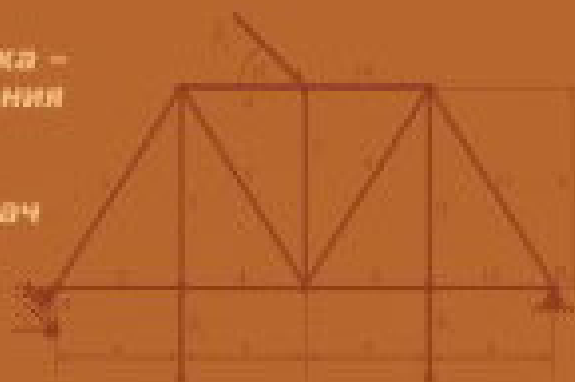


В. Д. Бертяев

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv \overline{OM}(t)$$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НА БАЗЕ **MATHCAD** ПРАКТИКУМ

- Кинематика, статика, динамика – основные понятия и определения
- Большое количество специально подобранных задач
- Методология решения задач средствами пакета *Mathcad*
- Основы работы в *Mathcad*
- Возможность использования при дневной, вечерней и заочной формах обучения студентами высших и средних специальных заведений



$$I_{\xi} = \sum_k m_k d_k^2$$

$$a_m(1) := \text{vector5} (R_M(1)_1, R_M(1)_2, a_M(1)_1, a_M(1)_2, M_a)$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Виталий Бертяев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НА БАЗЕ **MATHCAD ПРАКТИКУМ**

*Допущено учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по машиностроительным специальностям*

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
Б52

Бертяев В. Д.

Б52 Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 752 с.: ил.

ISBN 5-94157-625-0

В пособии рассматриваются решения большого количества разнообразных задач основных разделов курса (кинематики, статики, динамики) с помощью Mathcad. Основные теоретические сведения по каждому разделу даны конспективно, в качестве справочного материала. Особое внимание уделено применению Mathcad для анализа поведения механических систем на основе полученного решения. Приводятся тексты рабочих документов Mathcad с решениями задач. Изложены основы работы с Mathcad; представлен его интерфейс, вычислительные и аналитические возможности, подробно рассмотрены вопросы графического отображения получаемых с помощью Mathcad решений; дано введение в программирование на языке Mathcad; представлены часто используемые в механике твердого тела функции, операторы и объекты.

Для студентов и преподавателей высших и средних технических учебных заведений всех форм обучения

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

| | |
|-------------------------|------------------------------|
| Главный редактор | <i>Екатерина Кондукова</i> |
| Зам. главного редактора | <i>Людмила Еремеевская</i> |
| Зав. редакцией | <i>Григорий Добин</i> |
| Редактор | <i>Леонид Кочин</i> |
| Компьютерная верстка | <i>Екатерины Трубниковой</i> |
| Корректор | <i>Татьяна Кошелева</i> |
| Дизайн обложки | <i>Игоря Цырульникова</i> |
| Зав. производством | <i>Николай Тверских</i> |

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 31.08.05.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 60,63.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"

199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-625-0

© Бертяев В. Д., 2005

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2005

Содержание

| | |
|--|------------|
| Введение | 1 |
| ЧАСТЬ I. КИНЕМАТИКА | 5 |
| Глава 1. Кинематика точки | 9 |
| Основные понятия и определения | 9 |
| Пример 1.1. Определение кинематических характеристик точки по заданному закону движения | 12 |
| Пример 1.2. Нахождение закона движения и кинематических характеристик точки колеса, катящегося без скольжения | 24 |
| Пример 1.3. Нахождение закона движения точки шатуна кривошипно-шатунного механизма | 34 |
| Пример 1.4. Нахождение закона движения точки камня в кулисном механизме | 38 |
| Глава 2. Кинематика твердого тела | 45 |
| Основные понятия и определения | 45 |
| Простейшие движения | 45 |
| Сферическое движение | 47 |
| Пример 2.1. Определение кинематических характеристик поступательного движения | 49 |
| Пример 2.2. Определение кинематических характеристик вращательного движения ... | 53 |
| Пример 2.3. Определение кинематических характеристик сферического движения | 60 |
| Глава 3. Сложное движение точки | 75 |
| Основные понятия и определения | 75 |
| Пример 3.1. Определение кинематических характеристик точек шатуна механизма с качающимся цилиндром | 77 |
| Пример 3.2. Определение кинематических характеристик точек камня кулисного механизма | 89 |
| Глава 4. Плоскопараллельное движение твердого тела | 105 |
| Общие положения | 105 |
| Пример 4.1. Определение кинематических характеристик звеньев и точек кривошипно-шатунного механизма | 107 |

| | |
|---|------------|
| Пример 4.2. Определение кинематических характеристик звеньев и точек шарнирного четырехзвенника | 114 |
| Пример 4.3. Определение кинематических характеристик звеньев и точек механизма с качающимся цилиндром | 124 |
| Пример 4.4. Определение кинематических характеристик точек колеса планетарного механизма | 137 |
| Глава 5. Кинематика плоских механизмов | 143 |
| Постановка задачи | 143 |
| Уравнения геометрических связей | 144 |
| Определение законов движения звеньев механизма | 148 |
| Аналитический метод | 148 |
| Численный метод | 152 |
| Определение угловых и линейных скоростей и ускорений звеньев | 155 |
| Определение скоростей и ускорений узловых точек | 159 |
| Численная реализация поставленной задачи | 159 |
| ЧАСТЬ II. СТАТИКА | 179 |
| Глава 6. Основные понятия и определения статики | 183 |
| Аксиомы статики | 183 |
| Аксиома о равновесии системы двух сил | 183 |
| Аксиома о добавлении (отбрасывании) уравновешенной системы сил | 183 |
| Следствие | 183 |
| Аксиома параллелограмма сил | 184 |
| Аксиома о равенстве сил действия и противодействия | 185 |
| Аксиома затвердевания | 185 |
| Аксиома освобождаемости от связей | 186 |
| Примеры связей и их реакций | 186 |
| Сложение и разложение сил. Проекция силы на ось | 187 |
| Момент силы. Пара сил | 189 |
| Момент силы относительно точки на плоскости | 189 |
| Векторное представление момента силы | 190 |
| Пара сил. Момент пары | 190 |
| Произвольная пространственная система сил | 192 |
| Основная теорема статики | 192 |
| Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона) | 192 |
| Условия равновесия произвольной системы сил | 192 |
| Различные типы систем сил и условия их равновесия | 193 |
| Дополнительные формы условий равновесия плоской системы сил | 194 |
| Распределенные силы | 194 |
| Частные случаи распределенных нагрузок | 196 |
| Распределенная нагрузка, направленная под углом α | 196 |
| Статически определимые и статически неопределимые задачи | 196 |
| Глава 7. Равновесие одного тела | 199 |
| Пример 7.1. Равновесие произвольной плоской системы сил | 199 |
| Пример 7.2. Равновесие пространственной системы сил | 210 |

| | |
|--|------------|
| Глава 8. Равновесие системы тел | 227 |
| Пример 8.1. Равновесие двух тел | 228 |
| Пример 8.2. Равновесие трех тел | 238 |
| Глава 9. Расчет плоских ферм | 259 |
| Пример 9.1 | 260 |
| ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА | 275 |
| Глава 10. Динамика материальной точки | 279 |
| Динамика свободной материальной точки | 279 |
| Законы механики Галилея-Ньютона | 279 |
| 1. Закон инерции | 279 |
| 2. Основной закон динамики точки | 280 |
| 3. Закон о равенстве сил действия и противодействия | 280 |
| 4. Принцип суперпозиции (закон независимого действия сил) | 281 |
| Дифференциальные уравнения движения материальной точки | 281 |
| Классификация задач динамики | 282 |
| Первая основная задача динамики | 282 |
| Вторая основная задача динамики | 282 |
| Пример 10.1. Вертикальное движение материальной точки | 283 |
| Пример 10.2. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту | 297 |
| Динамика несвободной материальной точки | 315 |
| Пример 10.3. Колебания математического маятника | 318 |
| Пример 10.4. Движение сферического маятника | 324 |
| Динамика относительного движения точки | 330 |
| Принцип относительности Галилея. Относительный покой | 332 |
| Сила веса и сила тяжести | 332 |
| Пример 10.5. Вертикальное движение точки относительно Земли | 335 |
| Пример 10.6. Маятник Фуко | 341 |
| Глава 11. Основы динамики механических систем | 353 |
| Основные понятия и определения | 353 |
| Связи и их классификация | 353 |
| Возможные (виртуальные) перемещения | 354 |
| Обобщенные координаты. Число степеней свободы системы | 354 |
| Центр масс | 354 |
| Моменты инерции твердых тел | 355 |
| Количество движения | 356 |
| Кинетический момент | 357 |
| Кинетическая энергия | 358 |
| Элементарный и полный импульс силы | 359 |
| Работа силы | 359 |
| Силовое поле, силовая функция, потенциальная энергия | 360 |
| Силы инерции. Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы | 361 |
| Обобщенные силы | 362 |
| Введение в динамику механической системы | 362 |
| Дифференциальные уравнения движения механической системы | 363 |

| | |
|---|------------|
| Общие теоремы динамики | 364 |
| Теорема о движении центра масс | 364 |
| Теорема об изменении количества движения | 364 |
| Теорема об изменении главного вектора кинетического момента..... | 364 |
| Теорема о кинетическом моменте в относительном движении по отношению к центру масс..... | 365 |
| Теорема об изменении кинетической энергии | 365 |
| Закон сохранения механической энергии для точки и системы..... | 365 |
| Принцип Даламбера | 366 |
| Принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений) | 366 |
| Общее уравнение динамики | 367 |
| Уравнения Лагранжа II рода | 367 |
| Глава 12. Динамика твердого тела | 369 |
| Дифференциальные уравнения движения твердых тел | 369 |
| Поступательное движение | 369 |
| Вращательное движение вокруг неподвижной оси | 370 |
| Нахождение реакций в подшипниках | 370 |
| Плоское движение | 372 |
| Пример 12.1. Колебания физического маятника | 373 |
| Пример 12.2. Экспериментальное определение центра масс и моментов инерции твердого тела..... | 383 |
| Пример 12.3. Динамика вращательного движения твердого тела | 388 |
| Пример 12.4. Динамика плоского движения твердого тела..... | 399 |
| Глава 13. Динамика плоских шарнирных механизмов | 407 |
| Постановка задачи Equation | 407 |
| Исследование движения механизма | 409 |
| Составление кинематических соотношений..... | 409 |
| Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью теоремы об изменении кинетической энергии..... | 411 |
| Численное решение дифференциального уравнения движения механизма..... | 413 |
| Нахождение реакций внешних и внутренних связей механизма | 421 |
| Элементы оптимизации работы плоских механизмов | 427 |
| Глава 14. Основы теории колебаний | 433 |
| Основные понятия и определения | 433 |
| Потенциальная энергия системы | 435 |
| Кинетическая энергия системы..... | 436 |
| Диссипативная функция Рэлея | 436 |
| Уравнение Лагранжа II рода..... | 437 |
| Свободные колебания системы..... | 438 |
| Затухающие колебания системы..... | 439 |
| Вынужденные колебания системы | 441 |
| Исследование вынужденных колебаний | 445 |
| Резонанс..... | 445 |
| Бииения | 447 |
| Критерии и условия, используемые при исследовании колебательных движений механических систем | 448 |

| | |
|--|------------|
| Коэффициент динамичности | 449 |
| Коэффициент передачи силы | 452 |
| Условия, обеспечивающие соответствие движений механических систем их математической модели | 455 |
| Приближенное решение | 459 |
| Исследование механической системы с одной степенью свободы | 460 |
| Определение закона движения механической системы | 461 |
| Определение реакций внешних и внутренних связей | 465 |
| Исследование механической системы | 468 |
| Результаты оптимизации | 486 |
| Анализ результатов оптимизации | 490 |
| ЧАСТЬ IV. ПРИЛОЖЕНИЯ | 491 |
| Приложение 1. ОСНОВЫ РАБОТЫ С ПАКЕТОМ MATHCAD | 493 |
| П1.1. Общая характеристика пакета Mathcad | 493 |
| П1.1.1. Системные требования к Mathcad 11 | 494 |
| П1.1.2. Особенности версии Mathcad 11 Enterprise Edition | 494 |
| П1.2. Пользовательский интерфейс Mathcad | 496 |
| П1.2.1. Окно Mathcad | 496 |
| П1.2.2. Главное меню | 497 |
| П1.2.3. Панели инструментов | 497 |
| П1.2.4. Контекстное меню | 500 |
| П1.2.5. Настройка панелей инструментов | 501 |
| П1.3. Основы работы в Mathcad | 502 |
| П1.3.1. Средства редактирования | 503 |
| Визир | 504 |
| Текстовый курсор ввода | 505 |
| Математический маркер ввода (выделяющая рамка) | 505 |
| П1.3.2. Создание и редактирование выражений | 507 |
| Переменные и функции | 508 |
| Определение дискретного аргумента | 511 |
| Редактирование выражений и операторов | 512 |
| Форматирование выражений | 514 |
| П1.3.3. Ввод объектов | 514 |
| П1.3.4. Использование встроенных функций | 517 |
| П1.3.5. Работа с размерными величинами | 518 |
| П1.3.6. Работа с блоками документа | 521 |
| Выделение областей | 522 |
| Копирование, перемещение и удаление областей | 523 |
| Выравнивание областей | 523 |
| П1.4. Основы аналитических преобразований | 524 |
| П1.5. Работа с матрицами | 535 |
| П1.5.1. Ввод матриц и векторов | 536 |
| П1.5.2. Операции с векторами и матрицами | 538 |
| П1.5.3. Матричные функции | 540 |
| П1.5.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений | 541 |

| | |
|--|------------|
| П1.6. Построение графиков | 542 |
| П1.6.1. Двумерные (2D) графики | 544 |
| Форматирование 2D-графиков | 549 |
| П1.6.2. Трехмерные (3D) графики | 553 |
| Форматирование 3D-графиков | 561 |
| Управление изображением графика с помощью мыши | 571 |
| П1.6.3. Построение 3D-графиков с помощью специальных функций | 571 |
| П1.7. Решение нелинейных уравнений | 574 |
| П1.7.1. Уравнение с одним неизвестным | 574 |
| Пример | 577 |
| Пример 1 (Неудачный выбор начального приближения) | 577 |
| Пример 2 (Пример удачного выбора начального приближения) | 578 |
| Пример 3 (Использование метода замены переменной) | 578 |
| П1.7.2. Блок решения <i>Given</i> и системы нелинейных уравнений | 580 |
| Пример 1 (Неудачный выбор начального приближения) | 582 |
| Пример 2 (Метод замены переменной) | 583 |
| П1.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения | 585 |
| П1.8.1. Блок <i>Given</i> для решения ОДУ | 585 |
| Решение задачи Коши | 587 |
| Решение краевой задачи | 589 |
| П1.8.2. Решение ОДУ с помощью специальных функций | 592 |
| Задача Коши | 593 |
| Краевая задача | 599 |
| П1.9. Основы программирования | 602 |
| П1.9.1. Примеры функций, используемых в механике | 609 |
| Дифференцирование и интегрирование векторов | 609 |
| П1.9.2. Функции для рисования векторов и символов | 616 |
| П1.10. Расширенные возможности Mathcad | 623 |
| П1.10.1. Создание анимационного клипа | 623 |
| П1.10.2. Элементы управления | 626 |
| Приложение 2 | 639 |
| П2.1. Команды главного меню | 639 |
| Меню <i>File</i> (Файл) | 639 |
| Меню <i>Edit</i> (Правка): | 640 |
| Меню <i>View</i> (Вид) | 641 |
| Подменю <i>Toolbars</i> (Панели инструментов) | 642 |
| Меню <i>Insert</i> (Вставка) | 643 |
| Подменю <i>Graph</i> (График) | 644 |
| Подменю <i>Data</i> (Данные) | 645 |
| Подменю <i>Control</i> (Элементы управления) | 646 |
| Меню <i>Format</i> (Формат) | 646 |
| Подменю <i>Graph</i> (Графика) | 648 |
| Подменю <i>Color</i> (Цвет) | 648 |
| Подменю <i>Area</i> (Зона) | 648 |
| Подменю <i>Align regions...</i> (Выровнять области) | 649 |

