

**Б. А. Тухфатуллин, Л. Е. Путеева,  
В. Д. Раков**

**СМЕШАННАЯ ФОРМА МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА  
ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

**Б.А. Тухфатуллин, Л.Е. Путеева, В.Д. Раков**

**СМЕШАННАЯ ФОРМА МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА  
ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Томск  
Издательство ТГАСУ  
2020

УДК 624.04 (075.8)

ББК 38.112я73

T918

**Тухфатуллин, Б.А.**

T918 Смешанная форма метода конечных элементов для расчёта плоских стержневых систем : учебное пособие / Б.А. Тухфатуллин, Л.Е. Путеева, В.Д. Раков. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2020. – 104 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-93057-949-9

В учебном пособии рассмотрены вопросы применения метода конечных элементов в форме смешанного метода для определения внутренних усилий и перемещений в плоских стержневых системах. Теоретические сведения иллюстрируются решением практических примеров и сопровождаются текстом программы расчёта в программной среде SciLab.

Пособие предназначено для бакалавров профилей подготовки 08.03.01.01 «Промышленное и гражданское строительство» и 08.03.01.18 «Инженерно-сметная деятельность в строительстве», изучающих дисциплину «Численные методы расчёта строительных конструкций», а также студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и магистрантов, обучающихся по программе подготовки 08.04.01.24 «Современные технологии проектирования и строительства зданий и сооружений», изучающих дисциплину «Нелинейные задачи строительной механики».

**УДК 624.04 (075.8)**

**ББК 38.112я73**

**Рецензенты:**

**В.И. Савченко**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Строительная механика» ТГАСУ;

**А.В. Марченко**, главный инженер ООО «ФОБУС».

ISBN 978-5-93057-949-9

© Томский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, 2020

© Тухфатуллин Б.А.,

Путеева Л.Е., Раков В.Д., 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>1. Метод конечных элементов в форме смешанного метода</b> .....	5
1.1. Выбор основной системы смешанного метода .....	5
1.2. Матрица откликов конечного элемента в местной системе координат .....	9
1.3. Матрица направляющих косинусов. Матрица откликов конечного элемента в общей системе координат .....	15
1.4. Вектор грузовых коэффициентов конечного элемента .....	19
1.5. Формирование разрешающей системы уравнений смешанного метода .....	21
1.6. Определение внутренних усилий и перемещений .....	28
<b>2. Примеры расчёта плоских стержневых систем методом конечных элементов в форме смешанного метода</b> .....	30
2.1. Расчёт плоской рамы .....	30
2.2. Расчёт плоской фермы .....	45
<b>3. Программная реализация алгоритма метода конечных элементов в форме смешанного метода</b> .....	53
3.1. Краткие сведения о программной среде SciLab .....	53
3.2. Описание SciLab-программы для расчёта плоской стержневой системы .....	59
3.3. Примеры решения по SciLab-программе .....	66
<b>4. Расчётно-графическая работа «Расчёт плоских стержневых систем методом конечных элементов в форме смешанного метода»</b> .....	77
4.1. Варианты заданий для расчётно-графической работы .....	77
4.2. Пример выполнения расчётно-графической работы .....	80
<b>Контрольные вопросы</b> .....	87
<b>Заключение</b> .....	89
<b>Библиографический список</b> .....	90
<b>Приложение. Текст SciLab-программы для расчёта плоских стержневых систем методом конечных элементов в форме смешанного метода</b> .....	91

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для бакалавров профилей подготовки 08.03.01.01 «Промышленное и гражданское строительство» и 08.03.01.18 «Инженерно-сметная деятельность в строительстве», изучающих дисциплину «Численные методы расчёта строительных конструкций», а также студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и магистрантов, обучающихся по программе подготовки 08.04.01.24 «Современные технологии проектирования и строительства зданий и сооружений», изучающих дисциплину «Нелинейные задачи строительной механики».

В пособии рассмотрены вопросы применения метода конечных элементов в форме смешанного метода для определения внутренних усилий и перемещений в плоских стержневых системах. Теоретические сведения иллюстрируются решением практических примеров и сопровождаются текстом программы в свободно распространяемом пакете инженерно-технических и научных расчётов SciLab. Программа предназначена для определения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в стержнях, горизонтальных и вертикальных перемещений узлов плоской стержневой системы.

Инструкции по работе в SciLab можно найти по адресам:

- <https://www.scilab.org/en/resources/documentation/tutorials>;
- [http://www.openeering.com/scilab\\_tutorials](http://www.openeering.com/scilab_tutorials).

Загрузить дистрибутив программной среды Scilab можно непосредственно с сайта разработчиков по адресу:

- <https://www.scilab.org/en/download/6.0.1>.

Авторы пособия выражают благодарность магистранту кафедры «Строительная механика» ТГАСУ Д. А. Клёнову за помощь в разработке алгоритма расчёта, составлении и отладке программы на языке Object Pascal в среде визуальной разработки Borland Delphi 7, что в значительной мере облегчило работу над пособием.

# 1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ СМЕШАННОГО МЕТОДА

## 1.1. Выбор основной системы смешанного метода

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является основой для программных вычислительных комплексов. Наиболее распространённые в РФ программные комплексы реализуют в качестве расчётного алгоритма МКЭ метод перемещений [3, 9]. По этому способу плоская стержневая система (рис. 1.1, а) разделяется на отдельные стержни – конечные элементы (КЭ), соединённые между собой в узлах. Примыкание к узлу может быть жёстким или шарнирным. За неизвестные принимаются перемещения узлов – линейные и угловые. Основная система МКЭ получается из заданной системы путём наложения связей, препятствующих возможным смещениям (рис. 1.1, б).

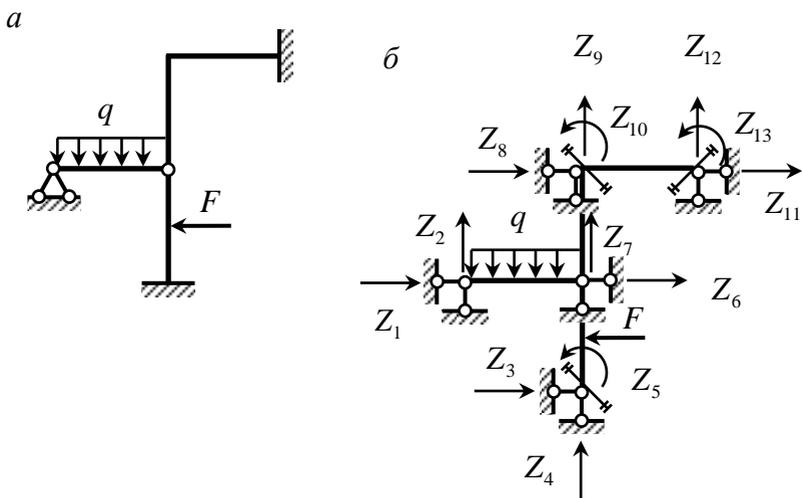


Рис. 1.1. Заданная стержневая система (а); основная система МКЭ в форме метода перемещений и схема нумерации неизвестных (б)

При решении задачи в основной системе метода перемещений (рис. 1.2, *a*) используется четыре различных типа КЭ [4, 5, 7] (рис. 1.2, *б*).

Условие равенства нулю реакций в наложенных связях от всех воздействий, в том числе от неизвестных узловых перемещений, приводит к разрешающей системе уравнений. После нахождения перемещений по концам КЭ вычисляются внутренние усилия – изгибающие моменты, продольные и поперечные силы.

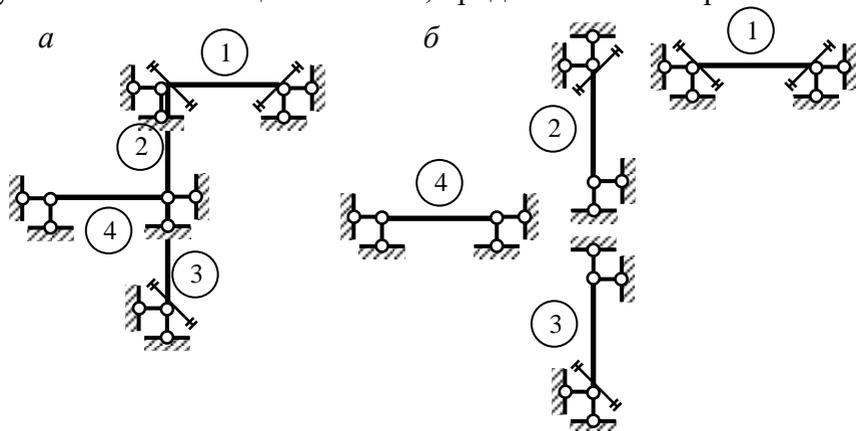


Рис. 1.2. Основная система МКЭ в форме метода перемещений (*a*); типовые КЭ, используемые для расчёта (*б*)

Известно [1, 2], что реализация МКЭ возможна и в форме других классических методов строительной механики, к которым относятся метод сил и смешанный метод. Однако в силу разных причин эти методы не были реализованы в промышленных программных продуктах. Следует отметить, что в последнее время вопросам реализации смешанного метода в МКЭ стало уделяться больше внимания. Авторами [2] разработаны различные КЭ для решения задач строительной механики.

В монографии Ю.Я. Юдина «Энергетический метод в автоматизации инженерных расчётов» [8] предложен оригинальный способ выбора основной системы. По этому способу сквоз-

ные шарниры врезаются во все узлы исходной системы, после чего устанавливаются связи, препятствующие горизонтальным и вертикальным смещениям, а по концам элементов прикладываются неизвестные изгибающие моменты. Таким образом, за неизвестные принимаются узловые перемещения  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и изгибающие моменты  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$  по концам элемента. За счёт этого систему удастся представить как совокупность однотипных шарнирно закреплённых по концам элементов (рис. 1.3, а, б), что позволяет выстроить эффективный алгоритм расчёта.

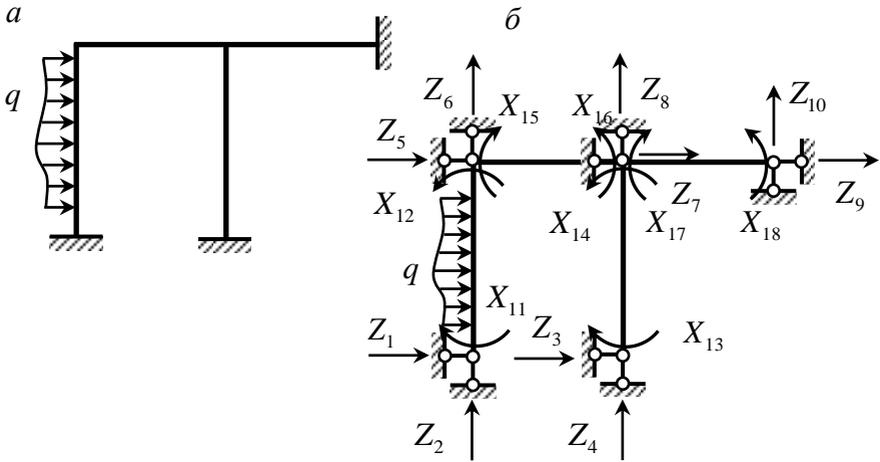


Рис. 1.3. Заданная схема (а); основная система смешанного метода и пронумерованные неизвестные для расчёта по МКЭ (б)

