СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ | SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Электронное издание

УДК 519.21(07)
ББК 22.171я73
М340

А в т о р ы:
Созутов Анатолий Ильич; **Сакулин** Владимир Петрович; **Рыбакова** Наталья Николаевна; **Мельникова** Ирина Витальевна; **Лученкова** Елена Борисовна

Р е ц е н з е н т ы:
С. Г. Колесников, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики института математики и фундаментальной информатики СФУ;
О. Н. Жданов, доцент кафедры безопасности информационных технологий СибГУ имени М. Ф. Решетнева

М340 **Математика. Теория вероятностей :** учеб. пособие/ А. И. Созутов, В. П. Сакулин, Н. Н. Рыбакова [и др.]. – Электрон. дан. (1 Мб). – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – Систем. требования : PC не ниже класса Pentium I ; 128 Mb RAM ; Windows 98/XP/7 ; Adobe Reader V8.0 и выше. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-7638-4426-9

Излагаются основные разделы курса теории вероятностей. Теоретический материал сопровождается иллюстрациями и примерами прикладного характера.
Предназначено для бакалавров и магистрантов инженерных специальностей.

Электронный вариант издания см.: **УДК 519.21(07)**
http://catalog.sfu-kras.ru **ББК 22.171я73**

Электронное учебное издание

Редактор *А. В. Прохоренко*
Компьютерная верстка *И. В. Мельниковой*

Подписано в свет 25.12.2020. Заказ № 12272
Тиражируется на машиночитаемых носителях

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а, тел. (391)206-26-16

ISBN 978-5-7638-4426-9

Оглавление

Введение

Раздел дисциплины Математика «Теория вероятностей» для бакалавров инженерных направлений подготовки является заключительным в данной дисциплине, что говорит о важности его изучения. Цель освоения данного раздела — обеспечение математической подготовки студентов для изучения других дисциплин в магистратуре, связанных с проведением различных наблюдений, исследований, составлением моделей с применением современного математического аппарата.

Теория вероятностей — наука о вычислении *вероятностей случайных событий* [14, С. 37], позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми [9, С. 655]. В более широком смысле она изучает количественные закономерности массовых случайных явлений и занимается созданием, определением и описанием моделей, связанных с понятием вероятности [7, С. 481]. Теория вероятностей возникла в XVII веке и применялась вначале в основном в азартных играх (кости, карты и т.д.). Основателями ее можно считать Гюйгенса, Б. Паскаля, П. Ферма и Я. Бернулли. В XIX веке развитие теории вероятностей стимулировалось потребностями обработки экспериментальных данных, теории стрельбы, статистики и т.д. Известные учёные Лаплас, Гаусс, Пуассон обогатили теорию и методами математического анализа. Большой вклад в развитие теории внесли русские учёные Чебышёв, Марков, Ляпунов, Хинчин, Колмогоров [14, С. 40].

Теория вероятностей лежит в основе многих дисциплин (таких, как «Теория массового обслуживания», «Теория надёжности», «Математическая статистика» и др.).

1. Алгебра множеств

1.1. Общая теория

Понятие *класса*, или *совокупности*, или *множества* объектов, — одно из самых фундаментальных в математике. Множество определяется некоторым свойством (атрибутом) $\mathfrak{A}$, которым должен обладать или не обладать каждый рассматриваемый объект; те объекты (*элементы*), которые обладают свойством $\mathfrak{A}$, образуют множество A. Так, если мы рассматриваем натуральные числа и свойство $\mathfrak{A}$ заключается в чётности, то соответствующее множество A состоит из всех чётных чисел: $2, 4, 6, \ldots$.

Математическая теория множеств основывается на том, что из исходных множеств с помощью определённых операций можно образовывать новые множества и устанавливать соотношения между ними, подобно тому, как из чисел посредством операций сложения и умножения получаются новые числа ($1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, $\ldots$), устанавливаются соотношения между ними. Пример — таблица умножения: $6 \times 8 = 48$, $7 \times 9 = 63$, $\ldots$. Операции над множествами — предмет *алгебры множеств*, которая имеет много общего с обыкновенной числовой алгеброй, хотя кое в чём и отличается от неё.

