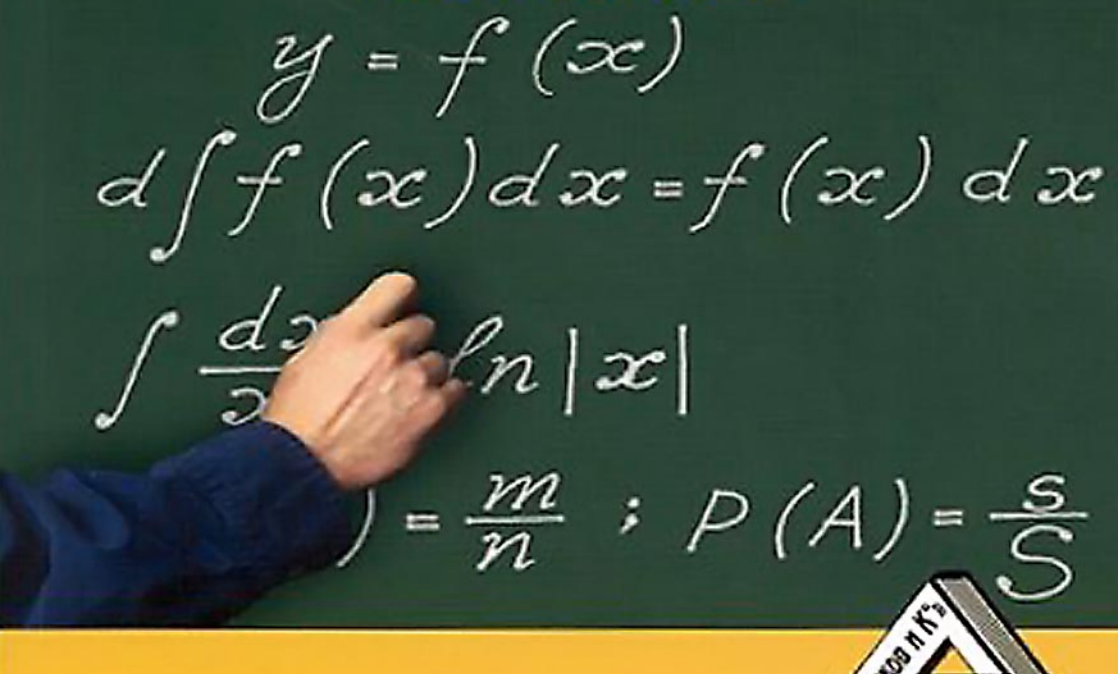
А. С. Шапкин, В. А. Шапкин

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



УДК 517(075.8)
ББК 22.11
Ш23

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В. Д. Кулиев — доктор физико-математических наук, профессор;
Б. А. Лагоша — доктор экономических наук, профессор.

Шапкин А. С.

Ш23 Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: Учебное пособие для бакалавров / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 9-е изд., стер. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2020. — 432 с.

ISBN 978-5-394-03710-8

Материал охватывает вопросы программы курса высшей математики: общий курс, теория вероятностей и математическая статистика, математическое программирование.

Пособие является руководством к решению задач по основам высшей математики и содержит задачи для контрольных работ.

Перед каждым параграфом дан необходимый справочный материал. Все задачи приводятся с подробными решениями. В конце разделов даны решения типовых задач контрольных работ. Отдельные задачи иллюстрированы соответствующими рисунками.

Для студентов вузов инженерно-экономических направлений подготовки.

ISBN 978-5-394-03710-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Линейная алгебра

Рассмотрим решение системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Постановка задачи: дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Требуется найти совокупность n значений $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ таких, которые бы отождествляли одновременно все уравнения системы. Такая совокупность значений называется решением системы.

Рассмотрим решение системы (1.1) тремя способами: матричным способом, по формулам Крамера и методом исключения неизвестных — методом Гаусса.

1.1.1. Матричный способ

Определение. Матрицей вида $m \cdot n$ называется таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), образующие матрицу, называются ее элементами.

Обознаются матрицы буквами A, B, C, … или (a_{ij}), (b_{kl}), (c_{pq}), … .

Матрицы вида $n \cdot n$ (число строк равно числу столбцов) называются квадратными n-го порядка. В частности, квадратная матрица n-го порядка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной и обозначается буквой E. Для нее $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $a_{ij} = 1$, если $i = j$.

