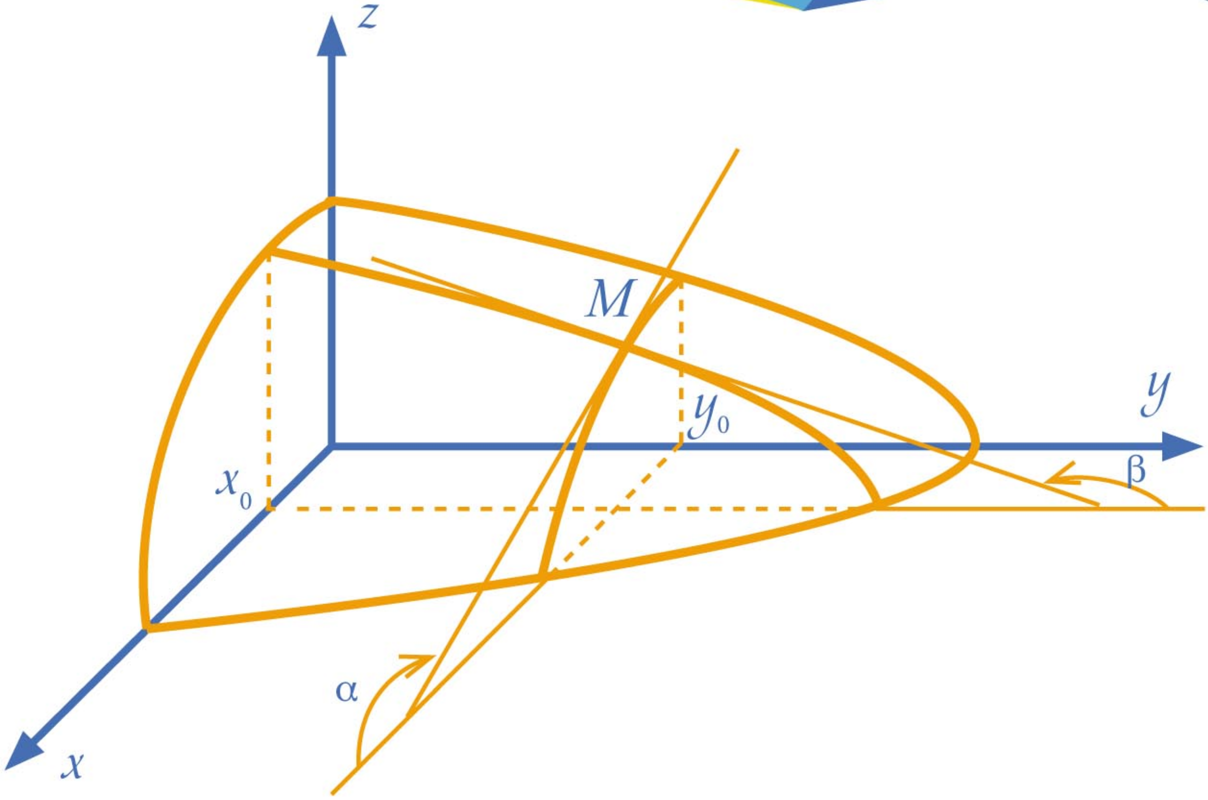
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

И. А. Кузоватов, Н. В. Кузоватова, А. Н. Полковников

МАТЕМАТИКА

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное пособие



**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ**

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.114я73
К892

Р е ц е н з е н т ы :

А. А. Кытманов, доктор физико-математических наук, директор Института космических и информационных технологий СФУ;

Л. В. Кнауб, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой МОДУС Института математики и фундаментальной информатики СФУ

Кузоватов, И. А.

К892 Математика. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных : учеб. пособие / И. А. Кузоватов, Н. В. Кузоватова, А. Н. Полковников. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – 78 с.

ISBN 978-5-7638-4427-6

Приведены теоретические сведения, приемы и методы решения типовых задач раздела математического анализа «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».

Предназначено для студентов направлений подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 38.05.01 «Экономическая безопасность».

Электронный вариант издания см.: **УДК 517.2(07)**
http://catalog.sfu-kras.ru **ББК 22.161.114я73**

ISBN 978-5-7638-4427-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1.1. Основные понятия функций нескольких переменных

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Площадь S прямоугольника, длины сторон которого равны a и b, выражается формулой $S=ab$. Числовое значение S определяется произведением величин a и b. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны a, b и c, выражается формулой $V=abc$, соответственно значение V определяется совокупностью значений a, b и c. Такие же рассуждения справедливы и для других математических и физических величин, вычисляемых при помощи формул.

Вторым примером, приводящим нас к понятию функции нескольких переменных, является существование физических параметров, присущих физическому объекту любой размерности. Примерами таких параметров могут служить: температура T, давление P, плотность ρ и так далее. В таком случае говорят, что речь идет о функции точки M, принадлежащей некоторому физическому телу, $T=f(M)$, $P=f(M)$ и так далее.

Математической реализацией подобных зависимостей является понятие функции нескольких переменных.

Прежде чем перейти к рассмотрению определений и иллюстрирующих примеров для основных понятий функций нескольких переменных, напомним специальные математические символы, которые будем использовать для сокращения записей:

$\forall$ – означает "для любого", "для всякого" (квантор всеобщности);

$\exists$ – означает "существует", "найдется" (квантор существования);

: – означает "имеет место", "такое что", "выполняется";

$\in$ – символ принадлежности элемента множеству;

$\subset$ – означает, что подмножество содержится во множестве.

Например, краткая запись при помощи кванторов – $\forall x \in A : B$, означает: "для всякого элемента x, принадлежащего множеству A выполняется утверждение B".

