А. П. Жмакин

АРХИТЕКТУРА ЭВМ

- *Функциональная организация ЭВМ*
- *Машинная арифметика и синтез устройств*
- *Архитектура микропроцессорных систем*
- *Программная модель учебной ЭВМ*
- *Лабораторный практикум*
- *Курсовое проектирование*

+ CD

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv®

УДК 681.3(075.8)
ББК 32.973-02я73
Ж77

Жмакин А. П.

Ж77 Архитектура ЭВМ. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 320 с.: ил.

ISBN 5-94157-719-2

Пособие объединяет в одном издании теоретическую часть одноименной дисциплины и лабораторный практикум. Рассмотрены базовые вопросы организации ЭВМ: функциональная организация ЭВМ, системы команд и командный цикл. Большое внимание уделено арифметическим основам ЭВМ, принципам построения различных усройств и их взаимодействию. Обсуждаются вопросы построения микропроцессорных систем. Лабораторный практикум проводится на программной модели ЭВМ, представленной на прилагаемом компакт-диске. Также пособие содержит материалы для выполнения курсового проектирования.

Для студентов и преподавателей технических вузов

УДК 681.3(075.8)
ББК 32.973-02я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Игоря Цырульникова*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:

Терехов А. Н., д. ф.-м. н., профессор,
заведующий кафедрой системного программирования
Санкт-Петербургского государственного университета

Костин В. А., к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики
Санкт-Петербургского государственного университета

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 12.12.05.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,8.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

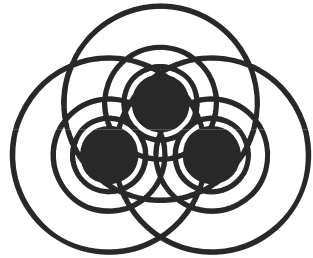
Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-719-2

Оглавление

ГЛАВА 3



Арифметические основы ЭВМ

Безусловно, одним из основных направлений применения компьютеров были и остаются разнообразные вычисления. Обработка числовой информации ведется и при решении задач, на первый взгляд не связанных с какими-то расчетами, например, при использовании компьютерной графики или звука.

В связи с этим встает вопрос о выборе *оптимального представления чисел в компьютере*. Безусловно, можно было бы использовать 8-битное (байтовое) кодирование отдельных цифр, а из них составлять числа. Однако такое кодирование не будет оптимальным, что легко увидеть из простого примера. Пусть имеется двузначное число 13. При 8-битном кодировании отдельных цифр в кодах ASCII его представление выглядит следующим образом: 0011000100110011, т. е. код имеет длину 16 битов; если же определять это число просто в двоичном коде, то получим 4-битную цепочку 1101.

Важно, что представление определяет не только способ записи данных (букв или чисел), но и допустимый набор операций над ними; в частности, буквы могут быть только помещены в некоторую последовательность (или исключены из нее) без изменения их самих; над числами же возможны *операции*, изменяющие само число, например, извлечение корня или сложение с другим числом.

Представление чисел в компьютере имеет две особенности:

- числа записываются в двоичной системе счисления (в отличие от привычной десятичной);
- для записи и обработки чисел отводится конечное количество разрядов (в "некомпьютерной" арифметике такое ограничение отсутствует).

Следствия, к которым приводят эти отличия, и рассматриваются в данной главе.

3.1. Системы счисления

Начнем с некоторых общих замечаний относительно понятия *число* [12]. Можно считать, что любое число имеет значение (содержание) и форму представления.

Значение числа задает его отношение к значениям других чисел ("больше", "меньше", "равно") и, следовательно, порядок расположения чисел на числовой оси. Форма представления, как следует из названия, определяет порядок записи числа с помощью предназначенных для этого знаков. При этом значение числа является инвариантом, т. е. не зависит от способа его представления. Это означает также, что число с одним и тем же значением может быть записано по-разному, т. е. отсутствует взаимно однозначное соответствие между представлением числа и его значением.

В связи с этим возникают вопросы, во-первых, о формах представления чисел и, во-вторых, о возможности и способах перехода от одной формы к другой.

Способ представления числа определяется *системой счисления*.

Определение

Система счисления — это правило записи чисел с помощью заданного набора специальных знаков — цифр.

Людьми использовались различные способы записи чисел, которые можно объединить в несколько групп: унарная, непозиционные и позиционные.

Унарная — это система счисления, в которой для записи чисел используется только один знак — | (вертикальная черта, палочка). Следующее число получается из предыдущего добавлением новой палочки: их количество (сумма) равно самому числу. Унарная система важна в теоретическом отношении, поскольку в ней число представляется наиболее простым способом и, следовательно, просты операции с ним. Кроме того, именно унарная система определяет значение целого числа количеством содержащихся в нем единиц, которое, как было сказано, не зависит от формы представления.

Из *непозиционных* наиболее распространенной можно считать римскую систему счисления. В ней некоторые базовые числа обозначены заглавными латинскими буквами: 1 — I, 5 — V, 10 — X, 50 — L, 100 — C, 500 — D, 1000 — M. Все другие числа строятся комбинаций базовых в соответствии со следующими правилами:

- если цифра меньшего значения стоит справа от большей цифры, то их значения суммируются; если слева — то меньшее значение вычитается из большего;

- цифры I, X, C и M могут следовать подряд не более трех раз каждая;
- цифры V, L и D могут использоваться в записи числа не более одного раза.

Например, запись XIX соответствует числу 19, MDXLIX — числу 1549. Запись чисел в такой системе громоздка и неудобна, но еще более неудобным оказывается выполнение в ней даже самых простых арифметических операций. Отсутствие нуля и знаков для чисел больше M не позволяют римскими цифрами записать любое число (хотя бы натуральное). По указанным причинам теперь римская система используется лишь для нумерации.

В настоящее время для представления чисел применяют, в основном, *позиционные системы счисления*.

Определение

Позиционными называются системы счисления, в которых значение каждой цифры в изображении числа определяется ее положением (позицией) в ряду других цифр.

Наиболее распространенной и привычной является система счисления, в которой для записи чисел используется 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Число представляет собой краткую запись многочлена, в который входят степени некоторого другого числа — основания системы счисления. Например:

$$575{,}15 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

В данном числе цифра 5 встречается трижды, однако значение этих цифр различно и определяется их положением (позицией) в числе. Количество цифр для построения чисел, очевидно, равно основанию системы счисления. Также очевидно, что максимальная цифра на 1 меньше основания. Причина широкого распространения именно десятичной системы счисления понятна — она происходит от унарной системы с пальцами рук в качестве "палочек".

Однако в истории человечества имеются свидетельства использования и других систем счисления — пятеричной, шестеричной, двенадцатиричной, двадцатиричной и даже шестидесятиричной. Общим для унарной и римской систем счисления является то, что значение числа в них определяется посредством операций сложения и вычитания базисных цифр, из которых составлено число, *независимо от их позиции в числе*. Такие системы получили название *аддитивных*.

В отличие от них позиционное представление следует считать *аддитивно-мультипликативным*, поскольку значение числа определяется операциями умножения и сложения. Главной же особенностью позиционного представле-

ния является то, что в нем посредством конечного набора знаков (цифр, разделителя десятичных разрядов и обозначения знака числа) можно записать неограниченное количество различных чисел. Кроме того, в позиционных системах гораздо легче, чем в аддитивных, осуществляются операции умножения и деления. Именно эти обстоятельства обуславливают доминирование позиционных систем при обработке чисел как человеком, так и компьютером.

По принципу, положенному в основу десятичной системы счисления, очевидно, можно построить системы с иным основанием. Пусть p — основание системы счисления. Тогда любое число Z (пока ограничимся только целыми числами), удовлетворяющее условию $Z < p^k$ ($k > 0$, целое), может быть представлено в виде многочлена со степенями (при этом, очевидно, максимальный показатель степени будет равен $k-1$):

$$Z_p = a_{k-1} \cdot p^{k-1} + a_{k-2} \cdot p^{k-2} + \ldots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 = \sum_{j=1}^{k-1} a_j \cdot p^j . \qquad (3.1)$$

Из коэффициентов a_j при степенях основания строится сокращенная запись числа:

$$Z_p = (a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0).$$

Индекс p числа Z указывает, что оно записано в системе счисления с основанием p: общее число цифр числа равно k. Все коэффициенты a_j — целые числа, удовлетворяющие условию: $0 < a_j < p-1$.

Уместно задаться вопросом: каково минимальное значение p? Очевидно, $p = 1$ невозможно, поскольку тогда все $a_j = 0$ и форма (3.1) теряет смысл. Первое допустимое значение $p = 2$ — оно и является минимальным для позиционных систем.

Система счисления с основанием 2 называется *двоичной*. Цифрами двоичной системы являются 0 и 1, а форма (3.1) строится по степеням 2. Интерес именно к этой системе счисления связан с тем, что, как указывалось выше, любая информация в компьютерах представляется с помощью двух состояний — 0 и 1, которые легко реализуются технически.

Наряду с двоичной в компьютерах используются восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления — причины будут рассмотрены далее.

3.2. Представление чисел в различных системах счисления

Очевидно, что значение целого числа, т. е. общее количество входящих в него единиц, не зависит от способа его представления и остается одинаковым во всех системах счисления; различаются только *формы представления* одного и того же количественного содержания числа.

Например: $|||||_1 = 5_{10} = 101_2 = 5_{16}$.

Поскольку одно и то же число может быть записано в различных системах счисления, встает вопрос о переводе представления числа из одной системы в другую.

3.2.1. Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

Обозначим преобразование числа Z, представленного в p-ричной системе счисления в представление в q-ричной системе как $Z_p \to Z_q$. Теоретически возможно произвести его при любых q и p. Однако подобный прямой перевод будет затруднен тем, что придется выполнять операции по правилам арифметики недесятичных систем счисления (полагая в общем случае, что p, $q \neq 10$).

По этой причине более удобными с практической точки зрения оказываются варианты преобразования с промежуточным переводом $Z_p \to Z_r \to Z_q$ с основанием r, для которого арифметические операции выполнить легко. Такими удобными основаниями являются $r = 1$ и $r = 10$, т. е. перевод осуществляется через унарную или десятичную систему счисления.

Преобразование $Z_p \to Z_1 \to Z_q$

Идея алгоритма перевода предельно проста: положим начальное значение $Z_q := 0$; из числа Z_p вычтем 1 по правилам вычитания системы p, т. е. $Z_p := Z_p - 1$, и добавим ее к Z_q по правилам сложения системы q, т. е. $Z_q := Z_q + 1$. Будем повторять эту последовательность действий, пока не достигнем $Z_p = 0$. Правила сложения с 1 (инкремента) и вычитания 1 (декремента) могут быть записаны так, как представлено в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Правила сложения и вычитания 1

Для системы *p*	**Для системы *q***
$(p-1)-1=p-2$	$0+1=1$
$(p-2)-1=p-3$	$1+1=2$
...	...
$1-1=0$	$(q-2)+1=q-1$
$0-1=\pi(p-1)$	$(q-1)+1=\pi.0$

Примечание: π — перенос в случае инкремента или заем в случае декремента.

Промежуточный переход к унарной системе счисления в данном случае осуществляется неявно — используется упоминавшееся выше свойство независимости значения числа от формы его представления. Рассмотренный алгоритм перевода может быть легко реализован программным путем.

Преобразование $Z_p \to Z_w \to Z_q$

Очевидно, первая и вторая часть преобразования не связаны друг с другом, что дает основание рассматривать их по отдельности. Алгоритмы перевода $Z_w \to Z_q$ вытекают из следующих соображений. Многочлен (3.1) для Z_q может быть представлен в виде:

$$Z_q = \sum_{j=0}^{m-1} b_j \cdot q^j = ((\ldots(b_{m-1} \cdot q + b_{m-2}) \cdot q + b_{m-3}) \cdot q + \ldots + b_1) \cdot q + b_0, \qquad (3.2)$$

где m — число разрядов в записи Z_p, а $b_j\,(j=0,...,m-1)$ — цифры числа Z_q.

Разделим число Z_q на две части по разряду номер i. Число, включающее $m-i$ разрядов с $(m-i)$-го по i-й, обозначим γ_i, а число с i разрядами с $(i-1)$-го по 0-й — δ_i. Очевидно, $i \in [0, m-1]$, $\gamma_0 = \delta_{m-1} = Z_q$.

$$Z_q = (\underbrace{b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_i}_{\gamma_i}\underbrace{b_{i-1}\ldots b_1 b_0}_{\delta_i}).$$

Позаимствуем из языка PASCAL обозначение двух операций: `div` — результат целочисленного деления двух целых чисел и `mod` — остаток от целочисленного деления (`13 div 4 = 3`; `13 mod 4 = 1`).

