



ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ

- *Общий курс для студентов, аспирантов и преподавателей*
- *Анализ и проектирование систем управления для инженеров-практиков*
- *Методы расчета и компьютерное моделирование процессов в среде Mathcad*
- *Задания для курсового проектирования, лабораторных и практических работ*



$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$



УДК 519.068 (075.8)
ББК 32.96я73
Н65

Никулин Е. А.

Н65 Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза систем / Учеб. пособие для вузов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 640 с.: ил.

ISBN 5-94157-440-1

В пособие включены основные вопросы, изучаемые в рамках дисциплины «Теория автоматического управления» и опирающиеся на классические частотные методы исследования систем. Рассматриваются классификация систем автоматического управления, статические свойства элементов, применение преобразования Лапласа для описания динамики. Изучаются основные соединения и методы преобразования структурных схем, расчет частотных и временных характеристик, показатели качества переходных процессов и методы их оценки. Приводятся различные критерии устойчивости автоматических систем, алгебраические и частотные критерии обеспечения запасов устойчивости по амплитуде и фазе. Описываются частотные и временные методы расчета переходных процессов. Дается классификация регуляторов, рассматриваются частотные и спектральные методы их расчета, включая способы управления неустойчивыми объектами и конструирование ПИД-регуляторов. Материал каждого раздела иллюстрирован большим количеством примеров. Для численного и символического решения задач используется программная среда Mathcad.

Приложения содержат обширные таблицы преобразований Лапласа и варианты заданий для курсового проектирования, лабораторных, практических и самостоятельных работ.

Для студентов и аспирантов технических вузов, а также преподавателей и специалистов в области автоматического управления

УДК 519.068 (075.8)
ББК 32.96я73

Рецензенты:

профессор, д.т.н., заведующий кафедрой «Теория цепей и телекоммуникаций»
Нижегородского государственного технического университета,
действительный член РАИН, IEEE В. В. Крылов,
профессор, д.т.н., заведующий кафедрой системного анализа и математики
Волго-Вятской академии государственной службы А. Т. Надеев

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Алексей Семенов</i>
Компьютерная верстка	<i>Василисы Сафаровой</i>
Корректор	<i>Евгений Камский</i>
Дизайн обложки	<i>Игоря Цырульниковой</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 30.07.04.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 51,6.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-440-1

© Никулин Е. А., 2004

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2004

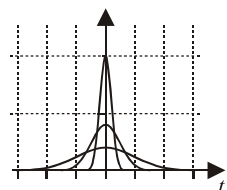
Содержание

Предисловие	6
Введение	11
В.1. Основные понятия теории автоматического управления.....	11
В.2. Классификация систем управления.....	14
В.3. Задачи теории автоматического управления.....	18
Глава 1. Математические модели элементов и систем управления	25
1.1. Классификация элементов систем управления.....	25
1.2. Статические свойства элементов и систем.....	26
1.2.1. Соединения статических элементов	28
1.2.2. Линеаризация статических элементов	31
1.2.3. Статические ошибки в замкнутых системах управления	36
1.3. Статический анализ и синтез схем на операционных усилителях.....	39
1.3.1. Нелинейные статические элементы на операционных усилителях.....	42
1.3.2. Линейные статические элементы на операционных усилителях.....	47
1.4. Описание динамики элементов систем управления	57
1.5. Передаточная функция	65
1.6. Соединения элементов и преобразования структурных схем.....	68
1.7. Чувствительность и стабилизирующие свойства отрицательной обратной связи.....	74
1.8. Динамический анализ и синтез схем на операционных усилителях	81
1.8.1. Динамические элементы на операционных усилителях.....	81
1.8.2. Построение схем неминимально-фазовых элементов	97
1.8.3. Анализ и синтез многокаскадных схем на операционных усилителях	104
Глава 2. Частотные характеристики элементов и систем управления	119
2.1. Основные частотные характеристики.....	124
2.2. Частотные характеристики типовых звеньев.....	132
2.3*. Погрешности аппроксимации логарифмических частотных характеристик типовых звеньев.....	150
2.4. Частотные характеристики сложных систем	157
2.5. Частотные свойства замкнутых систем	172
2.5.1. Частотные характеристики систем с отрицательной обратной связью.....	172