Напомним также обозначения основных числовых множеств:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\mathbb{R}^2$ –множество упорядоченных пар действительных чисел;

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Аналогично вводятся $\mathbb{R}^3$ – пространство упорядоченных троек действительных чисел и $\mathbb{R}^n$ – пространство произвольной размерности n.

Определение функции нескольких переменных рассмотрим с наиболее наглядного случая двух независимых переменных.

Определение 1.1. Пусть задано некоторое множество $D \in \mathbb{R}^2$ точек $P(x, y)$. Соответствие f, которое каждой паре $(x, y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных*** x и y, определенной на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$ со значениями на множестве действительных чисел. Записывается данное соответствие в виде

$$z = f(x, y),$$

при этом x и y называются ***независимыми переменными*** (аргументами), z – ***функцией*** (зависимой переменной). Также для записи функции двух переменных можно использовать обозначения: $z=f(P)$, $z=f(P(x,y))$.

Функция $z=f(x,y)$ может быть задана аналитически (формулой) или каким-либо иным способом: например, в виде таблицы, какой-либо словесной формулировки, графически и т. д.

Определение 1.2. Множество пар (x,y), для которых существует значение функции $z=f(x,y)$, называется ***областью определения*** данной функции, обозначается данное множество $D(f)$ или $D(z)$.

П р и м е р 1.1. Найти область определения функции

$$z=\ln(1-x^2-y^2).$$

Решение. Логарифмическая функция существует только при положительных значениях аргумента, поэтому функция $z=\ln(1-x^2-y^2)$ определена, если $1-x^2-y^2>0$ или $x^2+y^2<1$. Последнее неравенство задает область определения данной функции:

$$D(z)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}.$$

На плоскости Oxy ему соответствует внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1.1).

П р и м е р 1.2. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-1}$.

Решение. Функция имеет смысл, когда подкоренные выражения неотрицательны, следовательно, область определения задается двумя неравенствами: $x^2-4\geq 0$ и $y^2-1\geq 0$. На плоскости Oxy им соответствует множество $D(z)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| |x|\geq 2,\ |y|\geq 1\}$ (рис. 1.2).

П р и м е р 1.3. Для функции $z=x^2+y$ областью определения, очевидно, будет вся плоскость Oxy, так как нет никаких ограничений.

Определение 1.1 функции двух переменных без затруднений рас-

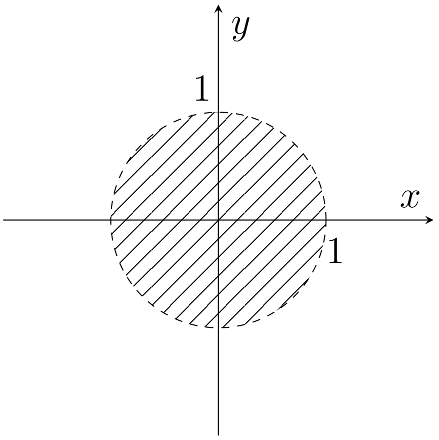


Рис. 1.1

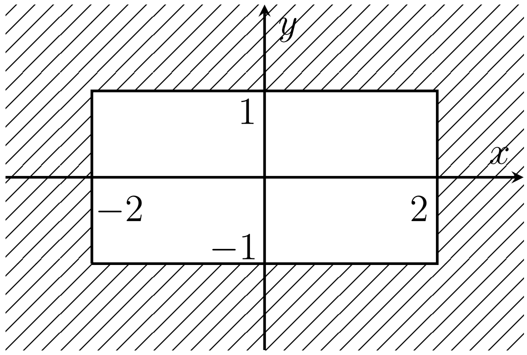


Рис. 1.2

пространяется на произвольное число независимых переменных.

Определение 1.3. Пусть задано некоторое множество $\Omega \in \mathbb{R}^n$ точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Соответствие f, которое каждому упорядоченному набору координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ сопоставляет одно и только одно число $u \in \mathbb{R}$, называется ***функцией*** n ***переменных*** x_1, x_2, $\ldots$, x_n, определенной на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ со значениями на множестве действительных чисел. Записывается данное соответствие в виде

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

при этом x_1, x_2, $\ldots$, x_n, называются ***независимыми переменными*** (аргументами), u – ***функцией*** (зависимой переменной). Также для записи функции n переменных можно использовать обозначения: $u = f(P)$, $u = f(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Важнейшими частными случаями являются случаи функций трех пространственных переменных (x, y, z) и трех пространственных переменных с добавлением временной переменной (x, y, z, t):

$$u = f(x, y, z),$$

$$u = f(x, y, z, t),$$

Далее запишем обобщенное на случай n переменных x_1, x_2, ..., x_n определение области определения функции.

Определение 1.4. Множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которых существует значение функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется ***областью определения*** данной функции, обозначается данное множество $D(f)$ или $D(u)$.

П р и м е р 1.4. Найти область определения функции

$$u(x,y,z,t) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-t^2}.$$

Решение. Данная функция четырех переменных, ввиду свойства арифметического корня, определена для значений x, y, z, t, которые удовлетворяют неравенствам:

$$-1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1, \quad -1 \le z \le 1, \quad -1 \le t \le 1$$

Таким образом, областью определения данной функции является четырехмерный параллелепипед – "прямоугольная область" четырехмерного пространства (по аналогии с прямоугольной областью на плоскости: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, и параллелепипедом трехмерного пространства: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$).

Функции двух переменных являются наиболее востребованным представителем семейства функций нескольких переменных при получении теоретических результатов и выводе конкретных практических формул. Рассмотрение любого вопроса теории и практики многомерного математического анализа начинается с разбора данного вопроса в двумерном случае. Достигнутый результат далее переносится на случай произвольной размерности.

Главной причиной данной ситуации является наглядность и графическое представление функции двух переменных. Рассмотрим процесс