С. С. Ахтамова, Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

УДК 517.53/.55(07)
ББК 22.161я73
А957

Р е ц е н з е н т ы:

Е. Н. Михалкин, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории функций ФГАУО ВО «Сибирский федеральный университет»;

М. С. Апанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской кибернетики и информатики ФГБОУ ВО «Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого» Министерства здравоохранения Российской Федерации

Ахтамова С. С.

А957 **Математический анализ. Теория функций многих переменных**: учеб. пособие / С. С. Ахтамова, Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2021. – 60 с.

Содержит краткие теоретические сведения и практические разделы теории функций многих переменных по дисциплине «Математический анализ». Включает множество прикладных наработок авторов и дополнительный методический материал для самостоятельной и контрольной работы. Составлено на основании программы курса высшей математики с учётом числа часов, отводимых для данной дисциплины учебными планами.

Предназначено для организации образовательного процесса по программам бакалавриата 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)».

Электронный вариант издания
см.: http://catalog.sfu-kras.ru

УДК 517.53/.55(07)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7638-4473-3

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ из некоторого множества D по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной $z \in E$, то переменная z называется **функцией двух переменных** $z = f(x;\ y)$; $x,\ y$ – **независимыми переменными** или **аргументами**; D – **областью определения**; E – **множеством значений**.

Т. к. уравнение $z = f(x; y)$ определяет некоторую поверхность в пространстве, то под **графиком функции двух переменных** будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x; y; z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x; y)$ (рис. 1).

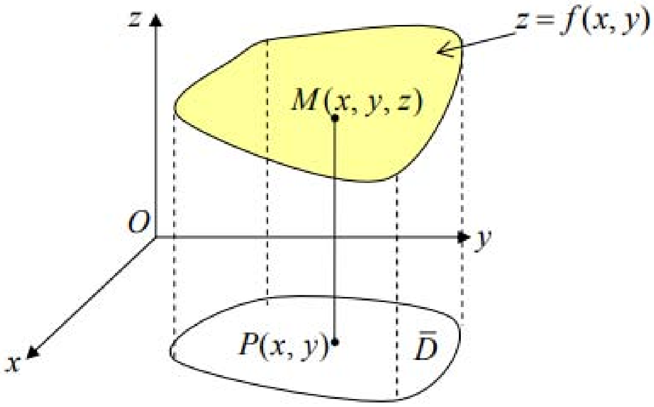

Рис. 1

Геометрически область определения функции D представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется **замкнутой** и обозначается $\overline{D}$, во втором – **открытой**.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трёх и большего числа переменных. Величина y называется **функцией переменных** $x_1; x_2; \dots; x_n$, если каждой совокупности $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$ из некоторой области n-мерного пространства соответствует определённое значение y, что записывается в виде $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Т. к. совокупность значений $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определяет точку n-мерного пространства $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных можно рассматривать как функцию точек M пространства соответствующей размерности, а именно $y = f(M)$.

δ-окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется совокупность всех точек $(x; y)$, которые удовлетворяют условию

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta. \tag{1.1}$$

Число A называется **пределом функции** $z = f(x; y)$ **в точке** $M_0(x_0; y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любой точки $M(x; y)$, принадлежащей δ-окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, выполняется условие

$$|f(x; y) - A| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Записывают:

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x \to x_0}} f(x; y) = A. \tag{1.3}$$

Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x; y)$. Тогда функция $z = f(x; y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x \to x_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0), \tag{1.4}$$

причём точка $M(x; y)$ стремится к точке $M_0(x_0; y_0)$ произвольным образом.

Свойство 1. Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз – наименьшего.

Свойство 2. Если функция $f(x; y)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m; M]$ существует точка $(x_0; y_0)$ – такая, что

$$f(x_0; y_0) = \mu\,. \tag{1.5}$$

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D по крайней мере один раз функция обращается в ноль.

Свойство 3. Функция $f(x; y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, т. е. существует такое число K, что для всех точек области верно неравенство

$$|f(x; y)| < K. \tag{1.6}$$

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x; y)$. Возьмём произвольную точку $M(x; y)$ и дадим переменной x приращение Δx, оставив y постоянной величиной, тогда функция $z = f(x; y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое **частным приращением функции по переменной x**:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y). \tag{1.7}$$

Тогда, если существует $\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется **частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменной x**.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; $f'_x(x;y)$.

Аналогично определяется **частная производная функции по переменной $\boldsymbol{y}$**:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \quad (1.8)$$

Полным приращением функции $f(x;y)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x; y). \quad (1.9)$$

Функция $f(x;y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x;y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \quad (1.10)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy и обозначаемая dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = f'_x(x;y)dx + f'_y(x;y)dy, \quad (1.11)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – приращения независимых переменных, равные их дифференциалам.

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x; y; z; \dots; t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t}dt. \quad (1.12)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

Решение. Для функции трёх переменных полный дифференциал имеет вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \quad (1.13)$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \times 2yz; \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z - 1} \ln x \times y^2. \quad (1.16)$$

Следовательно,

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + x^{y^2 z}\ln x \times 2yzdy + x^{y^2 z - 1}\ln x \times y^2 dz. \quad (1.17)$$

Полный дифференциал часто используется для **приближённых вычислений значений функций**. Запишем полное приращение функции $z = f(x;y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x; y), \quad (1.18)$$

откуда можно выразить: