В. А. АРТАМОНОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издательский дом ДЕЛО

Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте
Российской Федерации

В. А. Артамонов

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Курс лекций для экономических специальностей

Издательский дом «Дело»
Москва · 2012

УДК 512/514
ББК 22
А86

Рецензент
В. Г. Чирский — доктор физико-математических наук, профессор

Артамонов, В. А.

А86 Линейная алгебра и аналитическая геометрия : курс лекций для экономических специальностей / В. А. Артамонов. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2012. — 224 с.

ISBN 978-5-7749-0720-5

Излагается теория систем линейных уравнений и способы их решения, теория матриц и определителей, комплексных чисел и многочленов, рассматривается линейное пространство. Освещаются геометрия евклидовых пространств и теория линейных операторов. Дается классификация кривых и поверхностей второго порядка. Рассматриваются линейное программирование и теория конечных антагонистических игр, а также симплекс-метод и метод решения транспортной задачи. В качестве примера одного из алгоритмов решения оптимизации на графах дается решение задачи о распределении кредита.

Для студентов экономических специальностей, изучающих математические методы.

УДК 512/514
ББК 22

ISBN 978-5-7749-0720-5

Оглавление

Предисловие 6

Глава 1. Линейные уравнения и матрицы 8
1. Метод Гаусса 8
2. Матрицы и операции над ними 13

Глава 2. Перестановки и их знаки 18

Глава 3. Определители, обратная матрица 21
1. Определители 21
2. Обратная матрица. Матричные уравнения 27

Глава 4. Комплексные числа 31
1. Действия с комплексными числами 31
2. Тригонометрическая форма комплексного числа 32

Глава 5. Многочлены от одной переменной 35
1. Многочлены от одной переменной 35
2. Деление многочленов 36
3. Корни многочленов 38
4. Интерполяция 41
5. Корни многочленов над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ 42
6. Рациональные дроби 45

Глава 6. Линейные пространства. Ранг матрицы 49
1. Линейные пространства 49
2. Ранг матрицы 56
3. Плоскости 58

Глава 7. Евклидовы пространства 66
1. Билинейные функции 66
2. Квадратичные функции 68
3. Скалярные произведения 68
4. Процесс ортогонализации и матрица Грама 70

5. Геометрия евклидовых (эрмитовых) пространств 74

Глава 8. Линейные операторы 81
1. Матрицы линейных операторов 81
2. Инвариантные подпространства 84
3. Собственные векторы и собственные значения 84
4. Симметрические операторы 87
5. Ортогональные операторы 90

Глава 9. Кривые и поверхности второго порядка 93
1. Движения евклидова пространства 93
2. Квадрики 94
3. Эллипс, гипербола и парабола 96
4. Кривые второго порядка 98
5. Поверхности второго порядка 101

Глава 10. Задача линейного программирования 105
1. Примеры задач линейного программирования 105
2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования 106
3. Сведение задачи линейного программирования к симплексной форме 107
4. Симплекс-метод 108
5. Двойственная задача линейного программирования 113

Глава 11. Матричные игры 118
1. Конечные антагонистические игры 118
2. Решение матричной игры с помощью линейного программирования 120

Глава 12. Транспортная задача 132
1. Постановка транспортной задачи 132
2. Метод потенциалов решения транспортной задачи ..136

Упражнения 152
1. Арифметические пространства 152
2. Ранг матрицы 154
3. Системы линейных уравнений 156
4. Определители 159
5. Действия над матрицами 162
6. Комплексные числа 166
7. Многочлены 170
8. Векторные пространства. Базисы. Подпространства ..174

10. Линейные операторы 178
11. Евклидовы пространства 180
12. Симметрические операторы. Приведение квадратичных функций к главным осям 183
13. Ортогональные операторы 184
14. Плоскости 185
15. Квадрики 187
16. Линейное программирование 188
17. Матричные игры 193
18. Транспортная задача 195

