

С. С. Ахтамова, Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Учебное пособие

УДК 517.53/.55(07)
ББК 22.161я73
А957

Р е ц е н з е н т ы:

Е. Н. Михалкин, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории функций ФГАУО ВО «Сибирский федеральный университет»;

М. С. Апанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской кибернетики и информатики ФГБОУ ВО «Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого» Министерства здравоохранения Российской Федерации

Ахтамова С. С.

А957 Математический анализ. Теория функций многих переменных: учеб. пособие / С. С. Ахтамова, Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2021. – 60 с.

Содержит краткие теоретические сведения и практические разделы теории функций многих переменных по дисциплине «Математический анализ». Включает множество прикладных работ авторов и дополнительный методический материал для самостоятельной и контрольной работы. Составлено на основании программы курса высшей математики с учётом числа часов, отводимых для данной дисциплины учебными планами.

Предназначено для организации образовательного процесса по программам бакалавриата 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)».

Электронный вариант издания
см.: <http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 517.53/.55(07)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7638-4473-3

© Сибирский федеральный
университет, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Раздел 1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.....	5
Занятие 1. Функции двух переменных. Их область определения и графики.....	14
Занятие 2. Предел функции двух переменных.....	15
Занятие 3. Непрерывность функции двух переменных.....	16
Занятие 4. Частные производные первого порядка.....	17
Занятие 5. Полный дифференциал и полное приращение функции. Связь между полным дифференциалом функции и её полным приращением.....	19
Занятие 6. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной.....	21
Занятие 7. Дифференцирование сложной функции от нескольких независимых переменных.....	22
Занятие 8. Производные высших порядков.....	23
Занятие 9. Дифференциалы высших порядков.....	24
Занятие 10. Линии и поверхности уровня. Производная функции по направлению. Градиент.....	24
Занятие 11. Дифференцирование неявных функций.....	26
Занятие 12. Геометрические приложения.....	27
Занятие 13. Экстремум функции двух переменных.....	28
Занятие 14. Отыскание наибольших и наименьших значений функции двух независимых переменных в замкнутой области.....	29
Контрольная работа по разделу 1.....	30
Решение типового варианта контрольной работы по разделу 1.....	32
Раздел 2. Кратные интегралы и их приложения.....	37
Занятие 15. Формула Тейлора.....	42
Занятие 16. Сведение двойного интеграла к повторному.....	43
Занятие 17. Двойной интеграл в полярных координатах.....	44
Занятие 18. Двойной интеграл в криволинейных координатах.....	45
Занятие 19. Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойных интегралов.....	46
Занятие 20. Вычисление объёмов.....	47
Занятие 21. Площадь поверхности. Механические приложения двойных интегралов.....	47
Занятие 22. Вычисление тройных интегралов.....	48
Занятие 23. Вычисление объёмов тел.....	49
Занятие 24. Приложение к механике.....	50
Контрольная работа по разделу 2.....	51
Решение типового варианта контрольной работы по разделу 2.....	52
Библиографический список.....	57

РАЗДЕЛ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ из некоторого множества D по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной $z \in E$, то переменная z называется **функцией двух переменных** $z = f(x; y)$; x, y – **независимыми переменными** или **аргументами**; D – **областью определения**; E – **множеством значений**.

Т. к. уравнение $z = f(x; y)$ определяет некоторую поверхность в пространстве, то под **графиком функции двух переменных** будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x; y; z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x; y)$ (рис. 1).

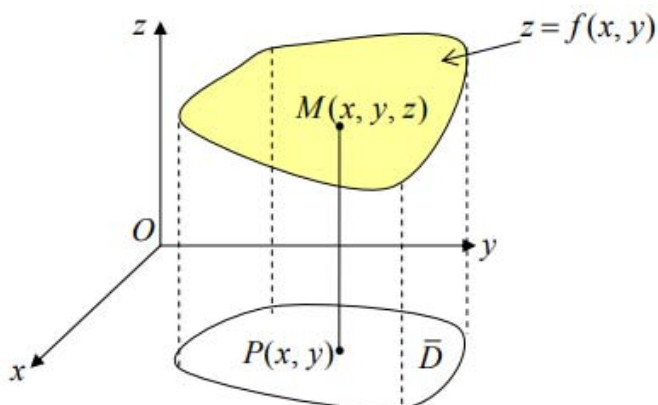


Рис. 1

Геометрически область определения функции D представляет собой некоторую часть плоскости Oxy , ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется **замкнутой** и обозначается \bar{D} , во втором – **открытой**.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трёх и большего числа переменных. Величина y называется **функцией переменных** $x_1; x_2; \dots; x_n$, если каждой совокупности $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$ из некоторой области n -мерного пространства соответствует определённое значение y , что записывается в виде $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Т. к. совокупность значений $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определяет точку n -мерного пространства $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных можно рассматривать как функцию точек M пространства соответствующей размерности, а именно $y = f(M)$.

δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется совокупность всех точек $(x; y)$, которые удовлетворяют условию

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta. \quad (1.1)$$

Число A называется **пределом функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$** , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любой точки $M(x; y)$, принадлежащей δ -окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, выполняется условие

$$|f(x; y) - A| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Записывают:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow x_0}} f(x; y) = A. \quad (1.3)$$

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x; y)$. Тогда функция $z = f(x; y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow x_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0), \quad (1.4)$$

причём точка $M(x; y)$ стремится к точке $M_0(x_0; y_0)$ произвольным образом.

Свойство 1. Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз – наименьшего.

Свойство 2. Если функция $f(x; y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D , а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m; M]$ существует точка $(x_0; y_0)$ – такая, что

$$f(x_0; y_0) = \mu. \quad (1.5)$$

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m . Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D по крайней мере один раз функция обращается в ноль.

Свойство 3. Функция $f(x; y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , **ограничена** в этой области, т. е. существует такое число K , что для всех точек области верно неравенство

$$|f(x; y)| < K. \quad (1.6)$$

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x; y)$. Возьмём произвольную точку $M(x; y)$ и дадим переменной x приращение Δx , оставив y постоянной величиной, тогда функция $z = f(x; y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое **частным приращением функции по переменной x** :

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y). \quad (1.7)$$

Тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется **частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменной x** .

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x ; $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; $f'_x(x;y)$.

Аналогично определяется **частная производная функции по переменной y** :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \quad (1.8)$$

Полным приращением функции $f(x; y)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y). \quad (1.9)$$

Функция $f(x; y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x; y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \quad (1.10)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x; y)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy и обозначаемая dz . Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = f'_x(x; y)dx + f'_y(x; y)dy, \quad (1.11)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – приращения независимых переменных, равные их дифференциалам.

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x; y; z; \dots; t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (1.12)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

Решение. Для функции трёх переменных полный дифференциал имеет вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (1.13)$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \times 2yz; \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z - 1} \ln x \times y^2. \quad (1.16)$$

Следовательно,

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + x^{y^2 z} \ln x \times 2yz dy + x^{y^2 z - 1} \ln x \times y^2 dz. \quad (1.17)$$

Полный дифференциал часто используется для **приближённых вычислений значений функций**. Запишем полное приращение функции $z = f(x; y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y), \quad (1.18)$$

откуда можно выразить: