о модуле старшего члена имеем $|f(z)| > |g(z)|$, если $|z| \geqslant R$ (здесь R — достаточно большое положительное число).

Так как неравенсто $|f(z)| > |g(z)|$ выполняется на γ_R, то по теореме Руше полиномы f и P имеют одинаковое число корней в круге $U_R(0)$. Но полином $f(z) = a_0 z^n$ имеет точно n корней (с учетом кратности) в $U_R(0)$. (Точка $z = 0$ — корень порядка n уравнения $f(z) = 0$).

1.2. Рекуррентные формулы Ньютона

1.2.1. Рекуррентные формулы Ньютона для полиномов

Рекуррентные формулы Ньютона связывают между собой коэффициенты полинома и степенные суммы его корней. Эти формулы можно найти, например, в [29, 64]. Доказательство, приведенное здесь, основано на интегральной теореме Коши 1.1.1 и теореме о логарифмическом вычете 1.1.2. Рассмотрим также обобщение этих формул Ньютона на более широкий класс функций.

Пусть полином $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n.$$

Обозначим через $z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n$ его корни (с учетом кратности, поэтому некоторые из них могут повторяться). Степенная сумма S_k определяется так

$$S_k = z_1^k + \cdots + z_n^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

а $S_0 = n$.

Теорема 1.2.1 (рекуррентные формулы Ньютона). *Степенные суммы S_k и коэффициенты b_j связаны соотношениями:*

$$\begin{gathered} S_j + S_{j-1}b_1 + S_{j-2}b_2 + \ldots + S_1 b_{j-1} + j b_j = 0, \quad \textit{если} \ \ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ \textit{и} \qquad S_j + S_{j-1}b_1 + \ldots + S_{j-n}b_n = 0, \quad \textit{если } j > n. \end{gathered} \tag{1.2.1.}$$

Доказательство. Выберем число $R > 0$ так, чтобы все корни z_k полинома $P(z)$ лежали в круге $U_R(0)$, и рассмотрим интеграл

$$J = \int_{\gamma_R} \frac{P'(z)dz}{z^j}.$$

С одной стороны,

$$J = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_R} \frac{b_{n-k} k z^{k-1} dz}{z^j} = \sum_{k=1}^{n} k b_{n-k} \int_{\gamma_R} z^{k-j-1} dz.$$

Следовательно, если $j > n$ или $j \leqslant 0$, то $J = 0$, а если $1 \leqslant j \leqslant n$, то $J = 2\pi i b_{n-j}$ (см. пример 1.1.1). С другой стороны,

$$J = \int_{\gamma_R} \frac{P dP}{z^j P} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \int_{\gamma_R} z^{k-j} \frac{dP}{P}.$$

Если $k - j > 0$, то по теореме 1.1.2 о логарифмическом вычете

$$\int_{\gamma_R} z^{k-j} \frac{dP}{P} = 2\pi i S_{k-j}.$$

Если $k - j = 0$, тогда

$$\int_{\gamma_R} \frac{dP}{P} = (2\pi i)n.$$

В случае $k - j < 0$ сделаем замену переменных $z = 1/w$ в интеграле

$$\int_{\gamma_R} z^{k-j} \frac{dP}{P}.$$

Окружность γ_R перейдет в окружность $\gamma_{1/R}$ с противоположной ориентацией, поэтому

$$P(z) \longrightarrow P(1/w) = \frac{1}{w^n} \left(\sum_{j=0}^{n} b_{n-j} w^{n-j} \right) \quad (b_0 = 1),$$

$$P'(z) \longrightarrow P'\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^{n-1}}\left(\sum_{j=0}^{n} jb_{n-j}w^{n-j}\right),$$

$$dz \to -\frac{1}{w^2}dw.$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma_R} z^{k-j}\frac{dP}{P} = \int_{\gamma_{1/R}} \frac{w^{j-k-1}\sum\limits_{j=1}^{n} jb_{n-j}w^{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{n} b_{n-j}w^{n-j}}dw.$$

Так как все корни полинома $P(z)$ лежат в круге $U_R(0)$, то корни полинома

$$w^n P\left(\frac{1}{w}\right)$$

лежат вне круга $U_{1/R}(0)$. Поскольку $j-k-1 \geqslant 0$, то подынтегральная функция в последнем интеграле голоморфна в $U_{1/R}(0)$, так что по теореме Коши этот интеграл равен нулю. Отсюда получим (при $1 \leqslant j \leqslant n$):

$$jb_{n-j} = nb_{n-j} + \sum_{k=j+1}^{n} b_{n-k}S_{k-j},$$

т.е.

$$(n-j)b_{n-j} + b_{n-j-1}S_1 + b_{n-j-2}S_2 + \ldots + b_1 S_{n-j-1} + S_{n-j} = 0$$

(напомним, что $b_0 = 1$). Если $j \leqslant 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}S_{k-j} = 0,$$

т.е.

$$b_n S_{-j} + b_{n-1}S_{1-j} + \ldots + b_1 S_{n-1-j} + S_{n-j} = 0.$$

$\square$

Формулы (1.2.1.) позволяют найти степенные суммы корней с помощью коэффициентов полинома P. И обратно, они позволяют найти коэффициенты полинома $P(z)$ с помощью степенных сумм S_k.

Пример 1.2.1. Пусть $P(z) = z^2 + b_1 z + b_2$, а его степенные суммы S_1 и S_2 заданы. Тогда из (1.2.1.) получаем $S_1 + b_1 = 0$ для $j = 1$, т.е. $b_1 = -S_1$, а $S_2 + S_1 b_1 + 2b_2 = 0$ для $j = 2$, поэтому

$$2b_2 = -S_2 - S_1 b_1 = -S_2 + S_1^2, \quad b_2 = (-S_2 + S_1^2)/2.$$

Эти формулы показывают, для каждого множества чисел $S_1, \ldots, S_n$ существует полином P с данными степенными суммами $S_1, \ldots, S_n$.

Следующие формулы Варинга также часто используются [98].

Теорема 1.2.2 (формулы Варинга)**.** *Справедливы соотношения*

$$S_k = (-1)^k \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2b_2 & b_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3b_3 & b_2 & b_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ kb_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \tag{1.2.2.}$$

$$b_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \ldots & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \ldots & S_1 \end{vmatrix} \tag{1.2.3.}$$

для $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Умножим второй столбец в определителе (1.2.3.) на b_1, третий — на b_2 и т.д., затем их прибавим к первому столбцу. По формулам Ньютона (1.2.1.) получим определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & S_1 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & S_2 & S_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -kb_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \ldots & S_1 \end{vmatrix} = (-1)^k k! b_k.$$

Для получения (1.2.2.) нужно умножить второй столбец в (1.2.2) на S_1, третий — на S_2 и т.д., а затем сложить их с первым столбцом.

Используя формулы (1.2.1.), находим, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -S_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix} = (-1)^k S_k.$$

1.2.2. Рекуррентные формулы Ньютона для целых функций

В дальнейшем нам будут нужны рекуррентные формулы Ньютона для более широкого класса функций, чем полиномы, и мы будем иметь дело с соответствующими степенными суммами S_k с $k < 0$.

Доказательство этих формул может быть получено так же, как для формулы (1.2.1.). Но мы приведем другой подход.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в окрестности $U_R(0)$ и $f(z) \neq 0$ в $U_R(0)$. Тогда можем рассмотреть функцию $g(z) = \ln f(z)$, выбрав главное значение логарифма (т.е. $\ln 1 = 0$). Функция $g(z)$ (можно считать) также голоморфна $U_R(0)$. Предположим, что разложение Тейлора функций f и g имеет вид

$$f(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k + \ldots,$$

$$g(z) = \ln f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \ldots,$$

$$b_0 \neq 0 \quad \text{и} \quad \ln b_0 = a_0.$$

Лемма 1.2.1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\sum_{j=0}^{k-1} (k-j) b_j a_{k-j} = k b_k, \quad k \geqslant 1. \tag{1.2.4.}$$

Более того,

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k b_0^k} \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ 3b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}, \tag{1.2.5.}$$

$$b_k = \frac{b_0}{k!} \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_k & (k-1)a_{k-1} & (k-2)a_{k-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}. \qquad (1.2.6.)$$

Доказательство. Так как

$$f(z) = e^{g(z)} = b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k + \ldots,$$

то

$$f(z)g'(z) = b_1 + 2b_2 z + \ldots + kb_k z^{k-1} + \ldots.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \sum_{s=1}^{\infty} s a_s w^{s-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k z^{k-1}.$$

Умножая ряды и приравнивая коэффициенты при равных степенях по z имеем (1.2.4.). Для получения формул (1.2.5.) и (1.2.6.), аналогов формул Варинга, нужно использовать вместо (1.2.1.) формулы (1.2.4.). □

Функция $f(z)$ называется *целой*, если она голоморфная во всей комплексной плоскости. Целая функция называется *трансцендентной*, если последовательность ее коэффициентов Тейлора содержит бесконечное число ненулевых элементов, т.е. она не является полиномом.

Предположим, что функция $f(z)$ есть целая функция вида

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_j}\right)$$

с константами $c_j \neq 0,\ j = 1, 2, \ldots$, и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|c_j|}$$

сходится. (Сходимость данного ряда гарантирует сходимость бесконечного произведения.) Условие на сходимость этого ряда влечет, что функция f является целой функцией первого порядка роста минимального типа (см. 1.4). Обозначим через σ_k степенные суммы вида

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_j^k}, \quad k \geqslant 1.$$

Эти ряды также сходятся, и мы получим

$$\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z - c_j}.$$

Отсюда следует, что

$$k! a_k = \frac{d^k \ln f}{dz^k}(0) = -(k-1)! \sigma_k,$$

т.е. $k a_k = -\sigma_k$, и (используя лемму 1.2.1) приходим к следующему утверждению ([18, §2]).

Теорема 1.2.3 (формулы Ньютона для целых функций)**.** *Справедливы равенства*

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_j \sigma_{k-j} + k b_k = 0, \quad k \geqslant 1. \tag{1.2.7.}$$

Более того,

$$\sigma_k = \frac{(-1)^k}{b_0^k} \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ 3b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix},$$

$$b_k = \frac{(-1)^k}{k!} b_0 \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

В частности, эти формулы справедливы для полиномов. Если f — это полином, то формула (1.2.7.) есть в действительности (1.2.1.), но в (1.2.7.) $\sigma_k = S_{-k}$ и порядки коэффициентов f в (1.2.1.) и в (1.2.7.) противоположны.

Пример 1.2.2. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{\pi^2 k^2}\Big).$$

Тогда

$$b_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!},$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{\pi^{2k}} \zeta(2k),$$

где $\zeta(w)$ — дзета функция Римана.

Формулы (1.2.7.) дают соотношения между b_k и $\zeta(2k)$. В частности, они позволяют вычислить $\zeta(2k)$. Принимая во внимания, что $\zeta(2k)$ также связаны с числами Бернулли

$$B_k = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = \frac{(2k)!}{2^{2k-1}} \sigma_k,$$

приходим к формуле

$$B_k = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k-1}} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{5!} & -\frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{k(-1)^k}{(2k+1)!} & \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} & \dots & \dots & -\frac{1}{3!} \end{vmatrix}.$$

Тем самым мы приходим к классическим соотношениям.

1.3. Локализация вещественных корней полиномов

Опишем нахождение числа вещественных корней полиномов на интервале: методом Эрмита, Штурма, по правилу знаков Декарта, теореме Бюдана–Фурье.

Эти методы можно найти в [24, 29], а их дальнейшее развитие, например, в [28, 85].

Сначала рассмотрим метод Эрмита или метод квадратичных форм для определения различных вещественных корней полинома P с вещественными коэффициентами. Начнем с некоторых понятий в теории квадратичных форм.

Пусть

$$S_n(x, x) = \sum_{j,k=1}^{n} s_{jk} x_j x_k$$

есть *квадратичная форма*. Ее матрица

$$S_n = ||s_{jk}||_{j,k=1}^{n}$$

является симметрической (т.е. $s_{jk} = s_{kj}$ для всех k, j), и члены матрицы s_{jk} вещественные. *Ранг* r квадратичной формы $S_n(x)$ равен рангу матрицы S_n. Квадратичная форма $S_n(x, x)$ может быть представлена в виде суммы квадратов разными способами. Рассмотрим представление для $S_n(x, x)$ вида

$$S_n(x, x) = \sum_{j=1}^{r} a_j y_j^2, \quad \text{где } a_j \in \mathbb{R}, \quad \text{а } y_j = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} x_k,$$

где линейные формы $y_1, \dots, y_r$ линейно незавимы. Обозначим μ — число положительных коэффициентов a_j, а ν — число отрицательных коэффициентов a_j. Тогда *принцип инерции* для квадратичных форм утверждает, что μ и ν не зависят от представления $S_n(x, x)$ в виде суммы независимых квадратов. Более того $\mu + \nu = r$, а число $\mu - \nu$ называется *сигнатурой* квадратичной формы $S_n(x, x)$.

Обозначим через

$$D_k = \det ||s_{js}||_{j,s=1}^{k}, \quad k = 1, \dots r,$$

— главные миноры матрицы S_n.

Теорема 1.3.1 (Якоби). *Пусть $S_n(x, x)$ — квадратичная форма с ненулевыми минорами D_k, $k = 1, \dots, r$. Тогда число μ положительных квадратов и число ν отрицательных квадратов $S_n(x, x)$ совпадает, соответственно, с числом P постоянств знака и числом V перемен знака в ряду чисел $1, D_1, \dots, D_r$. Более того, сигнатура формы равна $\sigma = r - 2V$.*

Теорема Якоби может быть обобщена на случай, когда некоторые из определителей D_k обращаются в 0 [24, гл. 10].

Если $b_1, \ldots, b_k$ ненулевые вещественные числа, тогда число постоянств знака в этой последовательности будем обозначать $P(b_1, \ldots, b_k)$, а число перемен знака — через $V(b_1, \ldots, b_k)$. Ясно, что $P + V = k - 1$. Теорема Якоби утверждает, что сигнатура формы равна $\sigma = r - 2V(1, D_1, \ldots, D_r)$.

Предположим, что

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

— полином с вещественными коэффициентами. Если надо определить число (различных) вещественных корней полинома P, то можно (для этого) разделить полином P на наибольший общий делитель P и его производной P' (используя алгоритм Евклида) для устранения кратных корней, но в данном случае мы делать этого не будем. Предположим, что полином $P(z)$ имеет различные корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ кратностей $n_1, \ldots, n_q$ соответственно. Поэтому $P(z)$ имеет разложение

$$P(z) = a_0 (z - \alpha_1)^{n_1} \ldots (z - \alpha_q)^{n_q}, \quad n_1 + \ldots + n_q = n,$$

а степенные суммы

$$s_k = \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^k.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$S_m(x) = \sum_{j,k=0}^{m-1} s_{j+k} x_j x_k,$$

где m есть число такое, что $m \geqslant q$ (например, $m = n$).

Теорема 1.3.2 (Эрмит)**.** *Число различных корней полинова $P(z)$ равно рангу формы $S_m(x)$, а число различных вещественных корней равно сигнатуре формы $S_m(x)$.*

Доказательство. Из определения степенных сумм s_k и формы S_m получим

$$S_m(x,x) = \sum_{j,k=0}^{m-1} \sum_{p=1}^{q} n_p \alpha_p^{j+k} x_j x_k =$$

$$= \sum_{p=1}^{q} n_p (x_0 + \alpha_p x_1 + \alpha_p^2 x_2 + \ldots + \alpha_p^{m-1} x_{m-1})^2 = \sum_{p=1}^{q} n_p y_p^2, \qquad (1.3.1.)$$

где $y_p = x_0 + \alpha_p x_1 + \alpha_p^2 x_2 + \ldots + \alpha_p^{m-1} x_{m-1}$. Эти линейные формы $y_1, \ldots, y_q$ линейно независимы, поскольку определитель, составленный из их коэффициентов, есть определитель Вандермонда, поэтому он не равен нулю (здесь мы используем тот факт, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ различные). Следовательно, ранг $S_m(x,x) = q$. Но, в общем, коэффициенты в y_p могут быть комплексные, и тогда представление $S_m(x,x)$ в виде суммы квадратом нуждается в объяснении.

В представлении (1.3.1.) положительному квадрату $n_p y_p^2$ соответствует вещественный корень α_p. Комплексные корни входят парами α_p и $\bar{\alpha}_p$, и, следовательно, можем написать $y_p = u_p + i v_p$, где u_p и v_p вещественные. Отсюда получим

$$y_p^2 = u_p^2 - v_p^2 + 2i u_p v_p.$$

Для сопряженного корня $\bar{\alpha}_p$ имеем

$$\bar{y}_p = u_p - i v_p, \quad \bar{y}_p^2 = u_p^2 - v_p^2 - 2i u_p v_p,$$

и, следовательно, $n_p y_p^2 + n_p \bar{y}_p^2 = 2 n_p u_p^2 - 2 n_p v_p^2$.

Это показывает, что каждой паре сопряженных корней соответствует один положительный и один отрицательный квадрат. Новые линейные вещественные формы в представлении (1.3.1.) будут также линейно независимыми. □

Используя теорему Якоби 1.3.1, получаем предложение 1.3.1.

