Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

Т.А. Ковалевская, Е.В. Комарь, Н.А. Еньшина

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА

Электронное учебное пособие

*Рекомендовано Учебно-методическим советом ТГАСУ
в качестве учебного пособия для студентов
всех направлений по программам бакалавриата
и магистратуры очной формы обучения*

Томск
Издательство ТГАСУ
2019

УДК 531.1(075)
ББК 22.31я7

Серия «Учебники ТГАСУ» основана в 2013 году

К 56 **Ковалевская, Т.А.** Теоретическая механика. Динамика [Электронный ресурс] : электронное учебное пособие / Т.А. Ковалевская, Е.В. Комарь, Н.А. Еньшина; Томский государственный архитектурно-строительный университет. – 2-е изд., испр. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2019. – (Серия «Учебники ТГАСУ»). – 1 электрон. диск (CD-R) : 12 см; в контейнере 14×12,5 см. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium; 1 Гб RAM; свободное место на HDD 9 Мб; Windows XP/Vista/7/8/10; Adobe Acrobat Reader; дисковод CD-ROM 2-х и выше; клавиатура; мышь. – Загл. с этикетки диска. – № гос. регистрации. – ISBN 978-5-93057-887-4. – Текст. Изображение.

Настоящее электронное издание представляет собой учебное пособие, включающее в себя курс лекций по разделу теоретической механики «Динамика». В издании изложены основы динамики точки и механической системы. Освещение теории сопровождается примерами подробного решения типовых задач по всем основным темам с рекомендациями задач для самостоятельного решения.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теоретическая механика» и предназначено для студентов первого и второго курсов всех направлений (профилей).

Рецензенты:
А.М. Бубенчиков, докт. физ.-мат. наук, профессор ТГУ;
А.А. Глазунов, докт. физ.-мат. наук, директор НИИ ПММ;
О.И. Данейко, канд. физ.-мат. наук, доцент ТГАСУ.

ISBN 978-5-93057-887-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1. Основные законы динамики

Древние учёные имели смутное представление о законах движения. Аристотель (384–322 гг. до н. э.) не знал ещё закона инерции и считал, что с прекращением действия силы тела прекращают двигаться. И только Галилей открыл один из основных законов движения, устанавливающий, что всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешние силы не выведут его из этого состояния. Галилей использовал этот закон для объяснения различных явлений, хотя универсальной формулировки он ему не дал. Только гениальный Ньютон в своем трактате «Математические начала натуральной философии» сформулировал этот закон применительно к материальной точке.

Первый закон Ньютона (закон инерции)

Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет своё состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не заставят её изменить это состояние.

Все системы отсчёта, по отношению к которым выполняется закон инерции, называются *инерциальными*. Опытным путём установлено, что весьма близкой к инерциальной является система отсчёта, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые «неподвижные» звёзды. Эта система называется *гелиоцентрической*. При решении большинства технических задач инерциальной можно считать систему отсчёта, жёстко связанную с Землей.

Второй закон Ньютона (основной закон динамики)

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе и имеет одинаковое с ней направление, или другая формулировка закона: *произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной* *силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается таким векторным равенством:

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m},$$

$$\text{или} \quad m\overline{a} = \overline{F}. \qquad (1.1)$$

Здесь m – масса материальной точки; $\overline{a}$ – её ускорение; $\overline{F}$ – сила, приложенная к данной точке.

Из равенства (1.1) видно, что чем больше масса материальной точки, тем меньше её ускорение. По Эйлеру, ***массой тела*** *называется «величина заключённой в теле инерции, вследствие которой тело стремится сохранить своё состояние и противодействовать всякому его изменению»* [13].

Ньютон определил массу как ***количество вещества в теле***, что вполне отвечает современному представлению о строении физической материи.