Ответы к упражнениям 199
1. Арифметические пространства 199
2. Ранг матрицы 199
3. Системы линейных уравнений 199
4. Определители 201
5. Действия над матрицами 201
6. Комплексные числа 204
7. Многочлены 205
8. Векторные пространства. Базисы. Подпространства 208
9. Билинейные функции 209
10. Линейные операторы 209
11. Евклидовы пространства 211
12. Симметрические операторы. Приведение квадратичных функций к главным осям 212
13. Ортогональные операторы 214
14. Плоскости 215
15. Квадрики 215
16. Линейное программирование 218
17. Матричные игры 219

Литература 220

Список обозначений 221

Предисловие

Математические методы анализа развития природы и общества являются существенным элементом современного научного образования. Они позволяют в численной форме отразить взаимодействия различных факторов развития. Это дает возможность предвидеть направления развития различных процессов в экономической деятельности и осознавать последствия принимаемых решений.

Важную роль в современном математическом образовании экономистов играет линейная алгебра и аналитическая геометрия, поскольку многие соотношения и зависимости в микро- и макроэкономике записываются в виде систем линейных уравнений и неравенств.

Настоящий курс содержит материал лекций, читавшихся автором на экономическом факультете Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации.

В курсе лекций излагается теория систем линейных уравнений и способы их решения, теория матриц и определителей, комплексных чисел и многочленов. Между этими алгебраическими понятиями и их геометрическими образами в линейных пространствах имеется тесная связь. Так, все решения заданной системы уравнений образуют плоскость в линейном пространстве. Поэтому в курс включены основы линейной алгебры.

В книге представлены геометрия евклидовых пространств, теория линейных операторов, в частности, симметрических и ортогональных. Это является важным для классификации квадрик, т.е. кривых и поверхностей второго порядка.

Рассматриваются прикладные задачи, важные для современного экономического образования — линейное программирование и теория конечных антагонистических игр, а также симплекс-метод и его применение для решения матричной игры и метод потенциалов решения транспортной задачи.

В качестве примера одного из алгоритмов решения задачи оптимизации на графах приводится решение задачи о распределении кредита.

В конце курса лекций даются упражнения и ответы к ним,[1] а также приведен список постоянно использующихся обозначений (указывается страница, где впервые встречается обозначение и объясняется его смысл). Обозначение □ указывает на конец доказательства.

Настоящее издание представляет собой переработанный и дополненный вариант книги *Артамонов В.А.* Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию. М.: Факториал Пресс, 2007. — (Методы современной математики. Вып. 4), а также некоторых глав из книги *Артамонов В.А., Латышев В.Н.* Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М.: Факториал Пресс, 2004.

Автор выражает благодарность деканату экономического факультета Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации и рецензенту — доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Чирскому за поддержку и полезные советы.

---

[1] Частично использованы материалы: Сборник задач по алгебре / под ред. А.И. Кострыкина. М.: МЦНМО, 2009; *Зайцев М.В., Беляев А.А., Фомин Г.П.* Прикладная математика: сборник задач. Части I, II. М.: Изд-во РГТЭУ, 2005.

Глава 1
Линейные уравнения и матрицы

Одной из важных задач алгебры является нахождение всех решений систем линейных уравнений. В этой главе мы рассмотрим метод Гаусса решения систем уравнений, называемый часто методом исключения неизвестных. Он был предложен немецким математиком XIX века Гауссом.

1. Метод Гаусса

Рассмотрим прямоугольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

коэффициенты которой a_{ij}, b_j заданы. Наша цель – найти все решения системы и указать алгоритм для нахождения всех решений.

Определение 1.1. *Решением* системы (1) называется такой набор чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что для всех $i = 1, \ldots, m$ выполнены равенства $a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Различаются следующие виды систем линейных уравнений вида (1). Система

- *несовместна*, если она не имеет решения;
- *совместна*, если она имеет решение;
- *неопределенна*, если она имеет более одного решения;
- *определенна*, если она имеет единственное решение.

Скажем, что две системы линейных уравнений вида (1) *эквивалентны*, если они имеют одинаковые множества решений.

Для нахождения всех решений системы мы будем совершать ряд простейших преобразований системы, сохраняющих множества решений. Заметим, что вся информация о системе (1) содержится в таблице ее коэффициентов.

Матрицей системы (1) называется прямоугольная таблица коэффициентов при неизвестных в системе

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Расширенной матрицей системы (1) называется таблица коэффициентов при неизвестных и свободных членов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Иногда расширенную матрицу системы (1) обозначают через

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Следующие преобразования системы (1) (и ее (расширенной) матрицы) называются *элементарными*:

- $\diamondsuit$ к одному уравнению (к одной строке) прибавить другое уравнение (другую строку), умноженное (умноженную) на произвольное число;
- $\heartsuit$ умножить одно уравнение (одну строку) на ненулевое число.

Упражнение 1.1. Доказать, что любые две строки матрицы можно поменять местами, совершая 4 элементарных преобразования.

Теорема 1.1. Элементарные преобразования переводят систему (1) в эквивалентную систему.

Доказательство. Предположим, что мы совершаем преобразование типа $\diamondsuit$, именно, к i-ому уравнению прибавляем j-ое, умноженное на α. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – решение исходной системы (1). Все уравнения новой системы, кроме i-го, не изменились. Если мы подставим набор $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в i-ое уравнение новой системы, то получим

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})\beta_1 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})\beta_n =$$
$$(a_{i1}\beta_1 + \cdots + a_{in}\beta_n) + \alpha(a_{j1}\beta_1 + \cdots + a_{jn}\beta_n) = b_i + \alpha b.$$

Таким образом, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ является решением новой системы. Поскольку исходная система (1) получается из новой системы элементарным преобразованием прибавлением к i-ому уравнению j-го, умноженного на $-\alpha$, то аналогично, каждое решение новой системы является решением исходной системы. $\square$

Будем приводить матрицу системы с помощью элементарных преобразований к наиболее простому — ступенчатому виду.

Матрица (3) называется *ступенчатой*, если

1) ниже нулевой строки находятся нулевые строки;
2) первый слева ненулевой элемент каждой строки равен 1, причем все остальные элементы столбца, в котором расположена эта 1, равны нулю;
3) первый ненулевой $i+1$-ой строки расположен правее первого ненулевого элемента i-ой строки.

Теорема 1.2. Каждая матрица конечным числом элементарных преобразований строк приводится к ступенчатому виду.

Доказательство. Пусть матрица A имеет вид (3). Если $A = 0$, то она уже имеет ступенчатый вид.

Пусть $A \neq 0$. Будем вести доказательство индукцией по числу строк m. Без ограничения общности можно считать, что в первом столбце есть ненулевой элемент a_{i1}. Если $i > 1$ и $a_{11} = 0$, то к первой строке можно прибавить i-ую и добиться, чтобы $a_{11} \neq 0$. Далее умножив 1-ую строку на a_{11}^{-1} можно считать, что $a_{11} = 1$. Отсюда следует утверждение теоремы при $m = 1$.

Пусть $m > 1$, и для $m-1$ теорема доказана. Для каждого $i > 1$ вычтем из i-ой строки первую строку, умноженную на a_{i1}. В новой матрице все коэффициенты $a_{i1} = 0, i > 1$.

Рассмотрим подматрицу B в A, получающуюся отбрасыванием первой строки. По индукции можно считать, что матрица B имеет ступенчатый вид. Пусть в матрице B первые ненулевые элементы расположены в столбцах с номерами $1 < k_2 < k_3 < \cdots$. Вычтем из первой строки 2-ую строку, умноженную на a_{1,k_2}, третью строку 3-ую строку, умноженную на a_{1,k_3}, и т. д. В результате получается ступенчатая матрица. $\square$

Пусть матрица системы (1) имеет ступенчатый вид. Назовем неизвестную x_i *главной*, если в некотором уравнении все коэффициенты при $x_1, \dots, x_{i-1}$ равны нуля, а коэффициент при x_i отличен от нуля (и потому равен 1). Все остальные неизвестные назовем *свободными*.

Применим теоремы 1.1 и 1.2 к исследованию системы (1). В силу указанных теорем можно считать, что расширенная матрица (3)системы (1) имеет ступенчатый вид.

Пусть ее последняя ненулевая строка имеет вид

$$(0, \dots, 0, 1). \tag{4}$$

Это означает, что система (1) содержит несовместное уравнение $0x_1 + \dots + 0x_n = 1$. Поэтому в этом случае исходная система несовместна.

Пусть в A нет строки (4). Предположим для простоты, что переменные $x_1, \dots, x_r$ главные, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ свободные. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \qquad +a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad x_r \ +a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Перенося свободные переменные в правую часть, получаем выражение главных неизвестных через свободные

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Таким образом, придавая свободным неизвестным произвольные значения, мы однозначно находим значения главных неизвестных. Итак, система совместна, и, если есть свободные неизвестные, то система неопределенна. Если все неизвестные главные, то система определенна.

Разберем следующий пример. Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = -6. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого к первой строке прибавим вторую и получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right).$$

Далее ко второй строке прибавим первую, а из третьей вычтем первую. Получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -10 \end{array}\right).$$

Все элементы третьей строки разделим на -2,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Затем из первой строки вычтем вторую, умноженную на 2, и из третьей строки вычтем вторую. Получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последнюю нулевую строку можно отбросить. Таким образом, возвращаясь от матрицы к системе уравнений, получаем, что исходная система эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad x_4 = -6, \\ \qquad\qquad\quad x_3 \quad -x_4 = 5. \end{cases}$$

Главными являются неизвестные x_1, x_3, а свободными — x_2, x_4. Поэтому система совместна и неопределённа, а её ответ записывается в виде

$$\begin{cases} x_1 \quad = -6 + x_2 - x_4 \\ x_3 \qquad\ = 5 + x_4 \end{cases}$$

Определение 1.2. Система (1) *однородна*, если все ее свободные члены нулевые, т. е. $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Предложение 1.1. Если в однородной системе число неизвестных n больше числа уравнений m, то система неопределенна.

Доказательство. Приведем систему уравнений к ступенчатому виду. При этом мы получим снова однородную систему, в которой число главных неизвестных не превосходит числа ненулевых уравнений исходной системы. Поэтому не все неизвестные главные, и им можно придать ненулевые значения. Тем самым получается ненулевое решение системы. □

2. Матрицы и операции над ними

При решении систем уравнений методом Гаусса возникла необходимость работы с матрицами. В этом разделе мы рассмотрим основным операции над матрицами. Введем следующие обозначения. Через $\mathrm{Mat}(n \times m)$ будем обозначать множество всех матриц с n строками и m столбцами. Если $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$, то мы будем также писать $A = A_{n\times m}$. Если $A_{n\times m} = (a_{ij})$, $B_{n\times m} = (b_{ij})$, то через сумму $A + B$ обозначим матрицу того же размера, в которой на месте (i, j) стоит сумма $a_{ij} + b_{ij}$ соответствующих элементов слагаемых. Кроме того, $\lambda A_{n\times m} = (\lambda a_{ij})$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.2. Пусть $A, B, C \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ и λ, ν – числа. Тогда справедливы следующие 8 аксиом векторного пространства:

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) если 0 – нулевая матрица (все ее коэффициенты равны нулю), то $A + 0 = A$ для любой матрицы A;
4) для любой матрицы A существует такая матрица $-A$, что $A + (-A) = 0$;
5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
6) $(\lambda + \nu)A = \lambda A + \nu A$;
7) $(\lambda\nu)A = \lambda(\nu A)$;
8) $1A = A$.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение. Если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$. Остальные утверждения доказываются аналогично. □

Определение 1.3. Пусть заданы две матрицы

$$A_{n\times m} = (a_{ij}), \quad C_{m\times k} = (c_{st}).$$

Тогда их произведение $D = AC \in \mathrm{Mat}(n \times k)$ определяется как матрица, в которой на месте (i, j) стоит элемент

$$d_{is} = a_{i1}c_{1s} + \dots + a_{im}c_{ms} \tag{5}$$

для всех $i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, k$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

С помощью матричного умножения удобно в компактной форме записывать системы линейных уравнений. Именно, система (1) имеет вид $AX = b$, где A – матрица (2) системы (1),

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

– соответственно, столбцы, составленные из неизвестных и из свободных членов.

Предложение 1.3. Умножение матриц ассоциативно, т. е. $(AC)F = A(CF)$ для любых матриц

$$A \in \mathrm{Mat}(n \times m), \quad C \in \mathrm{Mat}(m \times k), \quad F \in \mathrm{Mat}(k \times l).$$

Доказательство. Пусть

$$A = A_{n\times m} = (a_{ij}), \quad C = C_{m\times k} = (c_{st}), \quad F = F_{k\times l} = (f_{tq}).$$

Если D из определения 1.3, то по (5) на месте (i, q) в матрице $(AC)F = DF$ стоит элемент

$$\sum_{\alpha=1}^{k} d_{i,\alpha} f_{\alpha,q} = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i,\beta} c_{\beta,\alpha} f_{\alpha,q}. \tag{6}$$

С другой стороны, если $CF = U = (u_{\beta,q}) \in \mathrm{Mat}(m \times l)$, то на месте (i, q) в матрице $A(CF) = AU$ стоит элемент

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{i,\beta} u_{\beta,q} = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i,\beta} c_{\beta,\alpha} f_{\alpha,q}. \tag{7}$$

Из (6), (7) вытекает утверждение. □

Предложение 1.4. Справедливы равенства:

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

2) $A(B+C) = AB + AC, \quad (A+U)V = AV + UV$.

Доказательство. Докажем, например, второе утверждение. Пусть $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$. Тогда на месте (i,j) в матрице $A(B+C)$ стоит элемент $\sum a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum a_{ik}b_{kj} + \sum a_{ik}c_{kj}$, который равен элементу, стоящему на то же месте в матрице $AB + AC$. Так как размеры матриц $A(B+C)$ и $AB+AC$ совпадают, то они равны. Аналогично проверяются остальные утверждения. □

Следом $\mathrm{tr}(A)$ матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n) = \mathrm{Mat}(n \times u)$ называется сумма $a_{11} + \dots + a_{nn}$ ее элементов, стоящих на главной диагонали.

Предложение 1.5. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}(n)$. Тогда

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Тогда на месте (i,i) в матрице AB стоит $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$, откуда $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ji}$. Аналогично,

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{s,t=1}^n b_{st}a_{ts} = \sum_{s,t=1}^n a_{ts}b_{st} = \mathrm{tr}(AB).$$

□

Символ Кронекера δ_{ij} равен 1, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$. *Единичная* матрица $E = E_n \in \mathrm{Mat}(n)$ – это матрица, в которой на месте (i,j) стоит символ Кронекера δ_{ij}.

Предложение 1.6. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$. Тогда $E_nA = A = AE_m$.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$. Тогда на месте (i,j) в матрице E_nA стоит $\sum_{k=1}^n \delta_{ik}a_{kj} = \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, т. е. $E_nA = A$. □

Транспонированной матрицей ${}^tA = A^* \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ для матрицы $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ называется матрица, в которой на месте (i,j) стоит элемент a_{ji} матрицы A.

Предложение 1.7. Справедливы следующие равенства:

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA, \quad {}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA.$$

Доказательство. Докажем, например, последнее утверждение. В матрице ${}^t(AC)$ на месте (i,j) стоит

$$\sum_k a_{jk}c_{ki} = \sum_k c_{ki}a_{jk},$$

т. е. элемент, стоящей на том же месте в матрице ${}^tC{}^tA$.

Аналогично доказываются остальные утверждения. $\square$

Матричной единицей $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ называется матрица E_{ij}, в которых на месте (s,t) стоит элемент $\delta_{si}\delta_{tj}$. Другими словами в E_{ij} на месте (i,j) стоит 1, и все остальные элементы равны 0.

Упражнение 1.2. Доказать, что ${}^tE_{ij} = E_{ji}$ и если $A = (a_{ij})$, то $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$.

Предложение 1.8. $E_{ij}E_{rs} = \delta_{jr}E_{is}$.