| | |
|---|------------|
| Меню <i>Tools</i> (Сервис) | 649 |
| Подменю <i>Animation</i> (Анимация) | 650 |
| Подменю <i>Calculate</i> (Вычисление) | 650 |
| Подменю <i>Optimize</i> (Оптимизация) | 651 |
| Меню <i>Symbolic</i> (Символика): | 651 |
| Подменю <i>Evaluate</i> (Вычислить) | 652 |
| Подменю <i>Variable</i> (Переменная) | 652 |
| Подменю <i>Matrix</i> (Матрица) | 653 |
| Подменю <i>Transform</i> (Преобразования) | 654 |
| Меню <i>Window</i> (Окно) | 654 |
| Меню <i>Help</i> (Справка) | 655 |
| Подменю <i>E-Book</i> (Электронные книги) | 656 |
| П2.2. Команды панелей инструментов | 657 |
| Панель <i>Standard</i> (Стандартная) | 657 |
| Панель <i>Formatting</i> (Форматирование) | 659 |
| Панель <i>Resources</i> (Центр ресурсов) | 660 |
| Панель <i>Controls</i> (Элементы управления) | 661 |
| Панель <i>Math</i> (Математика) | 662 |
| Панель <i>Calculator Toolbar</i> (Калькулятор) | 663 |
| Панель <i>Graph Toolbar</i> (Графики) | 665 |
| Панель <i>Matrix Toolbar</i> (Матрицы) | 666 |
| Панель <i>Evaluation</i> (Вычисления) | 668 |
| Панель <i>Calculus</i> (Выражения) | 669 |
| Панель <i>Boolean</i> (Булевы операторы) | 671 |
| Панель <i>Programming</i> (Программирование) | 672 |
| Панель <i>Greek Symbols Toolbar</i> (Греческие символы) | 675 |
| Панель <i>Symbolic Keyword Toolbar</i> (Символьные операторы) | 675 |
| Панель <i>Modifier</i> (Модифицировать) | 678 |
| П2.3. Клавиши управления курсором, встроенные переменные и операторы | 679 |
| Клавиши управления курсором | 679 |
| Встроенные переменные | 681 |
| Встроенные операторы | 682 |
| П2.4. Встроенные функции | 688 |
| Элементарные трансцендентные функции | 689 |
| Тригонометрические и обратные тригонометрические функции | 689 |
| Логарифмические и показательные функции | 689 |
| Гиперболические и обратные гиперболические функции | 689 |
| Цилиндрические функции | 690 |
| Специальные и гипергеометрические функции | 691 |
| Текстовые функции | 692 |
| Условные функции | 692 |
| Функции комплексных чисел | 693 |
| Геометрические функции | 693 |
| Функции усечения и округления и направления | 694 |
| Функции преобразования координат | 694 |
| Дискретные преобразования | 694 |
| Преобразования Фурье | 694 |

| | |
|---|------------|
| Волновое преобразование..... | 695 |
| Векторные и матричные функции | 695 |
| Размер и диапазон значений массива | 695 |
| Сортировка элементов матриц и векторов | 696 |
| Специальные типы матриц | 696 |
| Специальные характеристики матриц | 697 |
| Формирование новых матриц из существующих | 697 |
| Собственные значения и собственные векторы..... | 698 |
| Разложения матриц..... | 698 |
| Решение системы линейных алгебраических уравнений..... | 699 |
| Корни функций..... | 699 |
| Решение уравнений и неравенств в блоке <i>Given</i> | 700 |
| Решение дифференциальных уравнений..... | 701 |
| Решение обыкновенных дифференциальных уравнений..... | 701 |
| Решение дифференциальных уравнений в частных производных..... | 705 |
| Функции обработки данных | 706 |
| Функции интерполяции | 706 |
| Функция предсказания | 707 |
| Функции регрессии | 707 |
| Функции сглаживания..... | 710 |
| Статистические оценки случайных совокупностей | 710 |
| Распределение вероятностей..... | 711 |
| Плотность, функции и квантили распределения вероятности..... | 711 |
| Случайные числа | 712 |
| Доступ к файлам..... | 712 |
| Символьные преобразования | 713 |
| П2.5. Сообщения об ошибках | 714 |
| Сообщения об ошибках в числовых вычислениях | 714 |
| Сообщения об ошибках в символьных вычислениях..... | 733 |
| Л и т е р а т у р а | 735 |
| П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь | 737 |

Введение

Теоретическая механика является одной из важнейших физико-математических дисциплин, изучаемых не только в вузах, но и в средних специальных учебных заведениях. На основных законах теоретической механики базируются многие общетехнические и теоретические дисциплины, такие как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, теория упругости, внешняя и внутренняя баллистика и т. д. Хорошее знание курса теоретической механики требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант решения.

Обширная литература по теоретической механике [2—4, 15, 16, 19—21, 24] помогает освоить теорию, а также постановку и методы решения типовых задач. Однако полученные знания и умения не освобождают от рутинных и трудоемких расчетов, за которыми может теряться смысл механических явлений и процессов. В существующей литературе не уделяется достаточного внимания математическому моделированию и анализу полученных решений. Между тем потребность в таких руководствах ощущается как студентами в процессе обучения, так и специалистами в их практической деятельности. Иными словами, нужно научить не только методам, но и анализу решения задач разной степени сложности таким образом, чтобы это решение не затмевало физику процессов и явлений.

В настоящее время развитие вычислительной техники приобрело лавинообразный характер, получили широкое распространение такие мощные пакеты математического моделирования, не требующие специальных знаний в программировании, как Maple, MATLAB, Mathcad и т. д. Облегчая решение сложных математических задач, такие системы позволяют снять психологический барьер в изучении механики и

математики, а также делают этот процесс интересным и более простым. Грамотное их применение в учебном процессе позволяет обеспечить повышение фундаментальности математического и технического образования.

Данную книгу следует рассматривать как введение к применению одной из самых распространенных математических систем — Mathcad — для решения задач разной степени сложности в курсе "Теоретическая механика". Использование Mathcad в теоретической механике позволяет анализировать поведение механических систем в соответствии с поставленной задачей, что дает возможность решать реальные инженерные задачи учащимися младших курсов, не знакомыми еще с численными методами и программированием.

