№ 4044

МИСиС
Национальный исследовательский
технологический университет

МАТЕМАТИКА

Дифференциальное исчисление. Часть I. Функции одной независимой переменной

Учебное пособие

№ 4044 МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

ИНСТИТУТ БАЗОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Дифференциальное исчисление.
Часть I. Функции одной независимой переменной

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета

МИСиС

Москва 2021

УДК 517.2
М34

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры высшей и прикладной математики *В.В. Шевелев* (Российский технологический университет РТУ-МИРЭА)

Авторы:
А.Э. Адигамов, П.В. Макаров, Н.В. Семенова, Ф.Л. Дамиан

М34 Математика. Дифференциальное исчисление. Часть I. Функции одной независимой переменной : учеб. пособие / А.Э. Адигамов [и др.]. – М. : Издательский Дом НИТУ «МИСиС», 2021. – 76 с.
ISBN 978-5-907227-24-8

Материал учебного пособия охватывает содержание нескольких основных разделов программы курса «Математика». Пособие призвано помочь студентам как при выполнении домашних заданий и подготовке к контрольным работам, так и в самостоятельном изучении дисциплины.

В нем кратко приведены основные понятия теории дифференцирования: определения основных понятий и формулировки теорем, рабочие формулы и математические выражения, даны практические рекомендации при разборе примеров с тем, чтобы облегчить усвоение материала и выполнение расчетного задания. Приведены примеры решения типовых задач.

Материал дан в объеме, достаточном для понимания различных курсов, изучаемых в дальнейшем. Приводятся основные теоретические сведения о производных и дифференциалах, рассмотрены основные приемы и методы дифференцирования. Теоретический материал сопровождается разобранными примерами и задачами для самостоятельного решения, что необходимо для самостоятельной работы студентов.

Пособие направлено на то, чтобы помочь студенту-заочнику в освоении основного программного материала курса по стандартным учебникам и различных приемов и методов дифференцирования.

Предназначено для студентов младших курсов заочной формы обучения.

УДК 517.2

ISBN 978-5-907227-24-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1. Основные понятия 6
2. Вывод производных основных элементарных функций 8
3. Производная суммы, произведения, частного 10
4. Производная логарифмической функции и сложной функции 12
5. Принцип логарифмического дифференцирования 18
6. Производная обратной функции 22
7. Производные обратных тригонометрических функций 25
8. Производные неявных функций 27
9. Производные функций, заданных параметрически 28
10. Дифференциал функции. Его свойства и геометрический смысл 30
11. Свойства дифференциала 31
12. Дифференциал сложной функции 32
13. Производные и дифференциалы высших порядков 34
14. Общие правила нахождения производных высших порядков 39
15. Теорема и формула Тейлора 46
16. Формула Маклорена 49
17. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена 50
18. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши 63
19. Раскрытие неопределенности в пределе. Правила Лопиталя 65
Приложение 73
Библиографический список 75

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует, то есть

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная функции обозначается $y'(x_0)$, $f_x'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x)}{dx}$.

Геометрический смысл производной в точке представлен на рис. 1.

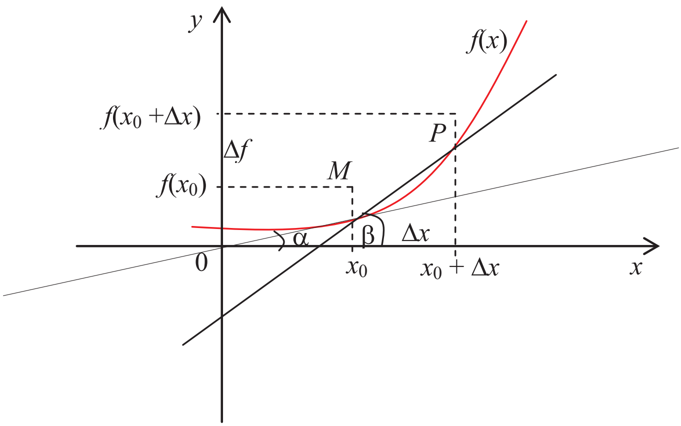

Рис. 1. Секущая и касательная к графику функции в точке

Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей к графику функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Определение. Нахождение производной $f'(x)$ по заданной функции $f(x)$ называется дифференцированием функции $f(x)$.

Определение. Если $f(x)$ имеет производную во всех точках (a,b), то она дифференцируема на этом интервале (a,b).

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке x_0.

Доказательство.

По условию

$$\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)}{\Delta x}-\frac{f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)+\alpha\left(\Delta x\right),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, поэтому

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\alpha(\Delta x).$$

Следовательно:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'\left(x_0\right)\Delta x\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\alpha\left(\Delta x\right)\right]=$$
$$=f'\left(x_0\right)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\alpha\left(\Delta x\right)\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Например: функция $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ непрерывна, однако в этой точке не имеет производной, так как при $x > 0$ $f'(0) = 1$, а при $x < 0$ $f'(0) = -1$.

Следствие. В точках разрыва функция не имеет производной.

2. ВЫВОД ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Вывод производной **степенной функции:**

$$y = x^n;$$

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k x^k \left(\Delta x\right)^{n-k} - x^n =$$

$$= 1x^0 \left(\Delta x\right)^n + nx\left(\Delta x\right)^{n-1} + \frac{n\left(n-1\right)}{2} x^2 \left(\Delta x\right)^{n-1} +$$

$$+ nx^{n-1}\Delta x + x^n \left(\Delta x\right)^0 - x^n;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\Delta x\right)^{n-1} + nx\left(\Delta x\right)^{n-2} + \ldots + \frac{n\left(n-1\right)}{2} x^{n-2}\Delta x + nx^{n-1};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1};$$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

Вывод производных **тригонометрических функций:**

а) $y = \sin x$;

$$\Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right) - \sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin x\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x.$$

б) $y = \cos x$;

$$\Delta y = \cos\left(x + \Delta x\right) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2};$$