Тот факт, что алгебраические методы могут быть применены при изучении нечисловых объектов, каковыми являются множества, иллюстрирует общность идей современной математики. Алгебра множеств открывает новые стороны многих областей математики (например, теория меры и теория вероятностей); она полезна при систематизации математических понятий и выяснении их логических связей.

В дальнейшем через E будем обозначать некоторое постоянное множество объектов, природа которых нам сейчас безразлична, и которое мы будем называть *универсальным множеством*, или *универсумом рассуждений*; A,

B, C, ... — какие-то подмножества из множества E. Если E есть совокупность всех натуральных чисел, то A, скажем, будет обозначать множество всех чётных чисел, B — множество всех нечётных чисел, C — множество всех простых чисел и т.п. Если E обозначает совокупность всех точек на плоскости, то A может быть множеством точек внутри какого-то круга, B — множеством точек внутри другого круга и т.п. В число *подмножеств* нам удобно включить само E, а также *пустое* множество $\oslash$, не содержащее никаких элементов. Цель, которую преследует такое искусственное расширение, — сохранение того положения, при котором каждому свойству $\mathfrak{A}$ соответствует некоторое множество элементов из E, обладающих этим свойством.

В случае, если E есть универсально выполняемое свойство, примером которого может служить, если речь идёт о числах, свойство удовлетворять равенству $x = x$, то соответствующее подмножество E будет само E, так как каждый элемент обладает таким свойством; с другой стороны, если $\mathfrak{A}$ есть какое-то внутренне противоречивое свойство (например, $x \neq x$), то подмножество не содержит элементов вовсе, оно «пустое», всегда обозначаемое символом $\oslash$ (вне зависимости от природы элементов множества E).

Говорят, что множество A есть *подмножество* множества B, короче, «A входит в B», или «B содержит A», если во множестве A нет такого элемента, который не был бы также во множестве B. Этому соотношению соответствует запись

$$A \subset B, \quad \text{или} \quad B \supset A.$$

Например, множество A всех целых чисел, делящихся на 10, есть подмножество множества B всех целых чисел, делящихся на 5, так как каждое число, делящееся на 10, делится также на 5. Соотношение $A \subset B$ не исключает соотношения $B \subset A$. Если имеет место и то, и другое, то мы пишем

$$A = B.$$

Это означает, что каждый элемент множества A есть вместе с тем элемент множества B и наоборот, так что множества A и B содержат как раз одни и те же элементы.

Соотношение $A \subset B$ между множествами во многом напоминает соотношение $a \leqslant b$ между числами. В частности, отметим следующие свойства этого соотношения:

$$1)\ A \subset A;$$
$$2)\ \text{если } A \subset B \text{ и } B \subset A, \text{ то } A = B;$$
$$3)\ \text{если } A \subset B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subset C.$$

По этой причине соотношение $A \subset B$ называют иногда *отношением порядка*. Главное отличие рассматриваемого соотношения от соотношения $a \leqslant b$ между числами заключается в том, что между *всякими* двумя заданными (действительными) числами a и b непременно существует по меньшей мере одно из соотношений $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, тогда как для соотношения $A \subset B$ между множествами аналогичное утверждение неверно. Например, если A есть множество, состоящее из чисел 1, 2, 3,

$$A = \{\,1,\ 2,\ 3\,\},$$

а B — множество, состоящее из чисел 2, 3, 4,

$$B = \{\,2,\ 3,\ 4\,\},$$

то не имеет места ни соотношение $A \subset B$, ни соотношение $B \subset A$. По этой причине говорят, что подмножества A, B, C, ... множества E являются *частично упорядоченными*, тогда как действительные числа $a, b, c, \ldots$ образуют *вполне упорядоченную* совокупность.