Обозначим через  $n_y$  число узлов рассчитываемой системы, через  $n_c$  число стержней (КЭ). Тогда число неизвестных узловых перемещений  $n_z = 2n_y$ , число неизвестных изгибающих моментов  $n_x = 2n_c$ , общее число неизвестных смешанного метода:

$$n = n_z + n_x = 2(n_y + n_c). \quad (1.1)$$

При формировании исходной информации для решения задачи используются две системы координат: общая система координат  $xu$  и местная система –  $x^*y^*$ , связанная со стержнем (рис. 1.4). В общей системе задаются координаты узлов и приложенные к стержню или узлу внешние нагрузки; в этой же системе вычисляются перемещения узлов по вертикали и по горизонтали. Местная система координат для каждого КЭ назначается следующим образом: начало системы совмещается с узлом с меньшим порядковым номером, ось  $x^*$  направляется вдоль элемента, а ось  $y^*$  – ей перпендикулярно; угол наклона местной системы координат относительно общей системы координат обозначается через  $\alpha$ . При дальнейшем изложении материала все величины, относящиеся к местной системе координат, будут отмечены символом «\*». Для вычисления длины  $\lambda$  и тригонометрических функций угла  $\alpha$  (рис. 1.4) используются формулы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2}; \\ \sin \alpha &= \frac{\Delta y}{\lambda} = \frac{y_k - y_n}{\lambda}; \quad \cos \alpha = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_k - x_n}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

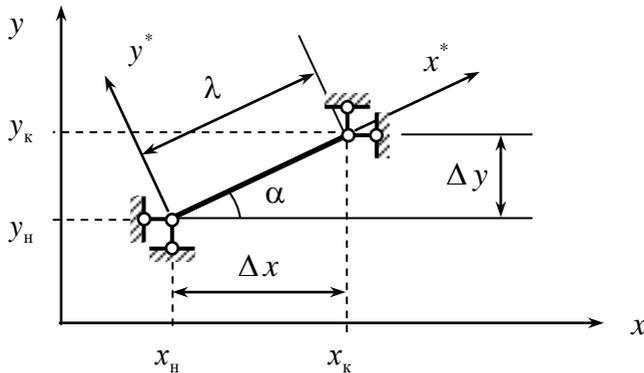


Рис. 1.4. Схема для определения длины  $\lambda$  и тригонометрических функций угла  $\alpha$

Разрешающая система уравнений смешанного метода формируется из двух условий: равенства нулю реакций в добавленных связях от всех приложенных воздействий (неизвестных узловых перемещений; неизвестных реакций в отброшенных связях – изгибающих моментов; внешних нагрузок); равенства нулю перемещений по направлению всех отброшенных связей от каждого из приложенных воздействий. Следует отметить, что при формировании разрешающей системы уравнений для основной системы смешанного метода (см. рис. 1.3, б) должны быть также учтены дополнительные условия:

- для «жёстких» неопорных узлов: условия неразрывности угловых перемещений и условия равновесия по изгибающим моментам;

- для узлов с опорными закреплениями: равенство нулю соответствующих линейных перемещений;

- для КЭ, имеющего в начале или в конце элемента шарнир: равенство нулю изгибающего момента.

Эти преобразования системы уравнений будут рассмотрены в п. 1.5.

## **1.2. Матрица откликов конечного элемента в местной системе координат**

Для реализации алгоритма смешанного метода необходимо сформировать матрицу, связывающую реакции в наложенных связях и изгибающие моменты по концам элемента с одной стороны с узловыми перемещениями (линейными и угловыми) – с другой. По терминологии В.А. Игнатьева [2] эта матрица носит название «матрица откликов».

Обозначим:  $r_{ij}^*$  – реакция в  $i$ -й добавленной связи;  $\delta_{ij}^*$  – перемещение по направлению  $i$ -й отброшенной связи от перемещения  $Z_j^* = 1$ ; от усилия  $X_j^* = 1$  соответственно. Из этих величин формируется матрица откликов  $[B^*]$ :

*Учебное издание*

*Тухфатуллин Борис Ахатович  
Путеева Лариса Евгеньевна  
Раков Валерий Дмитриевич*

СМЕШАННАЯ ФОРМА МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА  
ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Редактор Е.А. Кулешова

Оригинал-макет подготовлен Б.А. Тухфатуллиным, Л.Е. Путеевой

Подписано в печать 04.12.2020.

Формат 60×84/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 6,08. Уч.-изд. л. 5,47.

Тираж 150 экз. Первый завод 57 экз. Зак. № 131.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.

Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.

634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.