Теперь если принять $\gamma_{m-1} = b_{m-1}$, то в (3.2) усматривается следующее рекуррентное соотношение: $\gamma_i = \gamma_{i+1} + b_i$, из которого, в свою очередь, получаются выражения:

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i \text{ div } q \; ; \; b_i = \gamma_i \bmod q \, . \tag{3.3}$$

Аналогично, если принять $\delta_0 = b_0$, то для правой части числа будет справедливо другое рекуррентное соотношение: $\delta_i = \delta_{i-1} + b_i q^i$, из которого следуют:

$$b_i = \delta_i \text{ div } q^i \; ; \; \delta_{i-1} = \delta_i \bmod q^i \, . \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) непосредственно вытекают два способа перевода целых чисел из десятичной системы счисления в систему с произвольным основанием q.

Способ 1 является следствием соотношений (3.3), предполагающий следующий алгоритм перевода:

1. Целочисленно разделить исходное число (Z_{10}) на основании новой системы счисления (q) и найти остаток от деления — это будет цифра 0-го разряда числа Z_q.
2. Частное от деления снова целочисленно разделить на q с выделением остатка; процедуру продолжать до тех нор, пока частное от деления не окажется меньше q.
3. Образовавшиеся остатки от деления, поставленные в порядке, обратном порядку их получения, и представляют Z_q.

Пример 3.1

Выполнить преобразование $123_{10} \to Z_5$. Результат — на рис. 3.1.

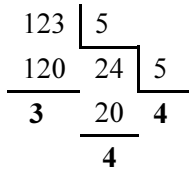


Рис. 3.1. Результат выполнения примера 3.1

Остатки от деления (3, 4) и результат последнего целочисленного деления (4) образуют обратный порядок цифр нового числа. Следовательно, $123_{10} = 443_5$.

Необходимо заметить, что полученное число нельзя читать как "четыреста сорок три", поскольку десятки, сотни, тысячи и прочие подобные обозначения чисел относятся только к десятичной системе счисления. Прочитывать число следует простым перечислением его цифр с указанием системы счисления ("число четыре, четыре, три в пятеричной системе счисления").

Способ 2 вытекает из соотношения (3.4), действия производятся в соответствии со следующим алгоритмом:

1. Определить $m-1$ — максимальный показатель степени в представления числа по форме (3.1) для основания q.
2. Целочисленно разделить исходное число (Z_{10}) на основание новой системы счисления в степени $m-1$ (т. е. q^{m-1}) и найти остаток от деления; результат деления определит первую цифру числа Z_q.
3. Остаток от деления целочисленно разделить на g^{m-2}, результат деления принять за вторую цифру нового числа; найти остаток; продолжать эту последовательность действий, пока показатель степени q не достигнет значения 0.

Продемонстрируем действие алгоритма на той же задаче, что была рассмотрена выше.

Определить $m-1$ можно либо путем подбора ($5^0 = 1 < 123$; $5^1 = 5 < 123$; $5^2 = 25 < 123$; $5^3 = 125 > 123$, следовательно, $m-1 = 2$), либо логарифмированием с оставлением целой части логарифма ($\log_5 123 = 2{,}99$, т. е. $m-1 = 2$).

Далее:

$b_2 = 123 \text{ div } 5^2 = 4$ $\quad \delta_1 = 23 \bmod 5^2 = 23$ $\quad i = 2-1 = 1$

$b_1 = 23 \text{ div } 5^1 = 4$ $\quad \delta_0 = 23 \bmod 5^1 = 3$ $\quad i = 0$

Алгоритмы перевода $Z_g \to Z_w$ явно вытекают из представлений (3.1) или (3.2): необходимо Z_p представить в форме многочлена и выполнить все операции по правилам десятичной арифметики.

Пример 3.2

Выполнить преобразование $443_5 \to Z_{10}$.

Решение:

$$443_5 = 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 123_{10}.$$

Необходимо еще раз подчеркнуть, что приведенными алгоритмами удобно пользоваться при переводе числа из десятичной системы в какую-то иную или наоборот. Они работают и для перевода между любыми иными системами счисления, однако преобразование будет затруднено тем, что все арифметические операции необходимо осуществлять *по правилам исходной* (в первых алгоритмах) или *конечной* (в последнем алгоритме) системы счисления.