Матрицы вида:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

называются матрицами-строками, а матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

— матрицами-столбцами.

Определение. Произведением матрицы (1.2) на число λ называется матрица $(\lambda\, a_{ij})$.

Чтобы умножить матрицу на число λ, надо умножить каждый ее элемент на это число.

Наиболее важным является следующее определение.

Определение. Произведением матрицы A (1.2) на матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}, \dots, a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}, \dots, a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1}, \dots, a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 4 & 2(-2)+1\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+(-3)\cdot 4 & 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 1 & 0\cdot 3+(-3)\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -12 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц имеет смысл только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Определение. Если в матрице A переставить местами строки и столбцы: 1-й столбец заменить 1-й строкой, 2-й столбец — 2-й строкой и т.д., то полученная в результате матрица называется транспонированной по отношению к матрице A и обозначается $A^{\text{т}}$.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение. Определителем квадратной матрицы (a_{ij}) n-го порядка, который обозначается $|a_{ij}|$, $\det A$ или Δ называется число, вычисляемое по формуле

$$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.3}$$

или

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}\ , \tag{1.4}$$

где M_{ij} — определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Таким образом, вычисление определителя матрицы n-го порядка сводится к вычислению определителей матриц (n – 1)-го порядка, которые, в свою очередь, выражаются через определители матриц (n – 2)-го порядка и т.д., до определителей матриц 2-го порядка, которые вычисляются по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, для матриц 3-го порядка формула (1.3) при i = 1 принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

по которой и вычисляют определители матриц 3-го порядка. Можно конечно пользоваться и другими формулами, получающимися из (1.3) при i = 2, 3 или (1.4), но окончательный ответ будет один и тот же.

Определение. Определитель матрицы (1.5), обозначаемый M_{ij} называется дополнительным минором элемента a_{ij} (стоящего в пересечении вычеркиваемой строки и столбца), а число $(-1)^{i+j}M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначается A_{ij}, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \tag{1.6}$$

Формула (1.3) называется формулой разложения определителя по i-ой строке, а формула (1.4) — разложением по j-ому столбцу. Учитывая (1.6), формулы (1.3, 1.4) для краткости записывают в виде

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

или

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Пример 1.1. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (2+4) + 1 \cdot (3-2) + 1 \cdot (-6-2) = 12 + 1 - 8 = 5.$$

Рассмотрим понятие обратной матрицы.

Определение. Пусть дана матрица A n-го порядка. Если ее произведение на некоторую матрицу B n-го порядка равно единичной матрице E, т.е. $A \cdot B = E$ или $B \cdot A = E$, то матрицу B называют обратной к матрице A и обозначают A^{-1}.

Можно доказать, что если $A \cdot A^{-1} = E$, то $A^{-1} \cdot A = E$, т.е. взаимно обратные матрицы перестановочны.

Теорема 1. Каждая квадратная матрица A, определитель которой $\Delta \neq 0$, имеет единственную обратную матрицу $A^{-1} = B$, элементы которой b_{ij} находятся по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta}.$$

Из теоремы вытекает **правило:** чтобы найти обратную матрицу к матрице (1.2), где $m = n$, надо сделать следующие преобразования:

1. Вычислить определитель Δ матрицы A ($\Delta \neq 0$).
2. Каждый элемент матрицы A заменить его алгебраическим дополнением, т.е. составить матрицу (A_{ij}).
3. Транспонировать матрицу (A_{ij}), т.е. записать матрицу (A_{ji}).
4. Матрицу (A_{ji}) умножить на $\frac{1}{\Delta}$.

В результате получим матрицу A^{-1}.

Пример 1.2. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель данной матрицы (вычислен в предыдущем примере и равен 5). Т.к. $\Delta = 5 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Составляем матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу, т.е. переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Умножая на $\frac{1}{5}$, получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Проверка.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12+1-8 & -2-1+3 & -8+1+7 \\ 18-2-16 & -3+2+6 & -12-2+14 \\ 6+2-8 & -1-2+3 & -4+2+7 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возвращаемся к системе (1.1).

Матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных, т.е. матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется матрицей системы, а матрица-столбец, составленная из величин $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

называется столбцом свободных членов.

Составим еще матрицу-столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1.1) в матричной форме примет вид

$$A \cdot X = B. \tag{1.8}$$

Если $\det A \neq 0$, то умножая (1.8) на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{1.9}$$

На этой формуле основан матричный способ решения систем линейных уравнений.

Пример 1.3. Решить матричным способом систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2. \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Для данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулой (1.9), надо найти матрицу, обратную к матрице A. В примере показано, что матрица A^{-1} имеет вид (1.7). Подставляя в (1.9), имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12+2-4}{5} \\ \frac{-2-2-1}{5} \\ \frac{-16-6+7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = -3$.

1.1.2. Формулы Крамера

Составим главный определитель системы (1.1), т.е. определитель из коэффициентов при неизвестных в данной системе.

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и n вспомогательных определителей

$$\Delta(x_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta(x_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots,$$

$$\Delta(x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Эти определители составляются путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (1.1) находится по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta(x_1)}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta(x_2)}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta(x_n)}{\Delta}.$$

Пример 1.4. Решить систему.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 13 - 1 \cdot (-23) - 2 \cdot 2 = 39 + 23 - 4 = 58 \neq 0.$$

$$\Delta(x_1)=\begin{vmatrix}6 & 1 & -2\\ -4 & -3 & 2\\ -2 & -2 & -3\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot 13-1\cdot 16-2\cdot 2=78-16-4=58.$$

$$\Delta(x_2)=\begin{vmatrix}3 & 6 & -2\\ 5 & -4 & 2\\ 4 & -2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot 16-6\cdot(-23)-2\cdot 6=48+138-12=174.$$

$$\Delta(x_3)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 6\\ 5 & -3 & -4\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-3 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & -2\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-2)-1\cdot 6+6\cdot 2=-6-6+12=0.$$

$$x_1=\frac{\Delta(x_1)}{\Delta}=\frac{58}{58}=1;\;\; x_2=\frac{\Delta(x_2)}{\Delta}=\frac{174}{58}=3;\;\; x_3=\frac{\Delta(x_3)}{\Delta}=\frac{0}{58}=0.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$.

1.1.3. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса)

Основная его идея состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, где одно из уравнений системы содержит все неизвестные, второе — на одно неизвестное меньше, и т.д., последнее уравнение — лишь одно из неизвестных. Покажем это на примере.

Пример 1.5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+13x_3=0,\\ 3x_1+14x_2+12x_3=18,\\ 5x_1+25x_2+16x_3=39.\end{cases}$$

Решение. Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее неизвестное — x_1; первым ведущим элементом будет $a_{11} = 2$. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму уравнению ведущее, умноженное на — $\frac{3}{2}$, а к третьему — ведущее, умноженное на — $\frac{5}{2}$. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ \frac{15}{2}x_2 - \frac{33}{2}x_3 = 39. \end{cases}$$

Первый шаг закончен. Второе и третье уравнения образуют первую подсистему. За второе ведущее уравнение примем второе уравнение системы, а за второе ведущее неизвестное — x_2; вторым ведущим элементом будет $\frac{7}{2}$. Исключим x_2 из третьего уравнения. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Второй шаг закончен. Вторая подсистема состоит из одного третьего уравнения. Прямой ход метода Гаусса закончен. Обратным ходом получаем:

$$x_3 = -1,$$

$$x_2 = \frac{2}{7}\left(18 + \frac{15}{2}x_3\right) = \frac{2}{7}\left[18 + \frac{15}{2}(-1)\right] = 3,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(7x_2 + 13x_3) = -\frac{1}{2}[7 \cdot 3 + 13(-1)] = -4.$$

Итак, решение данной системы будет: $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Пример 1.6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему по методу Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \\ -\dfrac{15}{2}x_2 + 3x_3 = -19, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \\ 0 = -26. \end{cases}$$

Уравнение $0 = -26$ не имеет смысла, следовательно, данная система несовместна.

Замечание. Несовместность данной системы можно усмотреть уже после первого шага: в полученной системе левые части второго и третьего уравнений отличаются только знаком, тогда как правые части одинаковы по знаку и различны по модулю.

Пример 1.7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 27. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему по методу Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \\ -\dfrac{15}{2}x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

После второго шага из трех уравнений осталось два, так как третье уравнение приняло вид 0 = 0 и удалено из системы. В данном случае ранг системы $r = 2$, а число неизвестных $n = 3$, т.е. $r < n$. Из трех уравнений исходной системы только два независимых ($m = 3$, $r < m$). В первой подсистеме два уравнения, вторая подсистема отсутствует. Прямой ход метода Гаусса закончен. Исключая теперь с помощью второго уравнения x_2 из первого уравнения, приведем систему к виду

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = \dfrac{38}{3}, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \end{cases}$$

откуда легко находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{3} + x_3, \\ x_2 = -\dfrac{14}{15} + \dfrac{2}{5}x_3. \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3 — свободное. Придавая неизвестному x_3 произвольные числовые значения, можно получить множество частных решений:

$$x_1 = \frac{19}{3}, \quad x_2 = -\frac{14}{15}, \quad x_3 = 0;$$

$$x_1 = \frac{22}{3}, \quad x_2 = -\frac{8}{15}, \quad x_3 = 1 \text{ и т.д.}$$

1.1.4. Теорема Кронекера — Капелли

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений, содержащую m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.10}$$

Составим матрицу системы A и расширенную матрицу $\overline{A}$, полученную присоединением к A столбца из свободных членов b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Матрице A соответствует система из m векторов

$$\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots,\ a_{im})\ (i = 1, 2, \ldots,\ m \text{ или } i = \overline{1,m}). \qquad (1.12)$$

Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$ линейно зависимы, или, что тоже самое, образуют линейно зависимую систему, если один из них линейно выражается через другие.

Пример 1.8. Система $\overline{a}_1$ = (1,2), $\overline{a}_2$ = (–2,1), $\overline{a}_3$ = (0,5) линейно зависима, так как $\overline{a}_3 = 2\overline{a}_1 + \overline{a}_2$.

Из системы векторов (1.12) выделим подсистему

$$\overline{a}_{i_1},\ \overline{a}_{i_2}, \ldots,\ \overline{a}_{i_k}, \qquad (1.13)$$

где i_1, i_2, …, i_k — какие-то k чисел из набора $\overline{1,m}$.

Будем говорить, что подсистема (1.13) является максимальной линейно независимой подсистемой или базисом системы (1.12), если векторы (1.13) линейно независимы, а любой другой вектор системы является их линейной комбинацией.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе системы.

Пример 1.9. В системе

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= (0,\ -1,\ \ 2{,}1), \\ \overline{a}_2 &= (3,\ \ \ 1, -1{,}0), \\ \overline{a}_3 &= (-6, -2,\ \ 2{,}0), \end{aligned}$$

векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ образуют базис, так как их коэффициенты непропорциональны. Вектор $\overline{a}_3 = 0 \cdot \overline{a}_1 - 2\overline{a}_2$ является линейной комбинацией $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Отметим также, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_3$ образуют базис.

Так как система векторов (1.12) образована из матрицы A, то можно говорить о ранге матрицы A, который совпадает с рангом системы (1.12).

Для определения ранга системы существуют различные методы. Мы будем определять ранг матрицы A как максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля.

Пример 1.10. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выделяем 1-ю, 2-ю строки, а также 2-й и 3-й столбцы, получаем минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Вообще, в матрице A имеется $3 \cdot 6 = 18$ миноров 2-го порядка.

Миноры 3-го порядка (их три) равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг исходной матрицы равен двум.

Правило вычисления ранга матрицы:

при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков;

если уже найден минор k-го порядка, определитель которого отличен от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k + 1)$-го порядка, окаймляющие минор k-го порядка, если все они равны нулю, то ранг матрицы r равен k.

Пример 1.11. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минор 2-го порядка $d_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Минор 3-го порядка, окаймляющий его

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Оба минора 4-го порядка, окаймляющие минор d_3, равны 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы A $r = 3$.

Возвращаемся к системе (1.10). Вопрос о совместности системы линейных уравнений полностью решается теоремой Кронекера— Капелли: система линейных уравнений (1.10) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен рангу матрицы A.

Пример 1.12. Решить систему

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Составляем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad d_3^1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad d_3^2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. ранг матрицы A равен 2.

Для расширенной матрицы

$$d_3^3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0,$$

а это означает, что ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен 3.

По теореме Кронекера — Капелли следует, что система несовместна.

Пример 1.13. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Составляем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минор $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, а все остальные миноры 3-го порядка его окаймляющие, как для матрицы A так и для $\overline{A}$, равны нулю. Так как ранг матрицы системы A и ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ совпадают и равны двум, то система совместна. Так как мы взяли минор 2-го порядка, состоящий из коэффициентов при x_1 и x_2 в 1-м и 3-м уравнениях, то эти неизвестные оставляем в левой части, а неизвестные x_3, x_4 и x_5 считаем свободными (как бы известными) и переносим их в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ x_1 + 5x_2 = 9x_3 + 8x_4 - x_5. \end{cases}$$

Решая эту систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2, найдем общее решение системы в виде:

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Подстановка этих значений в уравнения системы вместо x_1 и x_2 дает тождества.