Следовательно, с одной стороны, масса тела определяется как мера его инертности. С другой стороны, как известно, термин ***«масса»*** *употребляется как способность тела создавать поле тяготения и испытывать действие силы в этом поле* (*тяготеющая или гравитационная масса*). Значит, инертность и способность создавать поле тяготения представляют два различных свойства массы, которые всегда существуют совместно.

В классической механике масса движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, то есть масса рассматривается как постоянная величина, являющаяся мерой инертности тела и его гравитационных свойств.

При свободном падении на Землю в пустоте тело массой m движется под действием силы тяжести $\overline{G}$ с ускорением свободного падения $\overline{g}$.

Поэтому на основании второго закона Ньютона можно записать:

$$m\overline{g} = \overline{G}, \tag{1.2}$$

или в скалярной форме $m = \dfrac{G}{g}$, то есть ***масса материального тела*** *равна его силе тяжести, делённой на ускорение свободного падения в данном месте земной поверхности.* Так как ускорение свободного падения различается в зависимости от местности, то, в отличие от массы, его сила тяжести не является величиной постоянной.

Третий закон Ньютона (закон равенства действия и противодействия)

Всякому действию всегда соответствует равное и противоположно направленное противодействие, другими словами – *действия двух тел друг на друга всегда равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны.*

Дадим некоторое разъяснение этому закону. Сила, представляющая воздействие одного тела (нескольких тел) на рассматриваемое точечное тело, именуется по Ньютону ***действием***. И обратно, сумма сил, характеризующих воздействие этого точечного тела на все сторонние – ***противодействием***. Постулирование равенства и противоположной направленности по одной прямой действия и противодействия всегда и при всех обстоятельствах движения, а также равновесия тел в классической механике и составляет содержание третьего закона Ньютона.

Отсюда следует, что силы в механике Ньютона встречаются лишь попарно, с точностью до знака, векторно равные друг другу, приложенные, однако, к разным, но взаимодействующим телам, следовательно, силы действия и противодействия не являются уравновешенной системой сил.

Если действие представляет собой произвольную систему сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу, то, пользуясь методами геометрической статики, можно заменить эту систему эквивалентной ей динамой [2]. Очевидно, что противодействие в данном случае будет эквивалентно такой же динаме, но уже противоположного знака.

В случае контактного взаимодействия (***близкодействие***), например, одно тело давит на другое, соприкасаясь с ним по некоторой части поверхности или, что допускается для абсолютно твёрдых тел, в одной или нескольких точках. Если считать действием силу давления на первое тело со стороны второго, то противодействием будет сила, развиваемая первым телом и приложенная уже ко второму.

Наряду с контактным взаимодействием (близкодействие) в классической механике рассматривается и взаимодействие тел на расстоянии – ***дальнодействие***. Примерами дальнодействия являются и всемирное тяготение, и взаимодействие зарядов и электрических токов. Например, силу $\overline{F}$ – меру притяжения первого тела ко второму можно посчитать действием, а силу $\overline{F}'$ – тяготения второго тела к первому – противодействием. Сила $\overline{F}$ (действие) приложена к первому телу, а сила $\overline{F}'$ (противодействие) ко второму, причём $\overline{F} = -\overline{F}'$. Разумеется, в зависимости от точки зрения исследователя наименование действия и противодействия можно менять местами.

Четвёртый закон динамики (закон независимости действия сил)

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают ей ускорение, равное векторной сумме тех ускорений, которые сообщила бы этой точке каждая из сил в отдельности.

Этот закон не был сформулирован Ньютоном как отдельный закон механики, но он содержится в сделанном им обобщении правила параллелограмма сил.

Пусть под действием системы сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$ точка приобрела ускорение $\overline{a}$ (рис. 1.1, *а*), а под действием каждой из сил в отдельности – ускорения $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

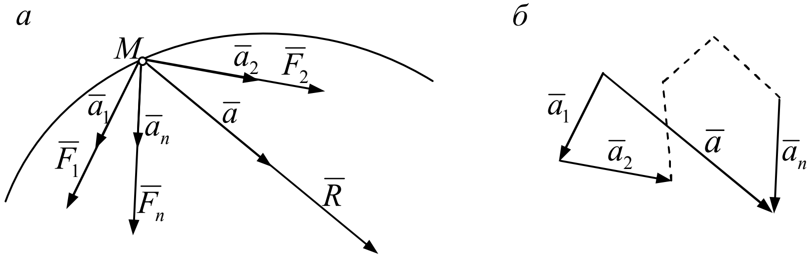

Рис. 1.1

В соответствии с законом независимости действия сил можно записать:

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n . \qquad (1.3)$$

Векторное равенство (1.3) показано на рис. 1.1, *б*.

Умножая последнее векторное равенство на массу материальной точки, получим

$$m\overline{a} = m\overline{a}_1 + m\overline{a}_2 + ... + m\overline{a}_n. \qquad (1.4)$$

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\overline{a}_1 = \overline{F}_1, \quad m\overline{a}_2 = \overline{F}_2, ..., \quad m\overline{a}_n = \overline{F}_n. \qquad (1.5)$$

Подставив значения (1.5) в уравнение (1.4), получим

$$m\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_i . \qquad (1.6)$$

Это равенство называется ***основным уравнением динамики точки*** в случае действия нескольких сил. Как известно из статики [2], система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$, приложенная к одной точке, представляет собой систему сходящихся сил, которую можно заменить эквивалентной ей силой – равнодействующей $\overline{R}$:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i. \tag{1.7}$$

Тогда равенство (1.6) можно записать так:

$$m\overline{a} = \overline{R}. \tag{1.8}$$

Рис. 1.1, *б* демонстрирует полученное равенство (1.8).

Итак, сформулированы основные законы динамики – законы Галилея–Ньютона, которые лежат в основе классической механики. У современного человека могут возникнуть сомнения: «Нет ли элементов ретроградства при изучении теоретической механики?». Для ответа на этот вопрос можно привести слова гениального Анри Пуанкаре (1909 г.), которые актуальны и теперь: «Классическая механика будет и в будущем так же необходима, как и теперь, и тот, кто не будет знать её основательно, не будет в состоянии понять и новую механику» [11]. А вот мнение Альберта Эйнштейна: «…не следует думать, что великое творение Ньютона можно реально ниспровергнуть этой (теорией относительности) или какой-нибудь другой теорией. Его ясные и всеобъемлющие идеи навсегда сохранят свое уникальное значение как фундамента, на котором построено здание современной физики» [14].

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные законы динамики.
2. Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3. Что называется массой тела?
4. Зависит ли сила тяжести тела от его местонахождения на Земле?
5. Какую систему отсчёта называют инерциальной?

1.2. Динамика свободной материальной точки

1.2.1. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых и естественных осях координат

Рассмотрим движение свободной материальной точки под действием приложенной к ней системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ (рис. 1.2).

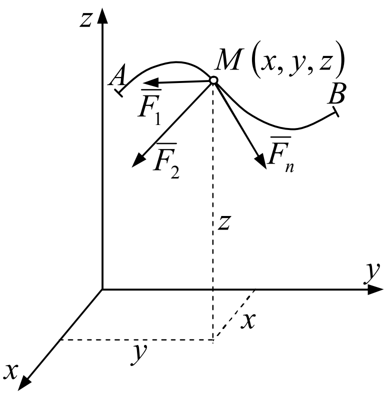

Рис. 1.2

Движение материальной точки *M* будем рассматривать по отношению к неподвижной системе отсчёта – прямоугольной системе декартовых осей координат *Oxyz*. Тогда основное уравнение динамики для рассматриваемой точки имеет вид:

$$m\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_i \, . \qquad (2.1)$$

Проецируя обе части векторного равенства (2.1) на координатные оси, получим

$$\begin{cases} ma_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum F_{ix}, \\ ma_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum F_{iy}, \\ ma_z = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum F_{iz}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Из кинематики [1] известно, что проекции ускорения точки на декартовы оси координат равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки. Поэтому равенства (2.2) примут вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \\ m\ddot{z} = \sum F_{iz}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) называются ***дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых осях координат***. Впервые эти уравнения были записаны К. Маклореном (1698–1746).

Во многих случаях описание движения материальной точки в неподвижных декартовых осях координат бывает неудобно, поэтому приходится пользоваться другими системами координат, в которых это движение описывается более просто.

Одна из таких систем – подвижная система естественных осей координат (касательная, главная нормаль и бинормаль). Проекции ускорения точки на естественные оси координат имеют вид [1]:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим движение свободной материальной точки M по отношению к подвижной системе отсчета – системе прямоугольных естественных осей координат $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ (рис. 1.3).

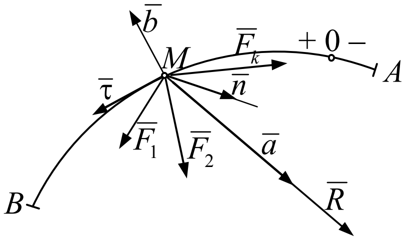

Рис. 1.3

Спроецируем обе части векторного равенства (1.8) на естественные оси координат, получим

$$\begin{cases} ma_\tau = \sum F_i \cdot \cos\left(\overline{F}_i, \overline{\tau}\right), \\ ma_n = \sum F_i \cdot \cos\left(\overline{F}_i, \overline{n}\right), \\ ma_b = \sum F_i \cdot \cos\left(\overline{F}_i, \overline{b}\right). \end{cases} \qquad (2.5)$$

Подставляя проекции ускорения точки на естественные оси координат (2.4) в уравнения (2.5), получим

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = \sum F_i \cdot \cos\left(\overline{F}_i, \overline{\tau}\right), \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = \sum F_i \cdot \cos\left(\overline{F}_i, \overline{n}\right), \\ 0 = \sum F_i \cdot \cos\left(\overline{F}_i, \overline{b}\right). \end{cases} \qquad (2.6)$$

Уравнения (2.6) называются ***естественными уравнениями движения материальной точки***. Из этих уравнений видно, что сумма проекций всех сил на главную нормаль всегда положительна, а сумма проекций всех сил на бинормаль – равна нулю.

Таким образом, равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку, всегда расположена в соприкасающейся плоскости и направлена в сторону вогнутости траектории, а, следовательно, полное ускорение точки также лежит в соприкасающейся плоскости и направлено в сторону вогнутости траектории. Это утверждение нам известно ещё из кинематики [1].

Если действующая на материальную точку сила направлена по нормали к траектории в каждый момент времени, то её проекция на касательную $\overline{F}_{\tau} = 0,$ касательное ускорение $a_{\tau} = 0,$ $\Rightarrow V = \text{const},$ то есть точка движется равномерно. Если же сила направлена по касательной к траектории, то её проекция на нормаль $\overline{F}_n = 0,$ $\Rightarrow$ $\dfrac{mV^2}{\rho} = 0$ и если V не равна тождественно нулю, то траектория точки – прямая линия $(\rho = \infty)$.

1.2.2. Две основные задачи динамики точки

Множество задач динамики точки можно разбить на два больших класса.