По этой причине переход, например, $Z_3 \to Z_8$ проще осуществить через промежуточное преобразование к десятичной системе $Z_3 \to Z_{10} \to Z_8$. Ситуация, однако, значительно упрощается, если основания исходной и конечной систем счисления оказываются связанными соотношением $p = q^r$, где r — целое число (естественно, большее 1) или $r = 1/n$ ($n > 1$, целое) — эти случаи будут рассмотрены далее.

3.2.2. Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

Вещественное число, в общем случае содержащее целую и дробную часть, всегда можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби. Поскольку в предыдущем разделе проблема записи натуральных чисел в различных системах счисления уже была решена, можно ограничить рассмотрение только алгоритмами перевода правильных дробей.

Введем следующие обозначения: правильную дробь в исходной системе счисления p будем записывать в виде $0, Y_p$, дробь в системе q — $0, Y_q$, а преобразование — в виде $0, Y_p \to 0, Y_q$.

Последовательность рассуждений весьма напоминает проведенную ранее для натуральных чисел. В частности, это касается рекомендации осуществлять преобразование через промежуточный переход к десятичной системе, чтобы избежать необходимости производить вычисления в "непривычных" системах счисления, т. е. $0, Y_p \to 0, Y_{10} \to 0, Y_q$.

Это, в свою очередь, разбивает задачу на две составляющие: преобразование $0, Y_p \to 0, Y_{10}$ и $0, Y_{10} \to 0, Y_q$, каждое из которых может рассматриваться независимо.

Алгоритмы перевода $0,Y_{10} \to 0,Y_q$ выводятся путем следующих рассуждений. Если основание системы счисления q, простая дробь содержит n цифр, и b_k — цифры дроби ($1 < b_k < n$, $0 < b_k < n-1$), то она может быть представлена в виде суммы:

$$0,Y_q = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot q^{-k} = \frac{1}{q}(b_1 + \frac{1}{q}(b_2 + \ldots + \frac{1}{q}(b_{n-1} + \frac{1}{q}b_n)\ldots), \tag{3.5}$$

$$0,Y_q = (0,b_1 b_1 \ldots \underbrace{b_i b_{i+1} \ldots b_n}_{\varepsilon_i}).$$

Часть дроби от разряда i до ее конца обозначим ε_i и примем $\varepsilon_n = b_n / q$. Очевидно, $\varepsilon_1 = 0,Y_q$, тогда в (3.5) легко усматривается рекуррентное соотношение:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{q}(b_i + \varepsilon_{i+1}). \tag{3.6}$$

Если вновь позаимствовать в PASCAL обозначение функции — на этот раз `trunc`, производящей округление целого вещественного числа путем отбрасывания его дробной части, то следствием (3.6) будут соотношения, позволяющие находить цифры новой дроби:

$$b_i = \text{trunc}(q \cdot \varepsilon_i);\ \varepsilon_{i+1} = q \cdot \varepsilon_i - \text{trunc}(q \cdot \varepsilon_i). \tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) задают алгоритм преобразования: $0,Y_{10} \to 0,Y_q$:

1. Умножить исходную дробь в десятичной системе счисления на q, выделить целую часть — она будет первой (старшей) цифрой новой дроби; отбросить целую часть.
2. Для оставшейся дробной части операцию умножения с выделением целой и дробных частей повторять, пока в дробной части не окажется 0 или не будет достигнута желаемая точность конечного числа; появляющиеся при этом целые будут цифрами новой дроби.
3. Записать дробь в виде последовательности цифр после нуля с разделителем в порядке их появления в пп. 1 и 2.

Пример 3.3

Выполнить преобразование $0{,}375_{10} \to 0,Y_2$. Результат — на рис. 3.2.

Таким образом, $0{,}375_{10} \to 0{,}011_2$.

$$\begin{array}{l|l|l} 0{,}375 \times 2 = & \mathbf{0,} & 750 \\ 0{,}75 \times 2 = & \mathbf{1,} & 50 \\ 0{,}5 \times 2 = & \mathbf{1,} & 0 \end{array}$$

Рис. 3.2. Результат выполнения примера 3.3

Перевод $0,Y_p \to 0,Y_{10}$, как и в случае натуральных чисел, сводится к вычислению значения формы (3.5) в десятичной системе счисления. Например:

$$0{,}011_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0 + 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375_{10}.$$

Следует сознавать, что после перевода дроби, которая была конечной в исходной системе счисления, она может оказаться бесконечной в новой системе. Соответственно, рациональное число в исходной системе может после перехода превратиться в иррациональное. Справедливо и обратное утверждение: число иррациональное в исходной системе счисления в иной системе может оказаться рациональным.