Доказательство. На месте (u,v) в $E_{ij}E_{rs}$ стоит элемент

$$\sum_p (\delta_{ui}\delta_{pj})(\delta_{pi}\delta_{vs}) = \begin{cases} 1, & u = i = p = j,\ v = s; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда вытекает утверждение. $\square$

Следствие 1.1. Пусть $A = (a_{rs}) \in \mathrm{Mat}(n \times m)$. Тогда

$$E_{ij}A = a_{j1}E_{i1} + \cdots + a_{jm}E_{im},$$
$$AE_{ij} = a_{1i}E_{1j} + \cdots + a_{nj}E_{ni}.$$

Теорема 1.3. Чтобы в матрице $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на α нужно рассмотреть матрицу $(E_n + \alpha E_{ij})A$.

Доказательство. В силу предложений 1.4, 1.6, 1.8, а также следствия 1.1 получаем

$$\begin{aligned}(E_n + \alpha E_{ij})A &= E_nA + \alpha E_{ij}A = A + \alpha(a_{j1}E_{i1} + \cdots + a_{jm}E_{im}) \\ &= \sum_{rs} a_{rs}E_{rs} + (\alpha a_{j1})E_{i1} + \cdots + (\alpha a_{jm})E_{im} \\ &= \sum_{r \neq i,s} a_{rs}E_{rs} + \sum_{i,s}(a_{is} + \alpha a_{js})E_{is}.\end{aligned}$$

$\square$

Следствие 1.2. Чтобы в матрице $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ к i-ому столбцу прибавить j-ый, умноженный на α нужно рассмотреть матрицу $A(E_m + \alpha E_{ji})$.

Обозначим через $D_i(\alpha) = E_n + (\alpha - 1)E_{ii} \in \mathrm{Mat}(n)$ диагональную матрицу, в которой i-ый диагональный элемента равен α, а остальные диагональные элементы равны 1.

Теорема 1.4. Пусть задана матрица $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$. Тогда матрица $D_i(\alpha)A$ получается из A умножением i-ой строки на α. Матрица $AD_i(\alpha)$ получается из A умножением i-го столбца на α.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$. В матрице $D_i(\alpha)$ на месте (s,t) стоит $\delta_{st} + (\alpha - 1)\delta_{is}\delta_{it}$. Поэтому в матрице $D_i(\alpha)A$ на месте (p,q) стоит

$$\sum_r (\delta_{pr} + (\alpha - 1)\delta_{ip}\delta_{ir})a_{rq} = \sum_r \delta_{pr}a_{rq} + (\alpha - 1)\sum_r \delta_{ip}\delta_{ir}a_{rq} =$$

$$a_{pq} + (\alpha - 1)\delta_{ip}a_{iq} = \begin{cases} a_{pq}, & i \neq p; \\ \alpha a_{iq}, & p = i. \end{cases}$$

$\square$

Элементарными матрицами называются квадратные матрицы вида $E_n + \alpha E_{ij}$ при $i \neq j$ и вида $D_i(\beta)$ при $\beta \neq 0$. Таким образом, в теоремах 1.3 и 1.4 доказано, что каждое элементарное преобразование строк или столбцов матрицы эквивалентно умножению этой матрицы на соответствующую элементарную матрицу слева или справа.

Глава 2

Перестановки и их знаки

В ряде важных случаев решение систем линейных уравнений можно вычислять с помощью определителей. Для изучения определителей нам потребуется ряд утверждений о знаках перестановок.

Перестановкой степени n называется упорядоченный набор

$$\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \tag{8}$$

чисел $(1, 2, \ldots, n)$. Через S_n обозначается множество всех перестановок степени n.

Предложение 2.1. Число всех перестановок равно $n!$

Доказательство. Пересчитаем все перестановки из (8). Число i_1 принимает произвольные n значений. Если i_1 фиксировано, то i_2 принимает любое значение, отличное от i_1. Поэтому i_2 принимает $n-1$ значение и т. д. □

Инверсией в перестановке (8) называется пара i_s, i_t, что $s < t$ и $i_s > i_t$. *Знаком* $(-1)^\sigma$ перестановки называется число $(-1)^M$, где M – число инверсий в последовательности. Подстановка *четна* (*нечетна*), если ее знак +1 (-1).

Например, в перестановке (2, 1, 4, 3, 5) инверсии образуют две пары

$$(2, 1), \quad (4, 3).$$

Поэтому эта перестановка четная.