Первая задача динамики. *Зная массу материальной точки и уравнения её движения, например, в декартовых координатах:*

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \tag{2.7}$$

найти модуль и направление равнодействующей $\overline{R}$ *сил, приложенных к точке.*

Для решения этой задачи необходимо дважды продифференцировать уравнения (2.7), найдя таким образом проекции ускорения точки на декартовы оси координат, затем записать проекции равнодействующей на эти оси и, наконец, найти её модуль и направление по известным формулам [2]. Это решение имеет такой вид:

$$R_x = m\ddot{x}, \ \ R_y = m\ddot{y}, \ \ R_z = m\ddot{z};$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=m\sqrt{(\ddot{x})^2+(\ddot{y})^2+(\ddot{z})^2}\,;$$

$$\cos(\overline{R},\bar{i})=\frac{R_x}{R},\quad \cos(\overline{R},\bar{j})=\frac{R_y}{R},\quad \cos(\overline{R},\bar{k})=\frac{R_z}{R}\,. \qquad (2.8)$$

Пример. Уравнение движения точки M массой m имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos kt, \\ y = r\sin kt, \end{cases}$$

где r и k – постоянные величины. Определить равнодействующую сил, приложенных к точке.

Решение. Исключая время t из уравнений движения, находим уравнение траектории точки:

$$x^2+y^2=r^2\,.$$

Следовательно, траектория точки – окружность радиуса r (рис. 1.4). Проекции ускорения точки M на декартовы оси координат будут равны

$$a_x=\ddot{x}=-k^2r\cos kt,$$

$$a_y=\ddot{y}=-k^2r\sin kt.$$

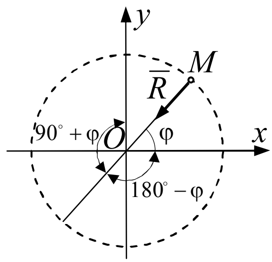

Рис. 1.4

Тогда проекции равнодействующей $\overline{R}$ на декартовы оси координат будут равны

$$R_x=m\ddot{x}=-mk^2r\cos kt,$$

$$R_y=m\ddot{y}=-mk^2r\sin kt.$$

Модуль и направление силы $\overline{R}$ запишутся по известным из статики [2] формулам:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=mk^2r\sqrt{\cos^2 kt+\sin^2 kt}=mk^2r,$$

$$\cos(\overline{R},\bar{i})=\frac{R_x}{R}=-\cos kt=-\cos\varphi,$$

$$\cos\left(\overline{R},\bar{j}\right)=\frac{R_y}{R}=-\sin kt=-\sin\varphi .$$

Следовательно, углы, составляемые вектором силы $\overline{R}$ с положительным направлением декартовых осей координат, имеют значения:

$$\angle\left(\overline{R},\bar{i}\right)=180^\circ-\varphi,\qquad \angle\left(\overline{R},\bar{j}\right)=90^\circ+\varphi ,$$

то есть в любой момент времени сила $\overline{F}$ направлена к началу координат (рис. 1.4).

Вторая задача динамики. *Зная силы, действующие на материальную точку, её массу, а также начальное положение точки и её начальную скорость, найти уравнения движения точки.*

Для решения этой задачи необходимо уравнения (2.3) дважды проинтегрировать при заданных начальных условиях.

При интегрировании каждого дифференциального уравнения появляются две произвольные постоянные интегрирования, а потому при интегрировании трёх уравнений будет шесть постоянных, которые определяются из начальных условий:

$$\text{при } t=t_0 \qquad \begin{cases} x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0, \\ \dot{x}=\dot{x}_0,\ \dot{y}=\dot{y}_0,\ \dot{z}=\dot{z}_0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Затем полученные константы подставляют в общее решение дифференциальных уравнений и получают уравнения движения материальной точки в следующем виде:

$$\begin{cases} x=f_1\left(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0\right), \\ y=f_2\left(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0\right), \\ z=f_3\left(t,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0\right). \end{cases} \tag{2.10}$$

Заметим, что почти во всех примерах традиционного курса теоретической механики, относящихся ко второй задаче динамики, встречаются два вида дифференциальных уравнений:

уравнения с разделяющимися переменными и линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. В этих задачах для понижения порядка дифференциального уравнения можно использовать одну из следующих подстановок:

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dV_x}{dt}$ (первая подстановка), (2.11)

2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{dV_x}{dt}\dfrac{dx}{dx} = V_x\dfrac{dV_x}{dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dV_x^2}{dx}$ (вторая подстановка). (2.12)

Процесс интегрирования дифференциальных уравнений материальной точки рассмотрим на конкретных примерах.

