



В. И. Тимошпольский, Ю. А. Самойлович,
Е. И. Марукович, И. А. Трусова

ТЕПЛОФИЗИКА НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА

УДК 669.18:538.911

Теплофизика непрерывного слитка / В. И. Тимошпольский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Маруковича. – Минск : Беларуская навука, 2020. – 479 с. – ISBN 978-985-08-2608-4.

Представленные авторским коллективом материалы включает три основных раздела: методы математического моделирования режимов затвердевания и охлаждения и применение для решения задач широкой гаммы численных методов; тепловой анализ и обобщение аналитической тепловой теории литья, основанной на фундаментальных работах ученых; обобщение многочисленных исследований теории термических напряжений в твердой оболочке слитка. При этом многие задачи из теории термических напряжений впервые решены авторами.

Отличительной особенностью материалов, обобщенных в монографии, является демонстрация многочисленных примеров, что безусловно делает ее более доступной с точки зрения понимания многообразных задач современной теплофизики формирования слитков и отливок.

Предназначена для ученых и специалистов в области теории и технологии непрерывной разливки, а также аспирантов и магистрантов, совершенствующих свои знания в этом сложном и исключительно важном вопросе.

Табл. 46. Ил. 185. Библиогр.: 297 назв.

А в т о р ы:

В. И. Тимошпольский, Ю. А. Самойлович,
Е. И. Марукович, И. А. Трусова

Р е ц е н з е н т ы:

академик НАН Беларуси П. А. Витязь,
чл-корр. НАН Беларуси Ю. М. Плескачевский

ISBN 978-985-08-2608-4

© Институт технологии металлов
НАН Беларуси, 2020
© Оформление. РУП «Издательский
дом «Беларуская навука», 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

При подготовке монографии нами на начальной стадии предполагалось уделить пристальное внимание теплофизическим процессам стального слитка, отливаемого в форму (изложницу) и разливаемого непрерывным методом. И чем больше мы углублялись в анализ и обобщение исходного материала, тем все более удалялись от самой проблематики теплофизических явлений в слитке.

Теплофизическими процессами при формировании слитка (отливок) занимался ряд выдающихся ученых-теоретиков. Да и авторы не стояли в стороне от обозначенной проблемы. Достаточно немного углубиться и в некоторой степени отойти на 20–30 лет назад, может еще на несколько десятилетий, чтобы стали совсем очевидными обстоятельства сложившейся проблематики. Необходимо отметить, что вопросу решения уравнений математической физики – теплофизической задаче на протяжении более как минимум последних 100 лет уделялось пристальное внимание. Ученые, математики, физики, специалисты сходились во мнении, что именно само уравнение математической физики при соответствующих ограничениях и есть ключ к анализу многообразных фундаментальных задач теории теплообмена, которые, безусловно, будут способствовать получению многочисленных ответов в прикладных сферах мировой науки: металлургии, химических технологиях, в добывающих отраслях, будут также содействовать развитию науки о новых материалах и, самое существенное, будут также оказывать поддержку при создании высокоэффективных тепловых агрегатов и машин.

Выполнив многочисленный анализ современных литературных источников, включающих в первую очередь фундаментальные исследования в области теплофизических явлений, авторы выделяют фундаментальный труд выдающегося математика XX в. В. А. Стеклова [1, 2]. Утверждаем, что многочисленные решения В. А. Стеклова весьма актуальны и применимы и сегодня. Мы полагаем также, что в этой сфере мировой науки российские и советские ученые всегда являлись законодателями мод и внесли выдающийся вклад в это направление мировой науки.

Далее, как бы продолжая направление, затронутое В. А. Стекловым в начале XX в., в 1947 г. в СССР вышла в свет монография одного из наиболее

выдающихся теплофизиков начала–середины XX в. Х. С. Карслоу (Великобритания) [3]. В предисловии к ней А. С. Предводителей высказал собственные соображения относительно ее содержания. Так, в частности, рецензентом отмечается, что «... не затронуты и такие вопросы, как распространение тепла в *неоднородных системах* – плавление и застывание, ... , термоупругость и т. д. Все эти вопросы должны быть освещены особо. Поэтому необходимо дополнить книгу Карслоу изданием еще одного тома...».

Таким образом, впервые были даны рекомендации о необходимости издания монографии, где детально будут рассмотрены сложные задачи с подвижными границами, включающие обязательные расчеты температур и термических напряжений. Следует отметить, что фактического прорыва в этом направлении пришлось ожидать более десяти лет, когда в свет вышли знаковые монографии двух крупнейших ученых-теплофизиков XX ст. – А. В. Лыкова и А. И. Вейника [4–6]. При этом в первой монографии ее автором указывается, что «каждое решение сопровождается анализом с целью вскрытия физической сущности процессов...». Здесь очевидно, что А. В. Лыков воспользовался рядом решений А. И. Вейника для меняющегося физически состояния исследуемого объекта. В частности, ученым отмечено, что решения задач подобного класса «...имеет большое практическое значение в металлургии...».

Но вместе с этим во второй монографии [7] с одноименным названием автор не привнес ничего нового, оригинального в этот раздел и по сути перенес полностью главу XI из [4] в монографию [7]. И это несмотря на то, что за истекшие 15 лет в СССР и в мире были опубликованы сотни статей, где фундаментальные разработки по этой тематике значительно продвинули эту область науки и фактически определили два наиважнейших направления: аналитическую теорию расчетов и методы математического моделирования, базирующиеся на численных методах построения алгоритмов вычислений и применении ЭВМ. Тем не менее мы полагаем, что следует обратить внимание на существенные, по нашему мнению, обстоятельства. Безусловно, А. И. Вейник значительно продвинул теоретически данную сферу научных исследований, основанных на решении ряда задач с подвижными границами. Здесь нет и не может быть никаких возражений. Вместе с тем выдающийся ученый доказал, что нет и не может быть единственного, обобщающего решения, из которого могут следовать частные случаи. И он впервые в металлургической теплофизике предложил общую классификацию многообразных условий затвердевания отливки и при этом для каждого условия затвердевания находятся собственные упрощенные решения. И далее определяются расчетные соотношения для вычислений температур в отливке и в форме в зависимости от их теплофизических характеристик. Через все свое творчество ученый пронесит идею о создании такого метода вычислений, чтобы даже вопреки практически абсолютной точности, простота итоговых расчетных соотношений для каждого конкретного случая была бы более эффективна, чем громоздкое сложное решение, даже если оно на 5–10 % точнее упрощенного решения. А. И. Вейник

это трактует своеобразно, однако с его аргументацией нельзя не согласиться. И прежде всего это связано с тем обстоятельством, что решение задачи теплопроводности является начальным этапом, как бы вспомогательным моментом для решения иных сложных задач металлургической теплофизики, например, при решении задач о термических напряжениях. И, безусловно, в каждом конкретном случае, когда решение задачи о температурном поле вводится в соответствующее уравнение термоупругости, целевая задача может быть неразрешима без соответствующих упрощений и применения вычислительных машин.

Мы утверждаем, что мнение А. И. Вейника небезосновательно и сегодня. Но учитывая то обстоятельство, что выдающийся ученый основную массу своих фундаментальных трудов создал в конце 50-х – начале 60-х гг. прошлого века и практически все его монографии многократно издавались за рубежом – это небольшое и единственное в некотором роде сомнительное высказывание ни в коей мере не умаляет его великих заслуг перед последующими поколениями ученых-теплофизиков. Метод А. И. Вейника – метод исключения переменных и его научные публикации сыграли колоссальную роль в эволюции всей металлургической теплофизики.

Впоследствии неординарные публикации А. И. Вейника дали импульс развития как строгим аналитическим, так и численным методам в рассматриваемой проблеме раздела науки – металлургической теплофизике. И здесь по нашему мнению сформулировалось два подхода, два, если можно так выразиться, направления. Первое направление – украинское, днепропетровское (Э. М. Гольдфарб, позднее Ю. С. Постольник) и российское, свердловское (Ю. А. Самойлович).

Следует отметить, что Э. М. Гольдфарб впервые в металлургической теплофизике решил ряд классических задач в так называемой объединенной постановке. Интуиция этого выдающегося ученого XX в. позволила значительно, на десятилетия, опередить время. Он фактически обобщил, математизировал металлургические процессы, перевел их на теплофизическую основу, рассмотрел десятки самых сложных нелинейных задач, решения этих задач значительно продвинули многогранную черную металлургию и именно благодаря в том числе этому выдающемуся ученому металлургическая теплофизика выделилась в самостоятельную область науки. В 1967 г. опубликована его монография [8], которая явила собой по сути первый и единственный обобщающий фундаментальный труд в области теплофизики металлургических процессов.

Развивая исследования, начатые Э. М. Гольдфарбом в 50-е годы, Ю. С. Постольник несколько позднее разработал собственный метод решения разнообразных классических и фундаментальных, в том числе нелинейных, задач металлургической теплофизики. Существенное отличие метода Ю. С. Постольника (метода эквивалентных источников) от метода Э. М. Гольдфарба (метода мгновенного регулярного режима) заключается, прежде всего, в том, что искомая функция формализуется в ходе решения исходного дифференциального уравнения и при этом в обязательном порядке рассматриваются два последо-

вательных этапа: инерционный и регулярный. В методе Э. М. Гольдфарба используется гипотеза мгновенного установления регулярного режима теплообмена, т. е. абсолютного равенства скоростей изменения температуры в разных точках прогретой зоны объекта в любом периоде времени.

Но вместе с тем опубликованные работы крупных теплофизиков-металлургов XX в. Г. П. Иванцова, Б. Я. Любова, А. И. Вейника, Э. М. Гольдфарба, Ю. А. Самойловича, Ю. С. Постоляника, безусловно, сыграли определяющую роль в создании нового научного направления в отечественной металлургической науке – металлургической теплофизики.

Тем не менее, если мы поставили своей целью все-таки максимально возможно обобщить публикации известных авторов, полагаем целесообразным выделить опорные точки при обобщении многочисленных работ в русло современной металлургической теплофизики.

Полагаем, что первыми в этом ряду стоят фундаментальные работы Ю. А. Самойловича, который, по нашему мнению, впервые применил разнообразные конечно-разностные методы при решении сложных задач формирования слитка (отливки) (см., например [9–13 и др.]) и, таким образом, в некотором смысле «застолбил» за собой, своими учениками, последователями концепцию при постановке и решении ряда наиболее сложных задач современной теории теплообмена: задач металлургической теплофизики, связанных с нахождением полей температур, скоростей и термических напряжений и далее при постановке и решении задач теории кристаллизации (объемной и последовательной), что безусловно является весомым вкладом в мировую науку о формировании слитка.

В дальнейшем на рубеже веков (XX–XXI вв.) выдающийся российско-советский ученый совместно с белорусскими коллегами опубликовал трехтомное издание «Стальной слиток» [14–16], которое в некоторой степени обобщило многие результаты отдельных авторов с мировыми именами и научных школ в области металлургической теплофизики.

Из чего исходили и чем руководствовались авторы, обозначив название монографии как «Теплофизика непрерывного слитка»? Прежде всего из эволюционного пути развития этого направления в теплофизике. А также из соображений того, что ученые, которые посвятили большую часть своего творческого пути этому направлению науки, являлись выдающимися теплофизиками прошлого столетия.

Безусловно, необходимо было еще раз вернуться к великому наследию А. И. Вейника, включив в аналитическую часть (раздел 2 монографии) его оригинальные размышления, решения ряда задач, и представить его взгляды на формирующуюся в 1950–1960 гг. тепловую (теплофизическую) теорию литейных процессов.

К нашему великому сожалению многие авторы, которые уделили и уделяют самое пристальное внимание теплофизическим основам теории затвердевания, не рассматривают публикации этого выдающегося ученого как фунда-

мент для сегодняшних, современных расчетных работ в одном направлении. Мы же своим подходом (п. 2.2), как нам кажется, восстановили справедливость значимости трудов А. И. Вейника.

Следует заметить, что наибольшее количество публикаций по исследуемой проблеме появилось в начале 1970-х годов и достигло своего апогея к концу 1980-х годов. Здесь несомненная заслуга принадлежит Э. М. Гольдфарбу, Н. И. Никитенко, Л. А. Коздобе, В. Т. Борисову, А. А. Скворцову, Е. М. Китаеву, Н. И. Яловому, Ю. С. Постольнику, Г. А. Анисовичу, Л. Шмрге, М. Я. Бровману, В. А. Ефимову, Л. А. Бровкину и др.

Велик вклад в решение этого класса прикладных задач Ю. А. Самойловича – последователя А. И. Вейника.

Соавторы монографии взяли на себя ответственность написать предисловие в связи с тем, что выдающийся теплофизик современности Юрий Абрамович Самойлович является соавтором монографии. Но мы полагаем, что именно его вклад в развитие теорий Г. П. Иванцова, А. И. Вейника, Б. Я. Любова, Э. М. Гольдфарба и других первопроходцев столь велик и многообразен, что не выделить его имя среди других представителей старшего поколения было бы несправедливо.

Данная монография является по сути первой системной работой, в которой последовательно изложены основные компоненты современной теплофизики непрерывного слитка.

Полагаем, что систематизированный и представленный здесь материал будет способствовать дальнейшему развитию этого значимого и важного направления не только применительно к теплофизическим основам формирования непрерывного слитка, но и металлургической науки в целом.

Непрерывная разливка стали – основной технологический элемент сталелитейных процессов. Наука о металлургии стали развивается и совершенствуется, проходя с новыми идеями и подходами сквозь века.

В 2019 г. в издательстве «Наукова думка» (Украина, Национальная академия наук) вышла в свет монография [17], в которой авторы уделили значительное внимание решению обратных теплофизических задач современной технологии непрерывной разливки. Здесь в большей степени рассматриваются методы «восстановления» температур при затвердевании и охлаждении непрерывного слитка с применением самых современных методов экспериментальных измерений промышленного слитка. А в следующей за ней нашей нынешней коллективной монографии впервые системно рассмотрены актуальные проблемы в теории непрерывного стального литья: многообразие численных методов при математическом моделировании, фундаментальные классические методы решения сложных нелинейных задач (методы Г. П. Иванцова, А. И. Вейника, Б. Я. Любова, М. Био, Э. М. Гольдфарба, Ю. С. Постольника и др.) и появившиеся возможности применения и развития модели о формировании термических напряжений в твердой области (корке) слитка и при эксплуатации МНЛЗ (опорные ролики) и др.

Полагаем также, что сюда же можно отнести и наши другие исследования по существу данного направления. Представленная монография по сути открывает новую страницу во всем многообразии стоящих в реальной действительности теоретических и прикладных задач современной технологии непрерывной разливки.

Авторы считают своей прямой обязанностью выразить искреннюю благодарность рецензентам монографии – крупным белорусским ученым в области материаловедения и механики за ценные рекомендации и замечания: Петру Александровичу Витязю – академику Национальной академии наук Беларуси, Заслуженному деятелю науки и техники БССР, лауреату Государственной премии БССР, доктору технических наук, профессору и Юрию Михайловичу Плескачевскому – члену-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси, Заслуженному деятелю науки Республики Беларусь, доктору технических наук, профессору. Работа над рекомендациями рецензентов позволила улучшить содержание нашей монографии.

Авторы распределили написание глав следующим образом:

Предисловие: Е. И. Марукович, В. И. Тимошпольский.

Глава 1: В. И. Тимошпольский, Ю. А. Самойлович.

Глава 2: Е. И. Марукович, И. А. Трусова.

Глава 3: В. И. Тимошпольский, Ю. А. Самойлович.

Заключение. В. И. Тимошпольский.

Авторы выражают благодарность своим коллегам по работе, соавторам публикаций, с которыми они трудились бок о бок на протяжении всего творческого пути.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

1.1. Аналитическая теория численных методов моделирования и расчетов на основе применения конечно-разностных аппроксимаций

Полагаем, что наиболее эффективными методами при использовании в расчетах режимов затвердевания отливок и слитков являются численные и численно-аналитические методы.

Одним из первых в этом ряду, в ряду первопроходцев, был доктор технических наук, профессор Ю. А. Самойлович. Не вдаваясь в подробности, выделим его монографию «Формирование слитка» [11], в которой автором продемонстрированы приемы математического моделирования, расчетов и результаты расчетов режимов затвердевания и кристаллизации крупнотоннажных промышленных слитков.

В дальнейшем подобные приемы моделирования и расчетов были использованы применительно к технологии непрерывной разливки стали и опубликованы в коллективной монографии [18].

Полагаем, что сегодня, когда возникают сложности при выполнении расчетов температурных полей в ходе непрерывного литья, исследователю небезынтересно будет изучить некоторые приемы в подходах к математическому моделированию и выборе численной схемы, с помощью которой предоставляется возможным построить надежную и универсальную математическую модель и опереться на фактический апробированный многими десятилетиями и одновременно эффективный математический аппарат.

Авторы настоящей монографии полагают, что, несмотря на широкомасштабное внедрение готовых программ, использование собственных разработок, опирающихся на прочный теоретический фундамент знаний в этой области, будет представляться качественным и надежным инструментом при исследовании такого сложного инженерного решения человечества, каковым и является непрерывная разливка металлов.

Ниже нами рассмотрены конечно-разностные схемы решения задач нестационарной теплопроводности применительно к теории формирования (затвердевания) заготовок и слитков.

Математическая формулировка задачи типа Стефана. Численное моделирование.

Процесс затвердевания слитка характеризуется определенным законом перемещения во времени и пространстве толщины затвердевшего слоя $\omega = \omega(x, y, z, t)$,

где x, y, z – декартовы координаты; t – время. Знание толщины твердой корки ω важно для определения полной продолжительности затвердевания отливок и уточнения конфигурации жидкого ядра (незатвердевшей части) слитка, что необходимо при решении задач о движении расплава в жидком ядре и термических напряжениях в твердой оболочке слитка. В практических расчетах широко используется упрощенный способ определения толщины твердой корки в соответствии с законом квадратного корня

$$\omega = \chi\sqrt{t}, \quad (1.1)$$

где χ – эмпирический коэффициент (для стальных слитков значение χ изменяется в пределах 2,5–2,9 см/мин^{0,5}). Эмпирическое соотношение (1.1) согласуется с аналитическим решением задачи о затвердевании полуограниченного массива расплава, на охлаждаемой поверхности которого поддерживается постоянная температура. Ниже приведена математическая формулировка этой задачи [19], называемой обычно задачей Стефана по имени австрийского математика, изучавшего в 80-х годах XIX в. процесс отвердевания талого грунта. Рассмотрим полуограниченный массив расплава, на охлаждаемой поверхности которого принято начало координаты x . Часть массива ($0 \leq x \leq \omega$) занята твердой фазой, другая часть ($x > \omega$) представляет собой расплав. Задача нестационарной теплопроводности для обеих частей массива формулируется с использованием уравнений параболического типа:

$$\partial T_1 / \partial t = a_1 \left(\partial^2 T_1 / \partial x^2 \right) \text{ при } (0 \leq x \leq \omega);$$

$$\partial T_2 / \partial t = a_2 \left(\partial^2 T_2 / \partial x^2 \right) \text{ при } (x > \omega),$$

системы краевых условий:

$$\partial T_2 / \partial x = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, t > 0;$$

$$-\lambda_1 \left(\partial T_1 / \partial x \right)_{x=\omega} = \rho L \left(\partial \omega / \partial t \right) - \lambda_2 \left(\partial T_2 / \partial x \right)_{x=\omega} \text{ при } x = \omega, t > 0;$$

$$T_1(\omega, t) = T_2(\omega, t) = T_{\text{кр}} = \text{const} \text{ при } x = \omega, t > 0;$$

$$T_1(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ при } t = 0;$$

$$T_2(x, 0) = \varphi_2(x) \text{ при } t = 0,$$

где переменные и коэффициенты с индексом 1 – для твердой фазы, а с индексом 2 – для жидкой фазы; $a = \lambda / (\rho c)$ – коэффициент температуропроводности; $\omega = \omega(t)$ – непрерывно дифференцируемая по времени функция; $T_{\text{кр}}$ – равновесная температура фазового перехода (кристаллизации).

Аналитическое решение приведенной выше задачи Стефана удастся получить при использовании двух допущений:

1) температура на охлаждаемой поверхности массива не изменяется во времени и равна $T_{\text{пов}} = \text{const}$, причем $T_{\text{пов}} < T_{\text{кр}}$;

2) начальное распределение температур в обеих фазах равномерно распределено вдоль координаты x , причем $\varphi_1 = \varphi_2 = T_0 = \text{const}$ и $T_0 > T_{\text{кр}}$.

В этом частном случае перемещение во времени границы раздела фаз подчиняется закону квадратного корня:

$$\omega = 2\chi\sqrt{a_1 t}, \quad (1.2)$$

причем безразмерный коэффициент χ определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$\frac{\exp(-\chi^2)}{\Phi(\chi)} - \frac{\lambda_2 a_1^{0,5} (T_0 - T_{\text{кр}}) \exp\left(-\frac{a_1}{a_2} \chi^2\right)}{\lambda_1 a_2^{0,5} (T_{\text{кр}} - T_{\text{пов}}) \Phi_*\left[\chi(a_1/a_2)^{0,5}\right]} = \frac{\chi L \pi^{0,5}}{c_1 (T_{\text{кр}} - T_{\text{пов}})}, \quad (1.3)$$

где $\Phi(z)$ – интеграл ошибок и $\Phi_*[z] = 1 - \Phi[z]$.

Температурное поле в твердой корке и расплаве при известном значении коэффициента χ определяется формулами:

$$T_1(x, t) = T_{\text{пов}} + (T_{\text{кр}} - T_{\text{пов}}) \frac{\Phi\left(x/2\sqrt{a_1 t}\right)}{\Phi(\chi)}; \quad (1.4)$$

$$T_2(x, t) = T_0 - (T_0 - T_{\text{кр}}) \frac{\Phi_*\left(x/2\sqrt{a_2 t}\right)}{\Phi_*\left[\chi(a_1/a_2)^{0,5}\right]}. \quad (1.5)$$

Таким образом, аналитическое решение задачи Стефана даже при наиболее простой форме затвердевающего массива отличается громоздкостью. Для отливок и слитков характерны относительно сложные формы очертаний внешнего контура, в связи с чем аналитическое решение задачи Стефана для таких случаев оказывается практически невозможным. В связи с этим получили распространение численные методы решения задачи Стефана, используемые в расчетах затвердевания отливок и слитков. В настоящей главе рассматривается один из таких методов, основанный на принципе «растягивающейся сетки». Однако изложению указанного метода предшествует решение задач нестационарной теплопроводности для тел простой формы без учета фазовых переходов в материале изделия. Рассмотрение этих более простых задач преследует цель обсуждения различных схем численного (сеточного) решения

уравнения теплопроводности, что представляет методический интерес в связи с использованием микрокомпьютеров. Вместе с тем задачи об остывании и нагреве сплошных изделий естественно стыкуются с задачей Стефана, поскольку оптимизация режимов охлаждения и нагрева слитков представляет практический интерес. При всестороннем симметричном охлаждении тел простейшей формы (плиты, цилиндра, шара) задача определения поля температур по сечению тел базируется на решении уравнения нестационарной теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right), \quad (1.6)$$

где k – коэффициент формы, равный для плиты 0, для цилиндра – 1, для шара – 2. Дополним уравнение (1.6) граничными условиями:

1) на охлаждаемой поверхности тела при

$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \alpha (T_{\text{пов}} - T_c), \quad (1.7)$$

где α – коэффициент теплообмена; $T_{\text{пов}} = T(R, t)$ – температура поверхности тела; T_c – температура охлаждающей среды;

2) на оси симметрии тела при $r = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (1.8)$$

Начальное распределение температуры по сечению тела считается известным:

$$\text{при } t = 0 \quad T(r, 0) = f(r). \quad (1.9)$$

Ниже изложены различные способы численного (сеточного) решения задачи, определяемой соотношениями (1.6)–(1.9).

При использовании метода конечных разностей (явная схема) [20–22] непрерывное по времени течение процесса заменяется ступенчатым, а пространственные координаты в сечении тела заменяются отдельными расчетными участками, в пределах каждого из которых постановка задачи упрощается. Соответственно, уравнение нестационарной теплопроводности (1.6) преобразуется совокупностью алгебраических уравнений (обычно линейных). При использовании явной схемы конечно-разностного метода производные по времени и координате в уравнении (1.6) заменяются отношениями конечных приращений следующего вида:

$$\partial T / \partial t = (T_i^{k+1} - T_i^k) / \Delta t;$$

$$\partial T / \partial r = (T_{i+1}^k - T_{i-1}^k) / (2\Delta r);$$

$$\partial^2 T / \partial r^2 = (T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) / (\Delta r^2).$$

В результате получим расчетную формулу для определения температуры в узле сетки с номером i для момента времени $t_k = k\Delta t$, где $i = 1, 2, 3, \dots$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$T_i^{k+1} = T_i^k + A \left[(T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) + \frac{k}{2i-1} (T_{i+1}^k - T_{i-1}^k) \right], \quad (1.10)$$

где $A = a\Delta t / \Delta r^2$.

При этом ширина слоя сетки равна $\Delta r = R/N$ (где N – число слоев), а выбор интервала Δt ограничен условием устойчивости вычислений: $A \leq A_{\text{кр}}$, где $A_{\text{кр}} = 1/4$ – для пластины, $A_{\text{кр}} = 1/6$ – для цилиндра. Как показано на рис. 1.1, сетка размещена в сечении слитка таким образом, что средняя плоскость пластины (или ось цилиндра) и охлаждаемая поверхность расположены посередине граничных слоев. В результате температура охлаждаемой поверхности определяется полусуммой смежных температур: $T_{\text{п},k} = 0,5(T_{N,k} + T_{\phi,k})$, и граничное условие (1.7) можно переписать в виде:

$$-\lambda \frac{T_{\phi,k} - T_{N,k}}{\Delta r} = \beta \left(\frac{T_{\phi}^k + T_N^k}{2} - T_c \right).$$

Отсюда получим выражение для температуры в фиктивном полуслое, расположенном на расстоянии $\Delta r/2$ от поверхности:

$$T_{\phi}^k = \left[\frac{\alpha \Delta r}{\lambda} T_c + \left(1 - \frac{\beta \Delta r}{2\lambda} \right) T_N^k \right] / \left(1 + \frac{\alpha \Delta r}{2\lambda} \right). \quad (1.11)$$

Алгоритм решения задачи по данному способу включает выполнение следующих операций:

- 1) расчет коэффициента температуропроводности $a = \lambda / (\rho c)$;
- 2) расчет ширины слоя $\Delta r = R/N$;
- 3) расчет интервала времени Δt при избранной величине параметра A ;
- 4) размещение в узлах сетки начального (для момента $t = t_0$) распределения температуры T_{ϕ}^k ;
- 5) вычисление температур во внутренних узлах сетки ($i = 1, 2, \dots, N$) по формуле (1.10);
- 6) вычисление температуры T_{ϕ}^k в фиктивном полуслое по формуле (1.11);
- 7) определение граничных значений температуры $T_{\text{оси}}^k = T_1^k$ и $T_{\text{пов}}^k = 0,5(T_N^k + T_{\phi}^k)$;

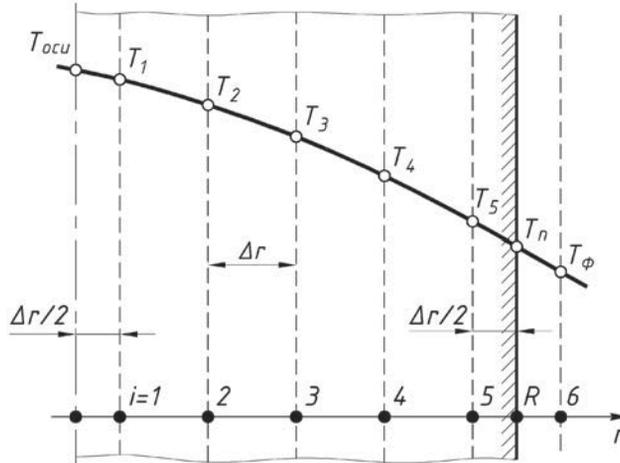


Рис. 1.1. Размещение сеточной области в сечении тел плоской формы (явная схема)

8) определение полного значения текущего времени $t_k = t_0 + \sum_{(k)} \Delta t$;

9) вычисление сопутствующих показателей температурного поля, например, скоростей охлаждения в узлах сетки $v_i^k = (\partial T / \partial t)_i^k$;

10) выдача в печать результатов расчета для момента времени и повторение вычислений с п. 4 настоящего алгоритма.

Анализ точности вычислений. Тестирование обозначенной выше конечно-разностной аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений осуществлялось при использовании табличных значений Т. Рассела из Приложения IX, приведенных в известной монографии Г. П. Иванцова [23] (табл. 1.1–1.3).

Таблица 1.1. Значения относительной температуры в пластине $\theta = (T_c - T) / (T_c - T_{нач})$, рассчитанные методом сеток при $N = 5$ и $N = 11$ в сопоставлении с табличными данными [23], при $Bi = 2$, $\theta_{нач} = 1$

Fo	N = 5	N = 11	Данные [23]	r = 0		
				N = 5	N = 11	Данные [23]
				r = R		
0,05	1,00000	0,99965	0,99954	0,65385	0,64578	0,64380
0,10	0,99085	0,98836	0,98779	0,55982	0,55484	0,55361
0,15	0,96244	0,95894	0,95813	0,50252	0,49885	0,49795
0,20	0,92256	0,91878	0,91789	0,46139	0,45389	0,45765
0,25	0,87794	0,87420	–	0,42889	0,42625	–
0,30	0,83225	0,82865	0,83661	0,40142	0,39899	0,39841
0,35	0,78729	0,78386	–	0,37711	0,37486	–
0,40	0,74392	0,74069	0,74225	0,35501	0,35288	0,35235
0,45	0,70252	0,69947	–	0,33457	0,33256	–
0,50	0,66321	0,66032	0,66025	0,31550	0,31361	0,31314

Таблица 1.2. Значения относительной температуры в пластине $\theta = (T_c - T)/(T_c - T_{нач})$, рассчитанные методом сеток при $N = 5$ и $N = 11$ в сопоставлении с табличными данными [23], при $Bi = 10$, $\theta_{нач} = 1$

Fo	$N = 5$	$N = 11$	Данные [23]	$N = 5$	$N = 11$	Данные [23]
	$r = 0$			$r = R$		
0,05	1,00000	0,99890	0,99856	0,24609	0,23502	0,23230
0,10	0,87636	0,96996	0,96842	0,17620	0,17169	0,17057
0,15	0,91445	0,90663	0,90476	0,14441	0,14177	0,14110
0,20	0,83862	0,83108	0,82925	0,12487	0,12296	0,12248
0,25	0,76216	0,75533	–	0,11061	0,10905	–
0,30	0,69002	0,68395	0,68246	0,09903	0,09768	0,09735
0,35	0,62368	0,61832	–	0,08908	0,08789	–
0,40	0,56333	0,55859	0,55742	0,08029	0,07924	0,07897
0,45	0,50866	0,50448	–	0,07244	0,07150	–
0,50	0,45924	0,45556	0,45464	0,06538	0,06454	0,06432

Таблица 1.3. Значения относительной температуры в цилиндре $\theta = (T_c - T)/(T_c - T_{нач})$, рассчитанные методом сеток при $N = 5$ и $N = 11$ в сопоставлении с табличными данными [23] при $Bi = 2$, $\theta_{нач} = 1$