Заметим, что из определения соотношения $A \subset B$ следует, что, каково бы ни было подмножество A множества E, имеют место соотношения

$$4)\ \varnothing \subset A;$$
$$5)\ A \subset E.$$

Свойство 4) может показаться несколько парадоксальным, но, если вдуматься, оно логически строго соответствует точному определению знака $\subset$. В самом деле, соотношение $\varnothing \subset A$ нарушалось бы только в том случае, если бы пустое множество $\varnothing$ содержало элемент, который не содержался бы в A; но так как пустое множество вовсе не содержит элементов, то этого быть не может, каково бы ни было A.

Частично упорядоченные множества называют также *решётками*, или *структурами*. Их удобно изображать в виде *графа*, в котором элементы решётки являются *вершинами*; при этом $a < b$, если от a к b есть *путь*, идущий по направлению *рёбер* (см. рис. 1а).

Стрелки в решётках, как правило, опускают (рис. 1б), считая, что рёбра направлены, например, «снизу вверх». Очевидно, что решётки на рис. 1 одинаковы, или, как принято говорить, *изоморфны*.

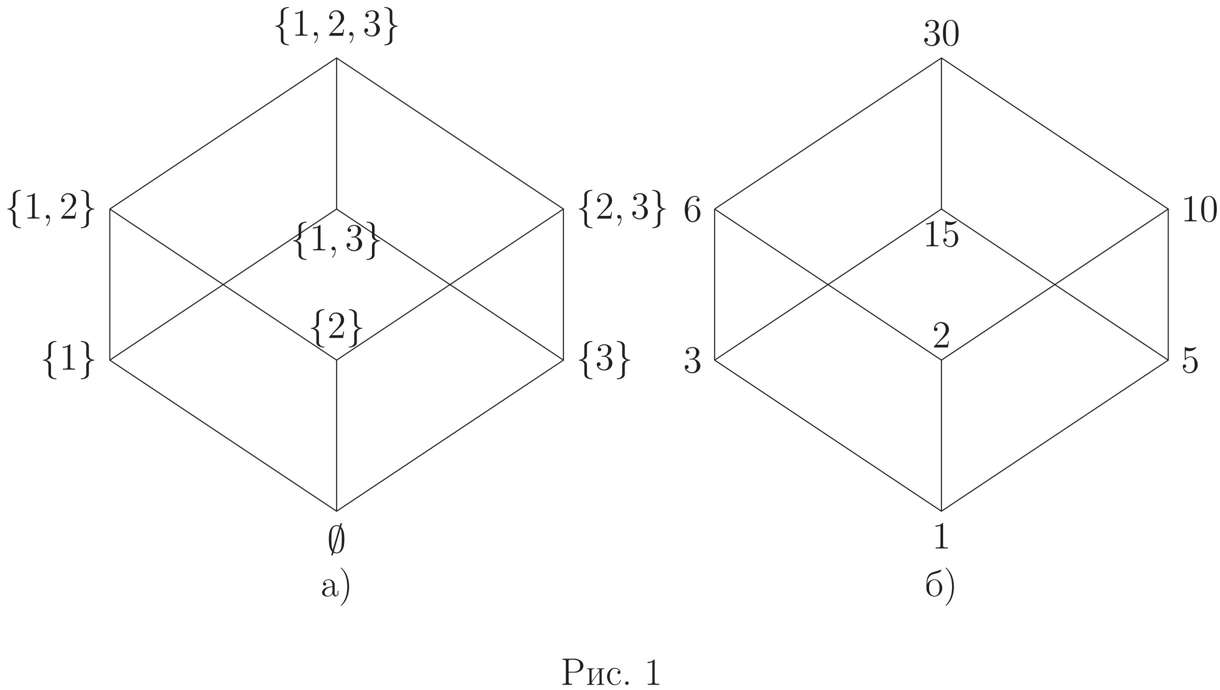
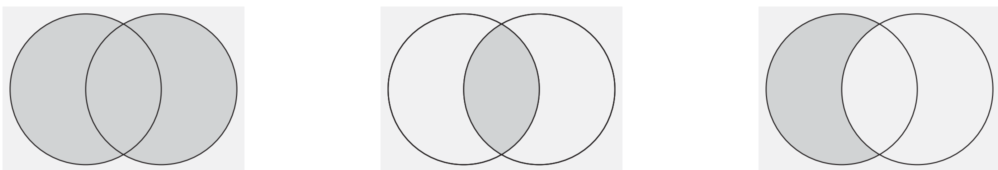