Пакет Mathcad представляет собой эффективное средство для аналитических преобразований и численного решения инженерных и физических задач. Область его применения простирается от простейших вычислений до расчета сложных задач в различных отраслях знаний. С помощью Mathcad можно с успехом решать задачи механики абсолютно твердых и деформируемых тел. Пакет имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики [1, 11—13, 26]. Наличие интеграции Mathcad с такими мощными системами автоматизации расчетов, как MATLAB и Excel делает его незаменимым инструментом в руках не только студента, но и инженера, занимающегося разработкой сложных систем.

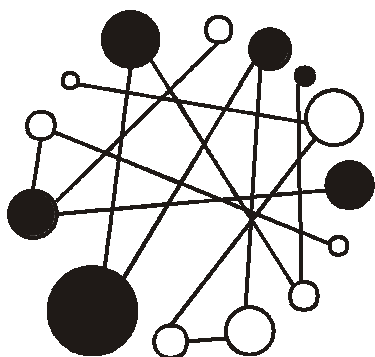
Данная книга продолжает серию справочных книг [6—9, 17, 21, 22, 23], посвященных современным средствам автоматизации математических расчетов и применению их в технических приложениях. Предполагается, что читатель либо изучает теоретическую механику, либо знаком с ней. Наиболее эффективным путем обучения искусству применения методов теоретической механики является не формальное заучивание правил и приемов, а показ их в действии. Поэтому в книге основное внимание уделено решению практических задач, специально подобранных для того, чтобы, с одной стороны, научить самостоятельно решать более сложные и математически трудоемкие задачи механики, а с другой — показать возможности системы Mathcad.

Книга состоит из трех частей (14 глав) и двух приложений. Первая, вторая и третья часть книги посвящены решению конкретных задач теоретической механики в соответствии с ее разделами (кинематика, статика и динамика). В каждом разделе после конспективного обзора теории указываются не только типы задач, решаемых с помощью

перечисленных теорем и положений, но и методы пакета Mathcad, позволяющие получить данное решение. Затем приводятся решения конкретных задач, причем часто сравниваются и оцениваются разные способы и методы их получения. В приложении 1 даны основные сведения о Mathcad, приемы работы с его математическим, графическим и текстовым редакторами. В отличие от существующего переводного описания системы Mathcad PLUS 6.0 [1] и других изданий [11—13, 26], данное приложение характеризуется ориентацией на англоязычную версию Mathcad 11, компактностью изложения, сокращенным описанием широко известных элементов интерфейса, изучением системы на конкретных примерах. Приложение 2 является кратким справочником по Mathcad 11, в котором приводится описание интерфейса, основных операторов и функций пакета, а также перевод сообщений об ошибках и способах их устранения. Изложенного материала достаточно для первоначального ознакомления с пакетом. Предварительных знаний о Mathcad не требуется.

Считаю своим долгом поблагодарить доцента кафедры теоретической механики Тульского государственного университета Л.А. Булатова, ознакомившегося с рукописью и сделавшего ряд ценных замечаний.

Все замечания и предложения по структуре, содержанию и стилю изложения книги автор с благодарностью примет по адресу vit@tiei.ru или tm@tsu.tula.ru.



ЧАСТЬ I

КИНЕМАТИКА

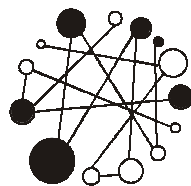
Кинематика изучает механическое движение материальных объектов с геометрической точки зрения. Механическим движением называется процесс непрерывного изменения положения тел (или их точек) в пространстве относительно друг друга.

Объектами изучения кинематики является материальная точка и абсолютно твердое тело. Тело, размерами которого можно пренебречь по условиям задачи, принимается за материальную точку. Абсолютно твердым телом называется система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными в любой момент времени.

Положение точки или тела в пространстве определяется с помощью системы координат (системы отсчета), неизменно связанной с другим телом (телом отсчета). Система отсчета называется основной или "абсолютной", если в рассматриваемой задаче можно не учитывать движение этой системы.

При проектировании новой машины или прибора необходимо уметь создать такую кинематическую схему, в которой движения всех звеньев совершаются наиболее целесообразно. Для этого необходимо уметь определять кинематические характеристики движения точек: законы движения, траектории, скорости и ускорения. Без знания кинематики это сделать невозможно.

Глава 1



Кинематика точки

Основные понятия и определения

Положение точки определяется радиус-вектором (рис. 1.1):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv \overline{OM}(t).$$

Это уравнение движения точки в векторной форме.

Положение движущейся точки в каждый момент времени относительно выбранной системы отсчета может быть определено ее декартовыми координатами (рис. 1.1):

$$\vec{r}(t) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

или криволинейными координатами q_i , $i = \overline{1, 3}$ (рис. 1.3):

$$\vec{r}(t) = q_1(t) \vec{e}_1 + q_2(t) \vec{e}_2 + q_3(t) \vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, а $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$ — коэффициенты

Ламе.

Непрерывная кривая, с точками которой в каждый момент времени совпадает движущаяся точка, называется траекторией. Уравнения движения точки в координатной форме представляют собой уравнения траектории в параметрическом виде. Если исключить из них параметр t , то получим уравнение траектории в виде пересечения двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0.$$

При известном виде траектории движение точки удобно задать естественным способом (рис. 1.2). Для этого на траектории назначают начало отсчета, например точку O , направление отсчета и записывают зависимость ду-

говой координаты s от времени $\widehat{OM} = s(t)$. С траекторией точки можно связать естественный координатный базис с единичными векторами: касательной — $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$, главной нормали — $\bar{n} = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{\tau}}{ds}$ и бинормали — $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$.

Здесь ρ — радиус кривизны траектории.