Fo	$N = 5$	$N = 11$	Данные [23]	$N = 5$	$N = 11$	Данные [23]
	$r = 0$			$r = R$		
0,05	1,00000	0,99847	0,99748	0,62820	0,61589	0,61304
0,10	0,96955	0,96135	0,95921	0,51118	0,50294	0,50099
0,15	0,89278	0,88315	0,88075	0,43482	0,42843	0,42687
0,20	0,80116	0,79216	0,78992	0,37676	0,37146	0,37016
0,25	0,71090	0,70302	–	0,32916	0,32466	–
0,30	0,62772	0,62095	0,61929	0,28866	0,28479	0,28383
0,35	0,55308	0,54730	–	0,25356	0,25024	–
0,40	0,48685	0,48193	0,48072	0,22289	0,22004	0,21921
0,45	0,42836	0,42419	–	0,19600	0,19355	–
0,50	0,37684	0,37329	0,37240	0,17238	0,17028	0,16974

Из данных табл. 1.1–1.3 видно, что увеличение числа слоев N (с 5 до 11) заметно повышает точность решения: значения относительной температуры при $N = 11$ различаются от данных Т. Рассела в третьем–четвертом знаке после запятой. Учитывая сегодняшний современный ресурс электронно-вычислительной техники, количество сеточных разбиений возможно увеличивать в десятки и сотни раз и это по сути не приведет к увеличению времени расчета. Все это безоговорочно подтверждает существенные преимущества ЭВМ при решении этого класса уравнений математической физики.

Применение неявной конечно-разностной аппроксимации. В данном случае вывод расчетных формул метода конечных разностей выполним отдельно для плиты и цилиндра.

Плита. Определение температурного поля в плите толщиной $2R$ при ее двухстороннем симметричном охлаждении базируется на замене производных от температуры по времени и координате следующими отношениями конечных приращений:

$$\begin{aligned}\partial T/\partial t &= (T_i^{k+1} - T_i^k)/\Delta t; \\ \partial^2 T/\partial x^2 &= (T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1})/\Delta x^2.\end{aligned}\quad (1.12)$$

В результате уравнение нестационарной теплопроводности (при неизменных теплофизических свойствах материала)

$$\partial T/\partial t = a(\partial^2 T/\partial x^2) \quad (1.13)$$

заменяется сеточным уравнением

$$c_i T_{i-1}^{k+1} + b_i T_i^{k+1} + a_i T_{i+1}^{k+1} + d_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots n; n = N + 2, \quad (1.14)$$

где $c_i = a_i = 1$; $b_i = -(2 + s_0)$; $d_i = s_0 T_i^k$; $s_0 = \Delta r^2 / (a \Delta t)$.

Соотношение (1.14) можно представить в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} = 0. \quad (1.15)$$

Таким образом, решение системы уравнений (1.14) сводится к оперированию с трехдиагональной матрицей. При этом исходная матрица приводится к виду треугольной матрицы в ходе операций прямого хода

$$Y = -c_i/b_{i-1}; \quad \bar{b}_i = b_i + Y a_{i-1}; \quad \bar{d}_i = d_i + Y d_{i-1} \quad (1.16)$$

при изменении индекса i от 2 до $n = N + 2$. Затем полученная треугольная матрица решается с применением формул обратного хода:

$$x_n = -\bar{d}_n/\bar{b}_n; \quad x_i = (-\bar{d}_i - x_{i+1} a_i)/\bar{b}_i \quad (1.17)$$

при изменении индекса i от $(n - 1)$ до 1. Учет граничных условий (1.17) и (1.8) приводит к следующим значениям краевых коэффициентов матрицы:

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{n-1}{Bi} - 0,5; \quad b_n = -\left(\frac{n-2}{Bi} + 0,5\right); \quad a_n = 0; \quad d_n = T_c; \quad c_1 = 0, \\ b_1 &= -1, \quad a_1 = 1, \quad d_1 = 0.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Цилиндр. Определение температурного поля в цилиндре радиусом R при его всестороннем симметричном охлаждении и неизменных теплофизических свойствах основано на замене уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.19)$$

системой алгебраических уравнений, представленных в матричной форме. Значение радиуса r_i , определяющего расстояние от оси цилиндра до узла сетки с индексом i (рис. 1.2), равно

$$r_i = R \frac{i-1,5}{n-2} \quad (1.20)$$

и $\Delta r = r_{i+1} - r_i = R/N$; $N = n - 2$.

Запишем выражения производных

$$\begin{aligned} \partial T / \partial t &= (T_i^{k+1} - T_i^k) / \Delta t; \\ (\partial T / \partial r)_+ &= (T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}) / \Delta r; \\ (\partial T / \partial r)_- &= (T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}) / \Delta r; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{1}{\Delta r} \left[r_+ \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_+ - r_- \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_- \right], \end{aligned}$$

где $r_+ = \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i)$, $r_- = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$.

Заменяя в уравнении (1.19) производные отношениями конечных приращений, приходим к соотношению:

$$C_i T_{i-1}^{k+1} + B_i T_i^{k+1} + A_i T_{i+1}^{k+1} + D_i = 0, \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} C_i &= 1 + \frac{r_{i-1}}{r_i}; \quad B_i = - \left(s_0 + 2 + \frac{r_{i-1}}{r_i} + \frac{r_{i+1}}{r_i} \right); \quad A_i = 1 + \frac{r_{i+1}}{r_i}; \\ D_i &= s_0 T_i^k, \quad s_0 = 2\Delta r^2 / (a\Delta t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Введем параметр $P = \Delta t / \Delta t_0$, где $\Delta t_0 = \Delta r^2 / (4a)$, тогда $s_0 = 8/P$ и $\Delta Fo = P / (4N^2)$.

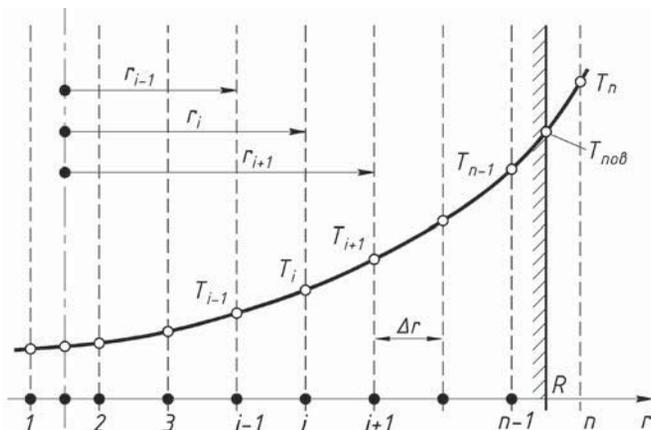


Рис. 1.2. Схема размещения сеточной области вдоль радиуса цилиндра (неявная схема)

Коэффициенты A_i , B_i , C_i можно преобразовать с учетом указанного выше выражения (1.21), в результате получим:

$$A_i = 2[(i-1)/(i-1,5)]; \quad B_i = -(s_0 + 4); \quad C_i = 2[(i-2)/(i-1,5)]. \quad (1.23)$$

Таким образом, коэффициенты A_i уменьшаются, а коэффициенты C_i растут с увеличением индекса i (т. е. расстояния от оси цилиндра), а коэффициенты B_i не зависят от индекса i . Система уравнений (1.21) может быть представлена в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & A_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n & B_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix} = 0. \quad (1.24)$$

Решение системы уравнений (1.24) может быть осуществлено указанным выше методом Гаусса с учетом зависимости коэффициентов A_i , B_i , C_i , D_i от индекса i ($i = 1, 2, \dots, n$). В результате решения матричного уравнения (1.24) с использованием процедуры Гаусса, известной под названием схемы единственного деления [18], получены цифровые значения безразмерных температур, которые и представлены в табл. 1.4–1.6.