Рис. 1

1.2. Операции над множествами

Определим вначале две операции над множествами, формально обладающими многими алгебраическими свойствами сложения и умножения чисел, а по своему внутреннему содержанию совершенно отличными от этих арифметических действий. Пусть A и B — какие-то два множества. Под *объединением*, или *логической суммой*, A и B понимается множество, состоящее из тех элементов, которые содержатся *или в* A, *или в* B (включая и те элементы, которые содержатся *и в* A, *и в* B) (рис. 2а). Это множество обозначается $A+B$, или $A \cup B$. Под *пересечением*, или *логическим произведением*, A и B понимается множество, состоящее из тех элементов, которые содержатся *и в* A, *и в* B (рис. 2б). Это множество обозначается AB, или $A \cap B$. Под *разностью*, или *логической разностью*, A и B понимается множество, состоящее из тех элементов, которые содержатся *в* A, но не содержатся *в* B, (рис. 2в). Это множество обозначается $A - B$, или $A \setminus B$.

В элементарной теории множеств само множество и его подмножества часто изображают в виде некоторых областей на плоскости (диаграммы Эйлера-Венна). Дадим геометрическую интерпретацию введённых действий с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 2).



$A+B$ а) $A \cdot B$ б) $A - B$ в)

Рис. 2

Проиллюстрируем приведённые определения на примере множеств A и B: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Тогда $A+B = \{1, 2, 3, 4\}$, $AB = \{2, 3\}$, $A - B = \{1\}$.

В числе важнейших алгебраических свойств операций $(A+B)$ и $A \cdot B$ назовём следующие (читатель сможет проверить их справедливость, исходя из определения самих операций):

6) $A + B = B + A$;

7) $A \cdot B = B \cdot A$;

8) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

9) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

10) $A + A = A$;

11) $A \cdot A = A$;

12) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

13) $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$;

14) $A + \oslash = A$;

15) $A \cdot E = A$;

16) $A + E = E$;

17) $A \cdot \oslash = \oslash$;

18) соотношение $A \subset B$ эквивалентно каждому из соотношений $A + B = B$, $A \cdot B = A$.

Проверка всех этих свойств — дело элементарной логики. Например, свойство 10) констатирует, что множество элементов, содержащихся или в A, или в A, есть как раз множество A; свойство 12) утверждает, что множество тех элементов, которые содержатся в A и вместе с тем содержатся или в B, или в C, совпадает со множеством элементов, которые либо одновременно содержатся в A и в B, либо в A и в C.

Читатель, несомненно, обратил внимание на то обстоятельство, что свойства 6), 7), 8), 9) и 12) внешне тождественны хорошо знакомым коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам обыкновенной алгебры. Отсюда следует, что все правила обыкновенной алгебры, вытекающие из этих законов, действительны также для алгебры множеств. Напротив, свойства 10), 11) и 13) не имеют аналогов в обыкновенной алгебре и упрощают структуру алгебры множеств. Например, бином Ньютона в алгебре множеств сводится к простейшему равенству

$$(A + B)^n = (A + B) \cdot (A + B) \cdot \ldots \cdot (A + B) = A + B,$$

которое следует из свойства 11). Свойства 14), 15) и 17) говорят о том, что свойства множеств $\oslash$ и E по отношению к операциям объединения и пересечения множеств весьма похожи на свойства чисел 0 и 1 по отношению к операциям числовых действий сложения и умножения. Но свойство 16) не имеет аналога в числовой алгебре.