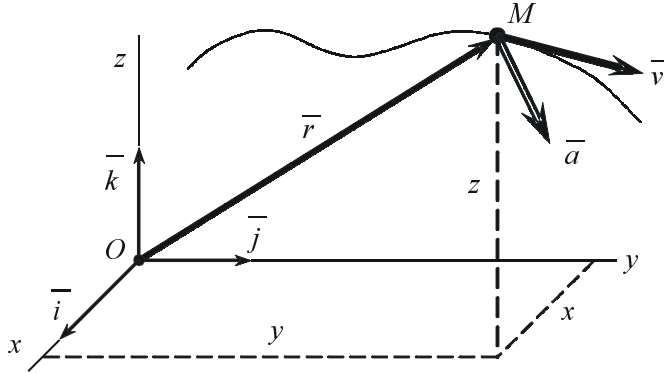


Рис. 1.1. Закон движения, скорость и ускорение точки в декартовых координатах

Скорость точки — векторная величина, которая направлена по касательной к траектории, характеризует быстроту изменения ее положения в пространстве и вычисляется как производная от радиус-вектора по времени:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x} \bar{i} + \dot{y} \bar{j} + \dot{z} \bar{k}.$$

Модуль и направляющие косинусы вектора скорости равны

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

При естественном способе задания движения точки ее скорость можно определить следующим образом:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \dot{s} = \dot{s} \bar{\tau} = v_{\tau} \bar{\tau},$$

где $v_{\tau} = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = \dot{s}$ — проекция вектора скорости на касательную к траектории.

В криволинейных координатах вектор скорости имеет вид:

$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = h_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 + h_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 + h_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3 = h_i \dot{q}_i \bar{e}_i,$$

где \dot{q}_i — обобщенная скорость точки.

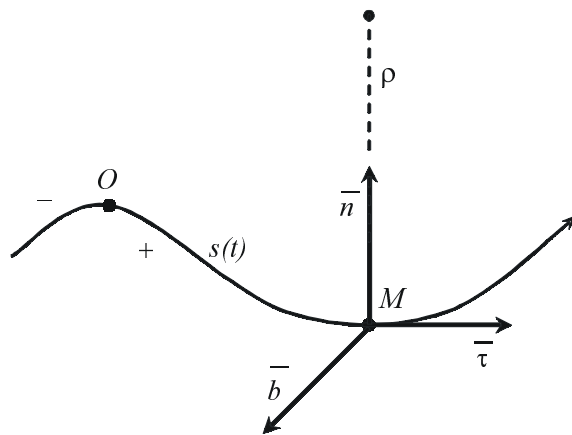


Рис. 1.2. Естественный координатный базис

В случае ортогональных криволинейных координат модуль скорости определяется выражением

$$v = \sqrt{(h_1 \dot{q}_1)^2 + (h_2 \dot{q}_2)^2 + (h_3 \dot{q}_3)^2}.$$

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости, называется ускорением и равна производной по времени от вектора скорости:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k}.$$

Модуль вектора ускорения и его направляющие косинусы можно вычислить по формулам:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

При естественном способе задания движения точки ускорение определяется равенством

$$\bar{a} = \dot{v}_\tau \bar{\tau} + v_\tau \dot{\bar{\tau}} = \dot{v}_\tau \bar{\tau} + (v_\tau)^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \dot{s} \bar{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho} \bar{n} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n},$$

где $a_\tau = \bar{a} \cdot \bar{\tau} = \dot{v}_\tau = \dot{s}$ — касательное и $a_n = \bar{a} \cdot \bar{n} = \frac{v_\tau^2}{\rho}$ — нормальное ускорения.

Так как $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, модуль ускорения можно найти по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.

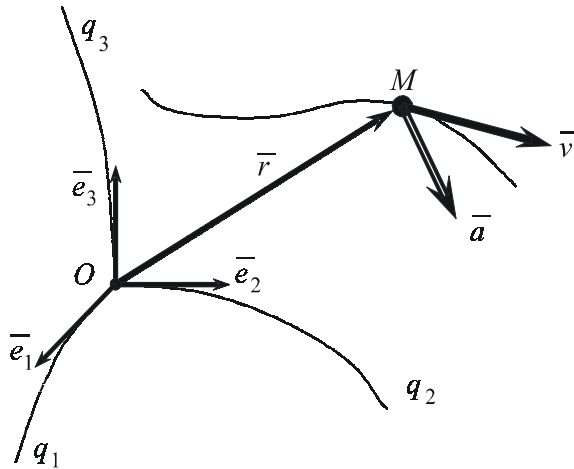


Рис. 1.3. Закон движения, скорость и ускорение точки в криволинейных координатах

В ортогональных криволинейных координатах вектор ускорения равен

$$\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 = a_i \bar{e}_i,$$

где $a_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]$, $i = \overline{1, 3}$ — проекции ускорения точки, направленные по базисным ортогональным векторам, а $T = v^2/2$.

Пример 1.1. Определение кинематических характеристик точки по заданному закону движения

Точка M движется согласно уравнениям:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \cos(\omega t) \quad [\text{см}], \\ y(t) &= 2 \cos(\omega t) \quad [\text{см}], \quad \omega = \pi \quad [\text{с}^{-1}]. \end{aligned}$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки M , в момент времени $T = 1/3$ с. Найти тангенциальную и нормальную составляющие, а также радиус кривизны траектории. Построить графики изменения кинематических характеристик точки.