Обращает на себя внимание следующее обстоятельство. Здесь, если сопоставить значения величин температур во времени Fo , приведенных в таблицах 1.1–1.3 (явная конечно-разностная аппроксимация) и табличными данными 1.4–1.6 (неявная конечно-разностная аппроксимация) становится очевидным их практическое совпадение: совпадают четыре значащих цифры значений $\theta_{\text{оси}}$ и $\theta_{\text{н}}$. Между тем длительность процедурных вычислений различалась значительно.

Например, при использовании неявной разностной схемы скорость вычислений превосходила явную схему Дю-Фора и Франкела [20] в 5–6 раз. Учитывая обстоятельство, что выполняемые нами расчеты в соответствии с рассмотренными схемами осуществлялись практически 30–40 лет тому назад (в 1980-е годы), рассмотрение данного замечания сегодня не имеет практически никакого значения для теории вычислений даже самых сложных многократно нелинейных многомерных задач промышленной теплотехники. Использование современных компьютерных программ и технологий позволило фактически нивелировать эту сторону вопроса.

Таблица 1.4. Значения относительной температуры в пластине $\theta = (T_c - T)/(T_c - T_{нач})$, рассчитанные методом сеток при $n = 7$ и $n = 12$ в сопоставлении с данными [23] при $Bi = 2, \theta_{нач} = 1$

Fo	$n = 7$	$n = 12$	Данные [23]	$n = 7$	$n = 12$	Данные [23]
	$r = 0$			$r = R$		
0,05	0,99666	0,99889	0,99954	0,64648	0,64508	0,64380
0,10	0,98002	0,98565	0,98779	0,55794	0,55484	0,55361
0,15	0,94970	0,95588	0,95813	0,50171	0,49894	0,49795
0,20	0,91086	0,91608	0,91789	0,46057	0,45840	0,45765
0,25	0,86804	0,87199	–	0,42777	0,42614	–
0,30	0,82409	0,82688	0,83661	0,40002	0,39879	0,39841
0,35	0,78063	0,78246	–	0,37557	0,37460	–
0,40	0,73851	0,73958	0,74225	0,35346	0,35262	0,35235
0,45	0,69812	0,69859	–	0,33312	0,33232	–
0,50	0,65965	0,65964	0,66025	0,31420	0,31339	0,31314

Таблица 1.5. Значения относительной температуры в пластине $\theta = (T_c - T)/(T_c - T_{нач})$, рассчитанные методом сеток при $n = 7$ и $n = 12$ в сопоставлении с данными [23] при $Bi = 10, \theta_{нач} = 1$

Fo	$n = 7$	$n = 12$	Данные [23]	$n = 7$	$n = 12$	Данные [23]
	$r = 0$			$r = R$		
0,05	0,99177	0,99684	0,99856	0,25066	0,23726	0,23230
0,10	0,95477	0,96459	0,96842	0,17959	0,17272	0,17057
0,15	0,94052	0,90196	0,90476	0,14619	0,14231	0,14110
0,20	0,82331	0,82781	0,82925	0,12560	0,12321	0,12248
0,25	0,75148	0,75321	–	0,11073	0,10914	–
0,30	0,68285	0,68264	0,68246	0,09888	0,09771	0,09735
0,35	0,61909	0,61759	–	0,08887	0,08790	–
0,40	0,56065	0,55828	0,55742	0,08014	0,07926	0,07897
0,45	0,50746	0,50449	–	0,07237	0,07154	–
0,50	0,45917	0,45580	0,45464	0,06542	0,06460	0,06432

Таблица 1.6. Значение относительной температуры в цилиндре $\theta = (T_c - T)/(T_c - T_{нач})$, рассчитанные методом сеток при $n = 7$ и $n = 12$ в сопоставлении с данными [23] при $Bi = 2$, $\theta_{нач} = 1$

Fo	$n = 7$	$n = 12$	Данные [23]	$n = 7$	$n = 12$	Данные [23]
	$r = 0$			$r = R$		
0,05	0,98949	0,99580	0,99748	0,61713	0,61456	0,61304
0,10	0,94328	0,95485	0,95921	0,50655	0,50246	0,50099
0,15	0,86911	0,87778	0,88075	0,43174	0,42811	0,42687
0,20	0,78449	0,78869	0,78992	0,37434	0,37120	0,37016
0,25	0,70036	0,70103	–	0,32736	0,32449	–
0,30	0,62171	0,62000	0,61929	0,28753	0,28475	0,28383
0,35	0,55029	0,54707	–	0,25312	0,25034	–
0,40	0,48635	0,48219	0,48072	0,22308	0,22027	0,21921
0,45	0,42950	0,42479	–	0,19672	0,19389	–
0,50	0,37915	0,37413	0,37240	0,17354	0,17070	0,16974

Метод прогонки. При решении задачи Стефана о затвердевании отливок одно из граничных условий является предельно простым: $T = T_{кр} = \text{const}$ при $x = \omega$ (фронт кристаллизации). Соблюдение данного граничного условия позволяет упростить методику определения температурного поля в телах простой формы, используя процедуру «прогонки» для обращения трехдиагональной матрицы. Заменяем в уравнении (1.6) производные по времени и координате отношениями конечных приращений следующего вида:

$$\begin{aligned}\partial T / \partial t &= (T_i^{k+1} - T_i^k) / \Delta t; \\ \partial T / \partial r &= (T_{i+1}^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}) / (2\Delta r); \\ \partial^2 T / \partial r^2 &= (T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}) / \Delta r^2.\end{aligned}$$

В результате получим расчетное соотношение неявного вида

$$\varphi_i T_{i-1}^{k+1} + (2 + s_0) T_i^{k+1} + \psi_i T_{i+1}^{k+1} + s_0 T_i^k = 0, \quad (1.25)$$

где $s_0 = \Delta r^2 / (a\Delta t)$;

$$\varphi_i = 1 - K\Delta r / (2r_i); \quad \psi_i = 1 + K\Delta r / (2r_i), \quad (1.26)$$

$K = 0$ для пластины, $K = 1$ для цилиндра. Для введения процедуры прогонки примем:

$$T_{i-1}^{k+1} = A_{i-1}^{k+1} (B_{i-1}^{k+1} + \psi_{i-1} T_i^{k+1}); \quad (1.27)$$

$$T_i^{k+1} = A_i^{k+1} (B_i^{k+1} + \psi_i T_{i+1}^{k+1}). \quad (1.28)$$

Подставляя выражение T_{i-1}^{k+1} из формулы (1.27) в уравнение (1.25), находим:

$$T_i^{k+1} = \frac{\varphi_i A_{i-1}^{k+1} B_{i-1}^{k+1} + \psi_i T_{i+1}^{k+1} + s_0 T_i^k}{2 + s_0 - \varphi_i \psi_i A_{i-1}^{k+1}}. \quad (1.29)$$

Сравнивая правые части соотношений (1.28) и (1.29), получим выражения коэффициентов прогонки:

$$A_i^{k+1} = (2 + s_0 - \varphi_i \psi_{i-1} A_{i-1}^{k+1}); \quad (1.30)$$

$$B_i^{k+1} = \varphi_i A_{i-1}^{k+1} B_{i-1}^{k+1} + s_0 T_i^k. \quad (1.31)$$

Первая стадия прогонки осуществляется в направлении от оси цилиндра (или средней плоскости пластины) к его поверхности. На основании условия симметрии (1.8) можно считать, что на оси цилиндра соблюдаются равенства $A_0 = 1$, $\varphi_0 = 1$, $B_0 = 0$; при этом из соотношения (1.28) следует $T_0^{k+1} = T_1^{k+1}$. Для узла сетки с индексом $i = 1$ находим:

$$A_1^{k+1} = (1 + s_0)^{-1}; \quad B_1^{k+1} = s_0 T_1^k.$$

И далее последовательно используются рекуррентные соотношения (1.30), (1.31). Обратная прогонка осуществляется по формуле (1.28), если известно граничное значение температуры поверхности тела $T_N = T_n = \varphi(t)$. Для проверки точности расчета температурного поля в изделии цилиндрической формы методом прогонки проведена серия расчетов при варьировании интервалов Δr и Δt .