Транспозицией называется перестановка двух элементов перестановки.

Теорема 2.1. Транспозиция меняет знак перестановки.

Доказательство. Пусть задана перестановка

$$\sigma = (i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_r, \ldots, i_n) \in S_n.$$

Сравним число инверсий этой перестановки и перестановки

$$\tau = (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_r, i_{k+1}, \ldots, i_{r-1}, i_k, i_{r+1}, \ldots, i_n).$$

Предположим сначала, что $k = r - 1$. В этом случае взаимное расположение любой пары (i_d, i_m), отличной от пары (i_k, i_r) в σ и τ одинаково и потому они дают одинаковый вклад в подсчет общего числа инверсий. Из пар (i_k, i_r), (i_r, i_k) одна дает инверсию, а другая нет. Отсюда вытекает утверждение.

Пусть $k < r - 1$. Тогда переставляя i_k последовательно с элементами $i_{k+1}, \ldots, i_{r-1}, i_r$ мы будем менять знак $r - k$ раз. Затем элемент i_r будем последовательно переставлять с $i_{r-1}, \ldots$, i_{k+1}. При этом получим перестановку τ изменив знак ещё $r - k - 1$ раз. Таким образом, при переходе от σ к τ мы меняли знак $(r-k) + (r-k-1) = 2(r-k) - 1$ раз. □

Следствие 2.1. Число всех четных перестановок степени $n \leqslant 2$ равно числу нечетных и равно $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Поменяем местами во всех перестановках (8) первые два индекса i_1, i_2. По теореме каждая четная перестановка становится четной и наоборот, причем разные перестановки переходят в разные. Поэтому число четных перестановок не больше числа четных и наоборот. Следовательно, число тех и других совпадает и равно $\frac{n!}{2}$. □

Следствие 2.2. Рассмотрим две матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

строки которой являются перестановками степени n. Переставляя столбцы этой матрицы, приведем первую из них во вторую. Тогда знаки перестановок

$$(i_1, \ldots, i_n), \quad (j_1, \ldots, j_n)$$

совпадают.

Доказательство. В силу теоремы 2.1 при любой перестановке столбцов произведение знаков перестановок верхней и нижней строк не меняется. При этом в начальной перестановке чётна первая строка, в последней — нижняя строка. Следовательно, указанное постоянное произведение равно, с одной стороны, знаку перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$, а, с другой стороны, — знаку перестановки $(j_1, \ldots, j_n)$. □

Теорема 2.1 дает новый способ вычисления четности перестановки. С помощью транспозиций преобразуем заданную перестановку в перестановку $(1, 2, \ldots, n)$, не имеющую инверсий. Например, в $(2, 1, 4, 3, 5)$ переместим 1 на первое место, переставляя 1 и 2. Получим перестановку $(1, 2, 4, 3, 5)$. Затем поместим 3 на свое место переставляя ее с 4. В результате получаем четную перестановку $(1, 2, 3, 4, 5)$. Так как мы два раза меняли знак, то исходная перестановка четная.

Глава 3
Определители, обратная матрица

В этой главе мы рассматриваем теорию определителей и ее приложения для вычисления обратных матриц и нахождения решения систем линейных уравнений.

1. Определители

Определителем $\det A = |A|$ квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

называется число

$$\det A = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{(i_1,\ldots,i_n)} a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}. \tag{10}$$

Теорема 3.1. Пусть $A = (a_{ij})$ – верхнетреугольная матрица, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Тогда $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Доказательство. В матрице A элемент $a_{ij} = 0$, если $i > j$. Таким образом, если в определителе $\det A$ произведение

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{(i_1,\ldots,i_n)} a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}$$

отлично от нуля, то $1 \leqslant i_1$, $2 \leqslant i_2, \ldots, n \leqslant i_n$. Учитывая, что индексы $i_1, \ldots, i_n$ различны, получаем $n = i_n, i_{n-1} = n-1, \ldots, i_1 = 1$. □

Теорема 3.2 (Простейшие свойства определителя). Если одна из строк A является линейно комбинацией двух строк, то $\det A$ является линейной комбинацией определителей соответствующих матриц.