Следствие 1.3.1. *Пусть* $D_0 = 1,\ D_1 = s_0 = n,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} n & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \ldots, \quad D_r = \begin{vmatrix} n & s_1 & \ldots & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-1} & s_r & \ldots & s_{2r-2} \end{vmatrix}.$$

Если $D_j \neq 0,\ j = 0, \ldots, r$, тогда число различных вещественных корней полинома $P(z)$ равно

$$r - 2V(D_0, D_1, \ldots, D_r).$$

В частности, справедливо

Следствие 1.3.2. *Полином $P(z)$ имеет только вещественные корни, тогда и только тогда, когда все определители $D_j > 0$, $0 \leqslant j \leqslant r$.*

Найдем условие того, что полином $P(z)$ имеет только чисто мнимые корни. На языке инноров, его можно найти в [85, §2.4].

Пусть корни P — чисто мнимые $\pm i\gamma_j$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$, тогда полином $P(z)$ будет содержать только четные степени z. Действительно, в разложении P на множители произведение

$$(z - i\gamma_j)(z + i\gamma_j) = z^2 + \gamma_j^2.$$

Так что данное произведение зависит от z^2. Поэтому полином $P(z)$ примет вид:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k = \sum_{k=0}^{n} c_{2k} z^{2k}, \qquad (1.3.2.)$$

т.е. коэффициенты с нечетными номерами равны 0. Рассмотрим полином

$$Q(w) = \sum_{k=0}^{n} c_{2k} w^k.$$

Его корнями являются числа $-\gamma_n^2$ и только они. Поэтому $Q(w)$ имеет только вещественные нули. Степенными суммами его корней с номером k служат степенные суммы полинома $P(z)$ с номером $2k$. Отсюда и из следствия 1.3.2 получаем утверждение

Следствие 1.3.3. *Для того, чтобы полином $P(z)$ имел чисто мнимые корни необходимо и достаточно, чтобы он разлагался только по четным степеням, т.е. имел вид (1.3.2.) с положительными коэффициентами c_{2k} и все определители*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} n & s_2 & \ldots & s_{2(r-1)} \\ s_2 & s_4 & \ldots & s_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{2(r-1)} & s_{2r} & \ldots & s_{4r-4} \end{vmatrix} > 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant r.$$

Пример 1.3.1. Пусть $P(x) = x^2 + px + q, \ n = 2$. Тогда получаем квадратичную форму

$$S_2(x, x) = \sum_{j,k=0}^{1} s_{j+k} x_j x_k.$$

Сначала найдем s_0, s_1, s_2. По формулам (1.2.1.) имеем $s_0 = 2, \ s_1 + p = 0, \ s_1 = -p, \ s_2 + S_1 p + 2q = 0, \ s_2 = p^2 - 2q$. Тогда получаем матрицу

$$\mathbf{A} = ||s_{j+k}||_{j,k=0}^{1} = \left\| \begin{array}{cc} 2 & -p \\ -p & p^2 - 2q \end{array} \right\|$$

с минорами

$$D_0 = 1, \ D_1 = 2, \ D_2 = p^2 - 4q,$$

и, следовательно,

$$\begin{array}{ll} V(1, 2, p^2 - 4q) = 0, & \text{если } p^2 - 4q > 0 \\ V(1, 2, p^2 - 4q) = 1, & \text{если } p^2 - 4q < 0 \end{array}$$

Приходим к хорошо известному выводу: если $p^2 - 4q > 0$, то $P(x)$ имеет два различных вещественных корня, если $p^2 - 4q < 0$, то $P(x)$ не имеет вещественных корней.

Квадратичная форма $S_m(x, x)$ является *ганкелевой* формой, и, следовательно, теорема Якоби может быть обобщена на случай, когда некоторые главные миноры равняются нулю. Следствие 1.3.1 также может быть обобщено [24, гл. 10, § 10; гл. 16, § 10].

Метод Эрмита может быть применен к другим проблемам, связанным с локализацией корней [28].

Вернемся к вопросу об определении числа вещественных корней вещественного полинома P на интервале (a, b). Это число может быть вычислено с помощью теоремы о логарифмическом вычете 1.1.2. Действительно, если γ есть кривая, обходящая сегмент $[a, b]$ и не содержащая комплексных корней полинома P, тогда по формуле (1.1.2) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dP}{P} = N, \qquad (1.3.3.)$$