Результаты тестовых вычислений по методу прогонки представлены табличными значениями температур для цилиндра конечных размеров (см. табл. 1.7–1.9). Из приведенных результатов вычислений можно сделать заключение о том, что расчетная схема устойчива при значениях расчетного параметра $s_0 = \Delta r^2 / (a \Delta t)$, в десятки и сотни раз меньшего критической величины $(s_0)_{\text{кр}} = 4$, определяющей устойчивость вычислений для сеточной схемы явного вида. Действительно, при задании $\Delta t = 0,6$ ч и $\Delta r = R / (15,5) = 0,0142$ м величина s_0 равна $\Delta r^2 / (a \Delta t) = 0,00839$, т. е. в 477 раз меньше, чем $(s_0)_{\text{кр}} = 4$. Это свидетельствует о целесообразности применения неявных, абсолютно устойчивых сеточных аппроксимаций, которые в итоге позволяют в значительной степени сократить время расчета.

Из таблиц 1.7–1.9 следует также, что в начальный период нагрева цилиндра погрешность вычислений может быть заметной, но очень быстро уменьшается в ходе нагрева: при $t = 0,6$ ч, $N = 5$, $\Delta t = 0,6$ ч погрешность достигает 20 % (точное значение $T_{\text{оси}} = 31,65$ °С), но уже при $t \geq 1,8$ ч погрешность вычислений не превышает 1–1,5 °С. При этом существенно, что измельчение расчетного интервала времени является более эффективным способом повышения точности вычислений, чем измельчение шага сетки, т. е. интервала $\Delta r = R / (N + 0,5)$.

Таблица 1.7. Влияние расчетного интервала времени Δt при расчете нагрева цилиндра методом сеток

$t, \text{ч}$	$T_{\text{пов}}, \text{°C}$	$T_A, \text{°C}$	$T_B, \text{°C}$	$T_C, \text{°C}$
0,6	60	38,277	35,463	32,253
1,2	120	92,032	90,745	89,937
1,8	180	150,352	149,922	149,764
2,4	240	209,908	209,780	209,751
3,0	300	269,791	269,755	269,750
3,6	360	329,761	329,751	329,750

Примечание: $T_{\text{нач}} = 0 \text{ °C}$; $C = 100 \text{ °C/ч}$; $R = 0,22 \text{ м}$; $a = 0,04 \text{ м}^2/\text{ч}$; $N = 5$; $\Delta t = 0,6 \text{ ч}$ (A); $\Delta t = 0,3 \text{ ч}$ (B); $\Delta t = 0,0375 \text{ ч}$ (C).

Таблица 1.8. Влияние расчетного шага сеточной области (Δr) для расчета нагрева цилиндра

$t, \text{ч}$	$T_{\text{пов}}, \text{°C}$	$T_A, \text{°C}$	$T_B, \text{°C}$	$T_C, \text{°C}$
0,6	60	38,277	38,209	38,195
1,2	120	92,032	91,991	91,982
1,8	180	150,352	150,335	150,331
2,4	240	209,908	209,902	209,901
3,0	300	269,791	269,789	269,789
3,6	360	329,761	329,760	329,760
4,2	420	389,753	389,753	389,753
4,8	480	449,751	449,751	449,751

Примечание: $T_{\text{нач}} = 0 \text{ °C}$; $C = 100 \text{ °C/ч}$; $R = 0,22 \text{ м}$; $a = 0,04 \text{ м}^2/\text{ч}$; $N = 5$ (A); $N = 10$ (B); $N = 15$ (C); $\Delta t = 0,6 \text{ ч}$ (A).

Таблица 1.9. Влияние расчетного шага сеточной области (Δr) для расчета нагрева цилиндра

$t, \text{ч}$	$T_{\text{пов}}, \text{°C}$	$T_A, \text{°C}$	$T_B, \text{°C}$	$T_C, \text{°C}$
0,6	60	32,253	32,176	32,160
1,2	120	89,937	89,926	89,923
1,8	180	149,764	149,763	149,762
2,4	240	209,751	209,751	209,751
3,0	300	269,750	269,750	269,750

Примечание: $T_{\text{нач}} = 0 \text{ °C}$; $C = 100 \text{ °C/ч}$; $R = 0,22 \text{ м}$; $a = 0,04 \text{ м}^2/\text{ч}$; $N = 5$ (A); $N = 10$ (B); $N = 15$ (C); $\Delta t = 0,0375 \text{ ч}$ (A).

Численное решение задачи Стефана. Ранее нами приведено решение классической задачи Стефана (1.2)–(1.5), которое соответствует неизменной температуре охлаждаемой поверхности плоского массива. Ниже изложен численный метод решения задачи Стефана для случая, когда на охлаждаемой поверхности плоского слитка задано граничное условие III рода. На рис. 1.3 представлена схема распределения температуры по сечению твердой корки плоского (листо-

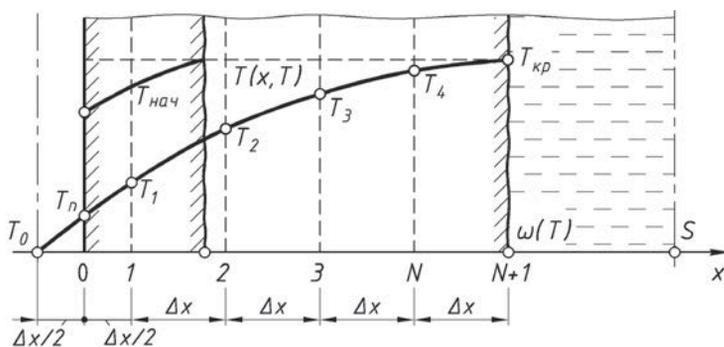


Рис. 1.3. Схема размещения сеточной области по толщине твердой корки при решении задачи Стефана

вого) слитка для момента времени, принимаемого за начальный ($T_{нач}$), а также для некоторого текущего момента t . Математическая формулировка задачи для плоской (одномерной) задачи включает уравнение нестационарной теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1.32)$$

и систему краевых условий

$$\text{при } x = 0 \quad \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha (T_{пов} - T_c); \quad (1.33)$$

$$\text{при } x = \omega \quad T = T_{кр}; \quad (1.34)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\omega} = \rho L \frac{d\omega}{dt}; \quad (1.35)$$

$$\text{при } t = t_0, \quad \omega = \omega_0, \quad T = T_{нач}(x). \quad (1.36)$$

Граничные условия (1.34) и (1.35) отражают предположения о том, что материал слитка кристаллизуется при неизменной температуре ($T_{кр} = \text{const}$), а перегрев жидкой фазы к моменту времени считается несущественным, т. е. в жидкой фазе соблюдается условие: $T(x, t) = T_{кр} = \text{const}$ при $S \geq x \geq \omega$; $t \geq t_0$.