Пример 3.4

Выполнить преобразование $5{,}3(3)_{10} \to Y_8$.

Перевод целой части, очевидно, дает: $5_{10} = 12_3$. Перевод дробной части: $0{,}3(3)_{10} \to 0{,}1$. Окончательно: $5{,}3(3)_{10} \to 12{,}1_3$.

Как уже было сказано, значение целого числа не зависит от формы его представления и выражает количество входящих в него единиц. Простая дробь имеет смысл доли единицы, и это "дольное" содержание также не зависит от выбора способа представления. Другими словами, треть пирога остается третью в любой системе счисления.

3.2.3. Перевод чисел между системами счисления 2 ↔ 8 ↔ 16

Интерес к двоичной системе счисления вызван тем, что именно она используется для представления чисел в компьютере. Однако двоичная запись оказывается громоздкой, поскольку содержит много цифр и, кроме того, плохо воспринимается и запоминается человеком из-за зрительной однородности (все число состоит из нулей и единиц). Поэтому в нумерации ячеек памяти компьютера, записи кодов команд, нумерации регистров и устройств и пр. используются системы счисления с основаниями 8 и 16. Выбор именно этих

систем счисления обусловлен тем, что переход от них к двоичной системе и обратно осуществляется, как будет показано далее, весьма простым образом.

Двоичная система счисления имеет основанием 2 и, соответственно, две цифры: 0 и 1.

Восьмеричная система счисления имеет основание 8 и цифры 0, 1, ..., 7.

Шестнадцатеричная система счисления имеет основание 16 и цифры 0, 1, ..., 9, A, B, C. D, E, F. При этом знак A является шестнадцатеричной цифрой, соответствующей числу 10 в десятичной системе, $B_{16} = 11_{10}$, $C_{16} = 12_{10}$, $D_{16} = 13_{10}$, $E_{16} = 14_{10}$ и $F_{16} = 15_{10}$. Другими словами, в данном случае A, ..., F — это не буквы латинского алфавита, а *цифры шестнадцатеричной системы счисления*.

Докажем две теоремы [12].

Теорема 1. Для преобразования целого числа $Z_p \to Z_q$ в том случае, если системы счисления связаны соотношением $q = p^r$, где r — целое число, большее 1, достаточно Z_p разбить справа налево на группы по r цифр и каждую из них независимо перевести в систему q.

Доказательство. Пусть максимальный показатель степени в записи числа p по форме (3.1) равен $k-1$, причем, $2r > k-1 > r$.

$$Z_p = (a_{k-1} \ldots a_1 a_0) = a_{k-1} \cdot p^{k-1} + a_{k-2} \cdot p^{k-2} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0.$$

Вынесем множитель p^r из всех слагаемых, у которых $j \geq r$. Получим:

$$Z_p = (a_{k-1} \cdot p^{k-1-r} + a_{k-2} \cdot p^{k-2-r} + \ldots a_{r+1} \cdot p^1 + a_r \cdot p^0) \cdot p^r +$$
$$+ (a_{r-1} \cdot p^{r-1} + a_{r-1} \cdot p^{r-2} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0) \cdot p^0 = b_1 \cdot q^1 + b_0 \cdot q^0,$$

где

$$b_1 = a_{k-1} \cdot p^{k-1-r} + a_{k-2} \cdot p^{k-2-r} + \ldots a_{r+1} \cdot p^1 + a_r \cdot p^0 = (a_{k-1} \ldots a_r)_p,$$
$$b_0 = a_{r-1} \cdot p^{r-1} + a_{r-1} \cdot p^{r-2} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 = (a_{r-1} \ldots a_0)_p.$$

Таким образом, r-разрядные числа системы с основанием p оказываются записанными как цифры системы с основанием q. Этот результат можно обобщить на ситуацию произвольного $k-1 > r$ — в этом случае выделятся не две, а больше (m) цифр числа с основанием q. Очевидно, $Z_q = (b_m \ldots b_0)_q$.