Давая свободным переменным x_3, x_4 и x_5 произвольные числовые значения, мы получим множество решений исходной системы. Так решениями нашей системы будут, например, векторы

$\overline{a}_1 = (2, 5, 3, 0, 0)$, $\overline{a}_2 = (3, 5, 2, 1, -2)$, $\overline{a}_3 = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$ и т.д.

1.2. Элементы векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ (рис. 1).

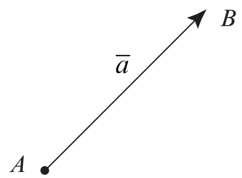


Рис. 1

Вектор обозначается указанием его начала (т. A) и его конца (т. B), записывается $\overline{AB}$ или одной буквой, например $\overline{a}$.

Векторы называются равными, если они имеют одинаковые длины (модули), лежат на параллельных прямых или на одной прямой и направлены в одну сторону.

Если известны координаты точек A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2), то координаты вектора $\overline{AB} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ определяются по формулам

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1. \tag{1.14}$$

Координаты вектора являются его проекциями на координатные оси, поэтому вектор $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ может быть представлен в виде:

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}, \tag{1.15}$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением осей OX, OY, OZ соответственно.

Модуль вектора обозначается $\left|\overline{a}\right|$ и определяется по формуле

$$\overline{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{1.16}$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы их разложениями по ортам (единичным векторам) (1.14), то их сумма и разность определяются по формулам

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x)\cdot\overline{i} + (a_y \pm b_y)\cdot\overline{j} + (a_z \pm b_z)\cdot\overline{k} =$$
$$= \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\}. \tag{1.17}$$

Напомним, что сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Разность $\overline{a} - \overline{b}$ этих векторов изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, причем этот вектор направлен из конца $\overline{b}$ (вычитаемого) в конец $\overline{a}$ (уменьшаемого) (рис. 2).

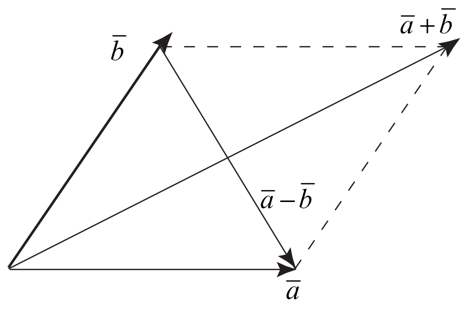


Рис. 2

Определение. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.

Условием коллинеарности двух векторов $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ является пропорциональность их координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{1.18}$$

Произведением вектора $\overline{a}$ на скалярный множитель m является вектор, координаты которого определяются следующим образом:

$$m\overline{a} = ma_x \cdot \overline{i} + ma_y \cdot \overline{j} + ma_z \cdot \overline{k} = \{ma_x;\ ma_y;\ ma_z\}.$$

Векторы $\overline{a}$ и $m\overline{a}$ параллельны (коллинеарны) и направлены в одну сторону, если $m > 0$, и в противоположные стороны, если $m < 0$.

Вектор $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ называют единичным вектором вектора $\overline{a}$. Если вектор $\overline{a}$ составляет угол α с осью OX, угол β с осью OY и угол γ с осью OZ (рис. 3), то его единичный вектор $\overline{a}_0 = \{\cos\alpha;$ $\cos\beta;\ \cos\gamma\}$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — называют направляющими косинусами вектора.

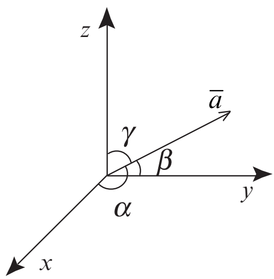


Рис. 3

Пусть вектор $\overline{a}$ составляет угол φ с осью u. Тогда проекция вектора на эту ось определяется формулой

$$np_{\overline{u}}\,\overline{a} = |\,\overline{a}\,| \cdot \cos\varphi\ .$$

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно выразить также формулой

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\,\overline{b} \qquad \text{или} \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\,\overline{a}. \tag{1.19}$$