Решение

Для определения траектории точки M , движущейся по заданному закону, исключим из уравнений движения время, для чего выразим тригонометрические функции времени, возведем каждое уравнение в квадрат и сложим почленно. В результате получим уравнение траектории, которая является эллипсом с полуосями $a=3$ и $b=2$:

$$\frac{x(t)}{3} = \cos(\omega t), \quad \frac{y(t)}{2} = \sin(\omega t), \quad \Rightarrow \quad \frac{x(t)^2}{3^2} + \frac{y(t)^2}{2^2} = 1.$$

Дальнейшее решение проведем с использованием стандартных методов Mathcad. На рис. 1.4 представлено окно программы, содержащее численное решение поставленной задачи.

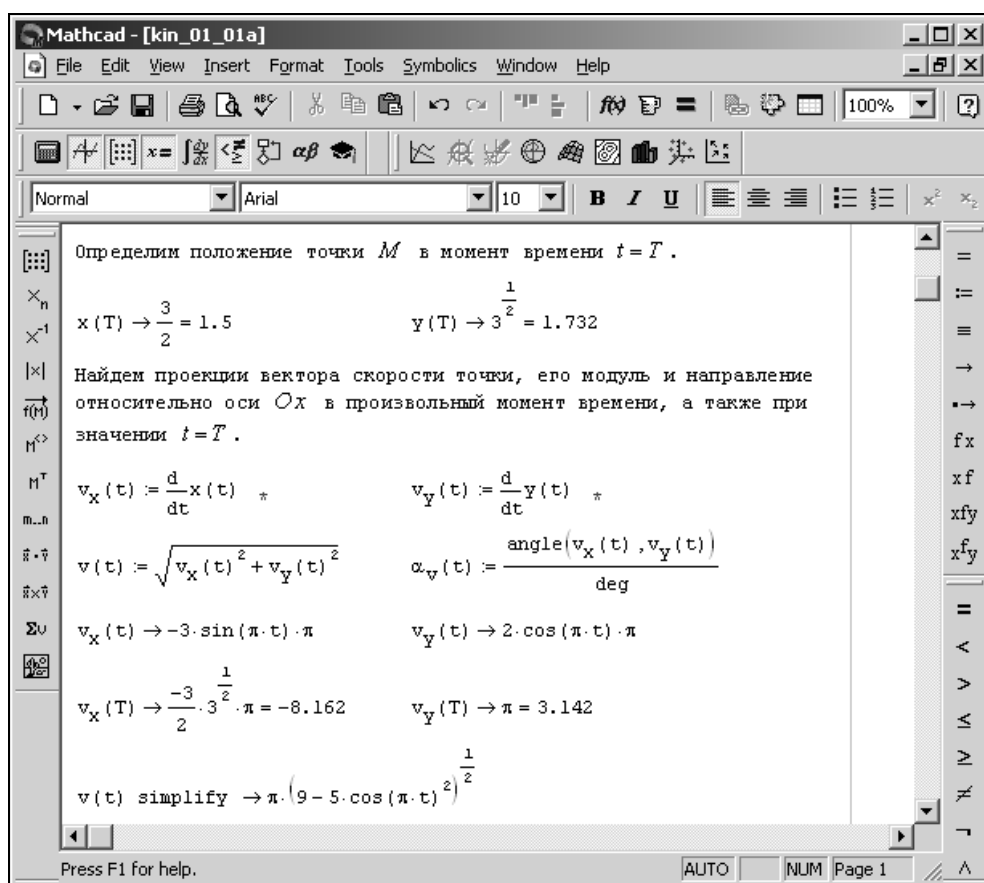


Рис. 1.4. Окно Mathcad, содержащее численное решение задачи

Примечание

В Mathcad имеется возможность с помощью команды **Save as** (Сохранить как) сохранить решение в формате RTF (рис. 1.5), а затем вставить его в любой документ, в том числе и в рукопись этой книги. Однако размещение в книге большого объема неформатированного текста, содержащего внедренные объекты, неудобно по технологическим соображениям, поэтому в дальнейшем решения задач, снятые с экрана Mathcad, будут выделяться шрифтом Courier.

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

$$\begin{aligned}
 v_x(t) &:= \frac{d}{dt}x(t) \quad * \\
 v_y(t) &:= \frac{d}{dt}y(t) \quad * \\
 v(t) &:= \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad * \\
 \alpha_v(t) &:= \frac{\text{angle}(v_x(t), v_y(t))}{\text{deg}} \quad * \\
 v_x(t) &\rightarrow -3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi \quad * \\
 v_y(t) &\rightarrow 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi \quad * \\
 v_x(T) &\rightarrow \frac{-3}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = -8.162 \quad * \quad v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142 \quad * \\
 v(t) \text{ simplify} &\rightarrow \pi \cdot (9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t))^{\frac{1}{2}} \quad * \\
 v(T) \text{ simplify} &\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = 8.746 \quad *
 \end{aligned}$$

Рис. 1.5. Решение в формате RTF

Далее представлено численное решение поставленной задачи, снятое с экрана программы.

Введем исходные данные задачи.

$$T := \frac{1}{3} \quad \omega := \pi \quad x(t) := 3 \cos(\omega t) \quad y(t) := 2 \sin(\omega t)$$

Определим положение точки M в момент времени $t = T$.

$$x(T) \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5 \quad y(T) \rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 1.732$$

Найдем проекции вектора скорости точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

Примечание

Звездочки справа от выражения означают, что режим оптимизации Mathcad включен и процедура вычисления данного выражения оптимизирована.

$$v_x(t) := \frac{d}{dt} x(t) \quad *$$

$$v_x(t) \rightarrow -3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi$$

$$v_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = -8.162$$

$$v_y(t) := \frac{d}{dt} y(t) \quad *$$

$$v_y(t) \rightarrow 2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi$$

$$v_y(T) \rightarrow \pi = 3.142$$

$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

$$v(t) \text{ simplify} \rightarrow \pi \cdot \left(9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi = 8.746$$

$$\alpha_v(t) := \frac{\text{angle}(v_x(t), v_y(t))}{\text{deg}}$$

$$\alpha_v(T) \rightarrow \frac{-\text{atan}\left(\frac{2}{9} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) + \pi}{\text{deg}} = 158.948$$