2.5.2. Расширение полосы пропускания.....	179
2.5.3. Свойства систем с положительной обратной связью.....	187
2.6*. Анализ полиномов.....	200
2.6.1. Полиномы низких степеней.....	205
2.6.2. Структура спектра полинома.....	208
2.6.3. Локализация корней полинома.....	213
2.6.4. Уточнение корней полинома.....	219
Глава 3. Временные характеристики элементов и систем управления	242
3.1. Обратное преобразование Лапласа.....	243
3.1.1. Метод разложения Хевисайда.....	244
3.1.2. Табличный метод преобразований Лапласа.....	250
3.1.3. Программный метод преобразований Лапласа.....	255
3.2. Типовые временные характеристики.....	258
3.2.1. Импульсная характеристика.....	258
3.2.2. Переходная характеристика.....	262
3.2.3. Взаимосвязь временных характеристик.....	264
3.3. Частотно-временные свойства систем.....	281
3.3.1. Взаимосвязь частотных и временных характеристик.....	282
3.3.2. Трансформации частотных характеристик.....	285
3.3.3. Масштабируемые по времени модели.....	288
3.4*. Аппроксимационный метод построения временных характеристик.....	291
3.5. Оценки качества переходных процессов в системах управления.....	297
3.5.1. Показатели качества переходной характеристики.....	299
3.5.2. Спектральные оценки качества.....	301
3.5.3. Частотные оценки качества.....	307
Глава 4. Устойчивость систем автоматического управления.....	318
4.1. Понятие устойчивости.....	318
4.2. Условия устойчивости линеаризованных систем.....	320
4.3. Алгебраические критерии устойчивости.....	323
4.3.1. Необходимые условия устойчивости.....	324
4.3.2. Критерий устойчивости Рауса – Гурвица.....	325
4.4. Построение областей устойчивости параметрических полиномов.....	331
4.5. Частотный критерий устойчивости Михайлова.....	342
4.6. Частотный критерий устойчивости Найквиста.....	354
4.6.1. Вывод критерия Найквиста.....	354
4.6.2. Логарифмический критерий устойчивости Найквиста.....	361
4.7. Запасы устойчивости замкнутой системы.....	376
4.7.1. Определение запасов устойчивости.....	376

4.7.2. Алгебраический критерий устойчивости с запасами	379
4.8*. Устойчивость систем с запаздыванием.....	385
Глава 5. Расчет переходных процессов в системах автоматического управления	397
5.1. Структура переходного процесса	398
5.2. Метод преобразований Лапласа.....	401
5.3. Метод вариации произвольных постоянных.....	414
5.4. Метод интеграла Дюамеля.....	418
5.5. Метод пространства состояний.....	421
5.5.1. Модель в пространстве состояний.....	421
5.5.2. Расчет параметров моделей в пространстве состояний.....	424
5.5.3. Программное моделирование переходных процессов в пространстве состояний	428
Глава 6. Методы проектирования систем автоматического управления.....	434
6.1. Основные задачи синтеза регуляторов	434
6.2. Методы повышения статической точности (низкочастотный синтез регуляторов).....	451
6.2.1. Коэффициенты статических ошибок.....	452
6.2.2. Статические системы управления	454
6.2.3. Астатические системы управления	467
6.3. Методы улучшения динамических параметров (среднечастотный синтез регуляторов).....	475
6.4. Быстрый синтез систем управления методом логарифмических частотных характеристик	491
6.5. Управление неустойчивыми объектами	502
6.6. Спектральный метод синтеза регуляторов.....	510
6.6.1. Замкнутая система второго порядка	516
6.6.2. Замкнутая система третьего порядка.....	528
6.6.3. Замкнутая система n -го порядка.....	534
6.6.4. Неустойчивая разомкнутая система.....	537
6.7. Системы управления с ПИД-регуляторами.....	544
6.7.1. Анализ ПИД-регуляторов	545
6.7.2. Синтез ПИД-регуляторов	551
6.7.3. Реализация ПИД-регуляторов	574
Заключение	579
Приложение 1. Таблицы преобразований Лапласа.....	581
Приложение 2. Задания для курсового проектирования	612
Список литературы	621
Предметный указатель	623

ГЛАВА 1



Вначале Бог создал ньютоновы законы движения. Этим все и исчерпывается; остальное должно получаться в результате разработки надлежащих математических методов.