1.2.3. Примеры решения второй задачи динамики

Решение задач методом интегрирования дифференциальных уравнений движения точки сводится к следующим операциям.

1. ***Составление дифференциальных уравнений движения материальной точки***.

Для этого необходимо начертить расчётную схему, а именно:

а) выбрать начало отсчёта, провести координатные оси, причём в случае прямолинейного движения ось провести вдоль линии по направлению движения точки;

б) изобразить точку в произвольный момент времени и показать все действующие на неё силы;

в) записать сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей и подставить эти суммы в дифференциальные уравнения (2.3).

При этом все переменные силы надо выразить через те величины, от которых они зависят. В задачах настоящего курса силы, входящие в правую часть уравнений (2.3), могут быть постоянными величинами, а также зависеть от времени t, от положения точки, то есть от её координат, или от скорости V.

2. *Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки*.

Интегрирование производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида полученного дифференциального уравнения.

3. *Определение постоянных интегрирования*.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, данных в условиях задачи (начальное положение точки, её начальная скорость).

4. *Нахождение искомых в задаче величин и анализ полученных результатов*.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры, в которых сила либо постоянна, либо зависит от скорости, времени или от положения точки в пространстве.

Пример 1. *Сила постоянна. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учёта сопротивления воздуха.*

Изучим движение тела, брошенного с начальной скоростью $\overline{V}_0$ под углом α к горизонту, рассматривая его как материальную точку массой m. При этом сопротивлением воздуха пренебрегаем, а поле силы тяжести будем считать однородным, следовательно, на материальную точку в данном случае действует одна постоянная сила – сила тяжести (рис. 1.5).

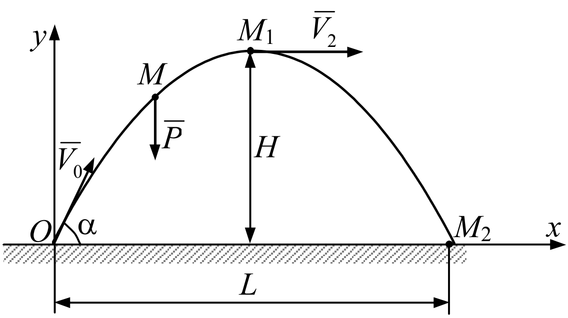

Рис. 1.5

Решение. Поместим начало координат O в начальное положение точки. Ось Oy направим вертикально вверх, а ось Ox – по горизонтали вправо. Тогда угол между вектором $\overline{V_0}$ и осью Ox будет α. Начальные условия в нашей задаче будут иметь такой вид:

$$\text{при } t_0 = 0 \qquad \begin{cases} x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \\ \dot{x}_0 = V_{0x} = V_0 \cos\alpha, \\ \dot{y}_0 = V_{0y} = V_0 \sin\alpha. \end{cases} \tag{2.13}$$

Изобразим движущуюся точку M на траектории в произвольный момент времени (рис. 1.5). На точку действует одна сила – сила тяжести $\overline{P}$, проекции которой на оси координат равны:

$$P_x = 0, \;\; P_y = -P = -mg.$$

Составим дифференциальные уравнения движения точки под действием силы $\overline{P}$ в декартовых координатах:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum X_i = 0, \\ m\ddot{y} = \sum Y_i = -mg. \end{cases} \tag{2.14}$$

Сократив уравнения (2.14) на массу m, получим проекции ускорения точки на декартовы оси координат:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g. \tag{2.15}$$