Найдем проекции вектора ускорения точки, его модуль и направление относительно оси Ox в произвольный момент времени, а также при значении $t = T$.

$$a_x(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad *$$

$$a_x(t) \rightarrow -3 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \pi^2$$

$$a_x(T) \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot \pi^2 = -14.804$$

$$a_y(t) := \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad *$$

$$a_y(t) \rightarrow -2 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi^2$$

$$a_y(T) \rightarrow -3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = -17.095$$

$$a(t) := \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2}$$

$$a(t) \text{ simplify} \rightarrow \pi^2 \cdot \left(5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2 + 4 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 21^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = 22.614$$

$$\alpha_a(t) := \frac{\text{angle}(a_x(t), a_y(t))}{\text{deg}} \quad \alpha_a(T) \rightarrow \frac{\text{atan}\left(\frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) - \pi}{\text{deg}} = -130.893$$

Вычисляем тангенциальное ускорение точки в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$a_\tau(t) := \frac{v_x(t) \cdot a_x(t) + v_y(t) \cdot a_y(t)}{v(t)}$$

$$a_\tau(t) \text{ simplify} \rightarrow 5 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot \pi^2 \cdot \frac{\cos(\pi \cdot t)}{\left(9 - 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$a_\tau(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{5}{62} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 \cdot 31^{\frac{1}{2}} = 7.676$$

Вычисляем нормальное ускорение точки в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$a_n(t) := \sqrt{a(t)^2 - a_\tau(t)^2} \quad a_n(t) \text{ simplify} \rightarrow 6 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{-1}{-9 + 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_n(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{12}{31} \cdot 31^{\frac{1}{2}} \cdot \pi^2 = 21.272$$

Вычисляем угол между направлениями вектора ускорения и главной нормали к траектории.

$$\beta(t) := \frac{\text{angle}(a_n(t), a_\tau(t))}{\text{deg}} \quad \beta(T) = 19.842$$

Вычисляем радиус кривизны траектории в произвольный момент времени, а также при значении $t=T$.

$$\rho(t) := \frac{v(t)^2}{a_n(t)} \quad \rho(t) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{6} \cdot \frac{-9 + 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2}{\left(\frac{-1}{-9 + 5 \cdot \cos(\pi \cdot t)^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho(T) \text{ simplify} \rightarrow \frac{31}{48} \cdot 31^{\frac{1}{2}} = 3.596$$

Построим графики зависимостей найденных величин от времени в интервале $0 \leq t \leq 2$ [с] (рис. 1.6—1.9).

Зададим t в виде дискретной переменной:

$t := 0, 0.01.. 2$

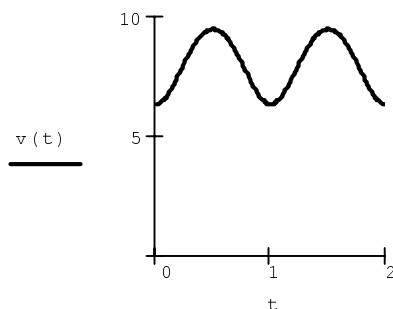


Рис. 1.6. График зависимости модуля скорости от времени t

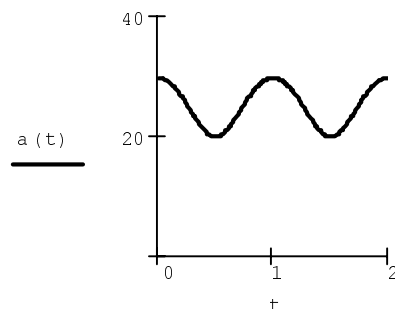


Рис. 1.7. График зависимости модуля ускорения от времени t

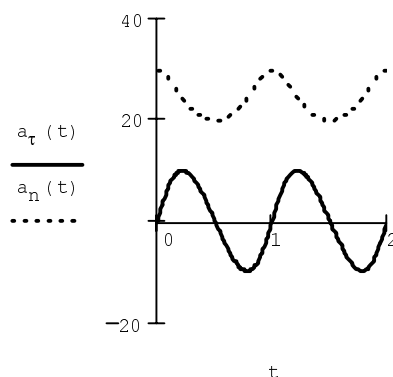


Рис. 1.8. График зависимости тангенциального и нормального ускорения от времени t

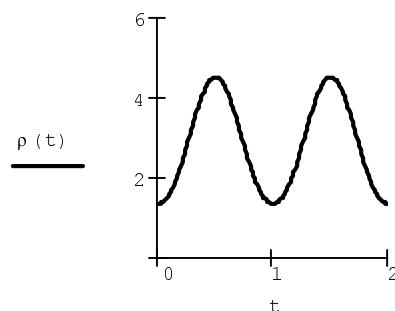


Рис. 1.9. График зависимости радиуса кривизны траектории от времени t

Так как уравнения движения точки являются ее траекторией, заданной в параметрическом виде, отобразить ее на графике (рис. 1.10) можно, задав в шаблоне графика XY : на оси X зависимость $x(t)$, а на оси Y — $y(t)$. Положение точки зададим ее координатами $x(T)$ и $y(T)$.

Стандартные методы Mathcad не позволяют изображать на графиках определяемые векторы. Расширить возможности Mathcad, обеспечивающие дифференцирование и отображение векторов, можно с помощью пользовательских функций-подпрограмм (см. разд. П1.9 Приложения I), которые находятся в отдельном файле `user_fun.mcd`. Для определенности этот файл расположим по адресу: `C:\Program Files\Mathsoft\user_fun.mcd`.