Решение поставленной выше задачи осуществляется численным методом растягивающейся сетки, идея которого предложена в работе Г. П. Иванцова и Б. Г. Поляка [24]. Сущность метода заключается в том, что толщина затвердевшей корки разделяется на ряд слоев шириной Δx , а непрерывное течение времени заменяется скачкообразным, с интервалами Δt . Внутри каждого интервала Δt задача теплопроводности существенно упрощается; в частности, уравнение параболического типа (1.32) заменяется системой линейных алгебраических

уравнений, а затруднения, связанные с возникающим при такой замене большим объемом вычислений, преодолеваются в результате применения ЭВМ. В работе [24] использована замена уравнения (1.32) конечно-разностным соотношением явного вида, обладающим ограниченной устойчивостью, что ведет к необходимости выбора расчетного интервала времени Δt :

$$\Delta t \leq \Delta t_0 \quad \Delta t_0 = \Delta x^2 / (pa), \quad (1.37)$$

где $a = \lambda / (\rho c)$ – коэффициент температуропроводности материала; p – параметр устойчивости, изменяющийся для плоского слоя в пределах от $1/2$ до $1/4$. В связи с увеличением толщины твердой корки $\omega(t)$ в ходе затвердевания слитка алгоритм численного решения задачи может предусматривать пополнение системы элементарных слоев сеточной области новыми слоями, как только приращение корки $\Delta\omega$ станет равным (или несколько превысит) толщину слоя Δx . В работе [24] предложен иной способ учета увеличения толщины твердой корки, при котором число элементарных слоев остается неизменным, но с течением времени изменяется ширина каждого такого слоя Δx . Используя идею «растягивающейся сетки», уравнение теплопроводности (1.32) заменяем конечно-разностным уравнением неявного вида, обладающим повышенной устойчивостью вычислений при выборе значений интервала Δt , значительно превышающих величину Δt_0 , определяемую условием (1.37). Это обстоятельство позволяет существенно сократить объем вычислений (по сравнению со случаем использования конечно-разностных уравнений явного вида), что имеет большое значение при применении микрокомпьютеров. Используя ранее приведенные соотношения, заменим в уравнении (1.32) частные производные отношениями конечных приращений:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial t &= (T_i^{k+1} - T_i^k) / \Delta t; \\ \partial T / \partial x &= (T_{i+1}^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}) / (2\Delta x); \\ \partial^2 T / \partial x^2 &= (T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}) / \Delta x^2. \end{aligned}$$

В результате уравнение (1.32) заменяется системой линейных алгебраических уравнений:

$$T_{i-1}^{k+1} - (2 + s_0)T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1} + s_0T_i^k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (1.38)$$

где $s_0 = \Delta x^2 / (a\Delta t)$.

Решение сеточного уравнения (1.38) осуществляется методом прогонки, для чего используется взаимосвязь температур в двух смежных узлах сеточной области в виде:

$$T_{i-1}^{k+1} = A_{i-1}^{k+1} (B_{i-1}^{k+1} + T_i^{k+1}); \quad (1.39)$$

$$T_i^{k+1} = A_i^{k+1} (B_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}). \quad (1.40)$$

Подставив выражение температуры T_{i-1}^{k+1} из формулы (1.39) в уравнение (1.38), получим

$$T_i^{k+1} = (A_{i-1}^{k+1} B_{i-1}^{k+1} + T_{i+1}^{k+1} + s_0 T_i^k) / (2 + s_0 - A_{i-1}^{k+1}). \quad (1.41)$$

Приравнивая правые части соотношений (1.40) и (1.41), получим выражение так называемых коэффициентов прогонки:

$$A_i^{k+1} = (2 + s_0 - A_{i-1}^{k+1})^{-1}; \quad B_i^{k+1} = A_{i-1}^{k+1} B_{i-1}^{k+1} + s_0 T_i^k. \quad (1.42)$$

Определение температур в узлах сеточной области осуществляется по двухстадийной схеме. Первая стадия прогонки заключается в последовательном определении коэффициентов A_0^{k+1} , B_i^{k+1} с учетом известных температур в узлах сетки T_i^k и значений A_0^{k+1} и B_0^{k+1} , которые находят с учетом граничного условия (1.35). На второй стадии определяются температуры в узлах сетки в $(k+1)$ -й момент времени с учетом известной температуры $T_{N+1} = T_{кр}$ на границе раздела фаз и установленных на первой стадии коэффициентов прогонки A_i^{k+1} , B_i^{k+1} . В соответствии со схемой расположения узлов, представленной на рис. 1.2, первая стадия прогонки идет в порядке нарастания индекса i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), а вторая стадия – в обратном порядке ($i = N, N-1, N-2$ и т. д.). Найдем выражения коэффициентов A_0^{k+1} и B_0^{k+1} , для чего примем температуру поверхности слитка в момент $(k+1)\Delta t$ равной $T_{пов}^{k+1} = 0,5(T_0^{k+1} + T_1^{k+1})$, а производную $(\partial T / \partial x)_{пов}$ – равной $(\partial T / \partial x)_{пов} = (T_1^{k+1} - T_0^{k+1}) / \Delta x_k$.

В результате из граничного условия (1.33) получим выражение температуры во внешнем узле сетки:

$$T_0^{k+1} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha \Delta x_k}{2\lambda}\right) T_1^{k+1} + \frac{\alpha \Delta x_k}{\lambda} T_c}{1 + \frac{\beta \Delta x_k}{2\lambda}} \quad (1.43)$$

или

$$T_0^{k+1} = A_0^{k+1} (B_0^{k+1} + \psi_0^k T_1^{k+1}), \quad (1.44)$$

где $A_0^{k+1} = \left(1 + \frac{\beta \Delta x_k}{2\lambda}\right)^{-1}$; $B_0^{k+1} = \frac{\beta \Delta x_k}{\lambda} T_c$; $\psi_0^k = 1 - \beta \Delta x_k / (2\lambda)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Численные методы моделирования процессов затвердевания	9
1.1. Аналитическая теория численных методов моделирования и расчетов на основе применения конечно-разностных аппроксимаций.....	9
1.2. Метод конечных разностей – эффективный математический аппарат решения задач теории затвердевания и кристаллизации.....	29
1.3. Пример комплексного подхода выбора численного метода решения задачи Стефана.....	29
1.4. Математическое моделирование режимов затвердевания непрерывного слитка и теоретические предпосылки при использовании конечно-разностного метода.....	76
1.5. Метод конечных элементов (МКЭ) – эффективный математический аппарат в решении краевых задач металлургической теплофизики.....	122
Глава 2. Теплофизические основы непрерывной разливки стали (тепловая теория)	138
2.1. Общие сведения.....	138
2.2. Аналитическая теория затвердевания слитков (отливок).....	139
2.2.1. Теория затвердевания по А. И. Вейнику.....	146
2.2.2. Методы термического слоя в нелинейной теории затвердевания – кристаллизации слитков (отливок).....	199
2.2.3. Метод эквивалентных источников Ю. С. Постольника.....	216
2.2.4. Аналитический метод расчета затвердевания слитков (отливок), кристаллизующихся в интервале температур. Классическая квазиравновесная модель и теория метода Л. С. Лейбензона.....	253
Глава 3. Термические напряжения в твердой оболочке слитка, возникающие в ходе непрерывного литья	295
3.1. Аналитическая теория расчета термических напряжений в затвердевающих стальных слитках.....	301
3.2. Упрощенный метод расчета температур и напряжений в крупносортовой заготовке из высокоуглеродистой стали.....	312
3.3. Расчет термических напряжений в корке непрерывнолитого слитка, твердеющего в интервале температур (эффект релаксации в рамках модели Максвелла).....	318
3.4. Пример расчета температур, термовязкоупругих напряжений и деформаций в твердой оболочке слитка при непрерывном литье.....	334
3.5. Расчеты термических напряжений в начальном периоде формирования корки при контакте струи со стенкой кристаллизатора (эффект прилипания).....	342
3.6. Ромбичность и внутренние трещины при непрерывном литье.....	373

3.7. Пример расчетного анализа термических напряжений в твердой оболочке слитка с учетом влияния структурных превращений в остывающем аустените.....	383
3.8. Расчеты термических напряжений и деформаций в зоне вторичного охлаждения с учетом явления термоупругопластичности.....	396
3.9. Расчет температур и термических напряжений в сортовой непрерывнолитой заготовке из легированных марок стали по методу конечных элементов (МКЭ)	405
3.10. Расчет температур, напряжений и деформаций в непрерывнолитой сортовой заготовке с круговым поперечным сечением по МКЭ	415
3.11. Расчетный анализ термической прочности в опорных роликах МНЛЗ (математическое моделирование и примеры расчетов)	426
3.11.1. Математическое моделирование температурных полей и термических напряжений в опорных роликах МНЛЗ	432
3.11.2. Оценка долговечности опорных роликов МНЛЗ	436
3.11.3. Влияние неметаллических включений на долговечность опорных роликов...	441
3.11.4. Влияние ферростатического давления на термическую прочность опорных роликов МНЛЗ.....	451
Заключение	458
Список использованных источников	464