Сначала проинтегрируем дважды по времени t дифференциальное уравнение движения точки вдоль оси x:

$$\dot{x} = c_1, \Rightarrow \; x = c_1 t + c_2. \tag{2.16}$$

Затем определим постоянные интегрирования c_1 и c_2, подставив в уравнение (2.16) начальные условия (2.13), получим

$$c_1 = V_0 \cos\alpha, \quad c_2 = 0.$$

При найденных значениях констант c_1 и c_2 уравнения (2.16) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = V_0 \cos\alpha, \\ x = V_0\, t \cos\alpha. \end{cases} \tag{2.17}$$

Уравнения (2.17) показывают, что проекция скорости точки на горизонтальную ось постоянна, и горизонтальное перемещение точки совершается по закону равномерного движения.

Теперь проинтегрируем дважды по t дифференциальное уравнение $\ddot{y} = -gt$, получим

$$\begin{cases} \dot{y} = -gt + c_3, \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4. \end{cases} \tag{2.18}$$

Постоянные интегрирования c_3 и c_4 определим, удовлетворяя начальным условиям (2.13), в результате получим

$$c_3 = V_0 \sin\alpha, \quad c_4 = 0.$$

При найденных значениях c_3 и c_4 уравнения (2.18) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y} = V_0 \sin\alpha - gt, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Уравнения (2.19) показывают, что вертикальное движение точки является равнопеременным. При подъеме оно замедленное, так как направление вертикальной составляющей скорости и ускорения свободного падения g противоположны, а при спуске – ускоренное, так как эти направления совпадают.

Таким образом, уравнения движения материальной точки M имеют вид

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos\alpha, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases} \tag{2.20}$$

Полученные уравнения движения точки позволяют методами кинематики определить различные характеристики движения (траекторию, время полёта точки и т. д.).

1. ***Траектория точки***. Исключив параметр t из уравнений движения точки (2.20), получим уравнение траектории:

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (2.21)$$

Это уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси Oy (рис. 1.5). Таким образом, *тяжёлая материальная точка, брошенная под углом* α *к горизонту, движется по параболе, если сопротивление среды не учитывается.* Этот факт был впервые установлен Галилеем.

2. ***Время полёта***. Время полёта тела установим из второго уравнения системы (2.20) при условии $y = 0$:

$$V_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

$$t\left(V_0\sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0.$$

Отсюда получим два значения момента времени t: момент вылета $t_0 = 0$ и момент падения, который и определяет полное время падения T:

$$T = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}.$$

3. ***Горизонтальная дальность полёта***. Дальность полёта L определим, подставив значение T в первое уравнение системы (2.20):

$$L = x_{t=T} = V_0\cos\alpha\cdot\frac{2V_0\sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}. \qquad (2.22)$$

Полученная формула (2.22) показывает, что дальность полёта тела при одной и той же скорости вылета тела V_0 зависит от угла α и будет наибольшей, очевидно, при $\alpha = 45^\circ$.

4. ***Высота траектории***. Наибольшую высоту подъёма H при заданной начальной скорости V_0 и угле α можно определить из условия, что в наивысшей точке M_1 (рис. 1.5) проекция скорости на ось y равна нулю:

$$V_{1y} = \dot{y}_1 = V_0 \sin\alpha - g t_1 = 0,$$

откуда время подъёма точки в наивысшее положение равно

$$t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}. \tag{2.23}$$

Подставив значение t_1 во второе уравнение системы (2.20), получим

$$H = y_{t=t_1} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{2.24}$$

Модуль скорости точки M мы можем найти в любой момент времени по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Её направление определим через направляющие косинусы:

$$\cos\left(\overline{V}, x\right) = \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\cos\left(\overline{V}, y\right) = \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Пример 2. *Сила зависит от скорости*. Тело падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R = k^2 P V^2$, где V – скорость тела; P – сила тяжести тела; $k^2 P$ – коэффициент пропорциональности. Найти закон изменения скорости $V(t)$, её предельное значение и закон движения тела $x(t)$.