Альберт Эйнштейн

Математические модели элементов и систем управления

Математическое описание системы начинается с разделения ее на элементы, для которых должны быть составлены уравнения, описывающие их функционирование. Уравнения составляются на основе анализа физических, химических, экономических и других процессов, происходящих в системе, с помощью законов сохранения энергии и вещества, законов электротехники, гидравлики и т. д.

Система уравнений, с достаточной точностью описывающая поведение объекта во времени и пространстве, называется *математической моделью*. Разработка и уточнение моделей занимает от 80 до 90 процентов времени, затрачиваемого на проектирование систем автоматического управления [29]. Следует отдавать себе отчет, что никакая математическая модель физической системы не является точной. Можно повышать точность модели, увеличивая количество и сложность уравнений, но все равно мы никогда не достигнем абсолютной точности. Нужно стремиться к тому, чтобы модель *адекватно* отражала поведение физической системы в области ее работоспособности и в то же время была не слишком сложной, доступной для аналитических преобразований и численного расчета.

1.1. Классификация элементов систем управления

Элементы систем управления классифицируются по следующим признакам [16].

- По функциональному назначению:
 - задающие элементы — генераторы уставок;
 - измерительные элементы — датчики;
 - суммирующие и вычитающие элементы;
 - усиливающие элементы без изменения формы сигналов;
 - преобразующие и корректирующие элементы;
 - исполнительные элементы.
- По виду используемой энергии:
 - электрические элементы;
 - механические элементы;
 - гидравлические элементы;
 - пневматические элементы;
 - комбинированные элементы.
- По наличию источника энергии:
 - активные элементы;
 - пассивные элементы.
- По длительности переходных процессов:
 - безынерционные элементы — описываются алгебраическими уравнениями. Входные и выходные переменные связаны между собой коэффициентами усиления;
 - инерционные элементы — описываются дифференциальными уравнениями. У линейных инерционных элементов связи между входными и выходными переменными устанавливаются передаточными функциями.
- По характеру установившегося режима:
 - статические элементы, имеющие конечные установившиеся значения выходных переменных;
 - астатические элементы, модели которых не имеют постоянных установившихся значений выходных переменных.

1.2. Статические свойства элементов и систем

Статическим называется элемент, у которого при постоянном входном воздействии $x(t)$ с течением времени устанавливается постоянная выходная переменная $y(t)$. Отношение y/x в установившемся режиме называется коэффициентом усиления K .

Выходная переменная *астатического* элемента не имеет установившегося значения, а неограниченно возрастает с постоянной скоростью (например, угол поворота электродвигателя при постоянном входном напряжении), ускорением (например, перемещение материальной точки под действием постоянной силы) или производной высшего порядка. У такого элемента, например, при постоянной установившейся скорости изменения выходной переменной $V = dy / dt$ коэффициент усиления определяется как отношение V / x .

Свойства статизма или астатизма не абсолютны, а зависят от выбора выходной переменной. Так, если при описании электродвигателя в качестве выходного сигнала задать не угол поворота φ , а угловую скорость $\omega = d\varphi / dt$, то получим статический элемент. **Признак астатизма — наличие хотя бы одного интегратора между входом и выходом элемента или системы.**

Статической характеристикой (СХ) $y = f(x)$ (рис. 1.1, а) статического элемента называется зависимость установившегося значения выходной переменной от значения постоянного входного воздействия. Статическая характеристика, в общем случае нелинейная, может быть гладкой или разрывной (рис. 1.1, б), однозначной или многозначной (например, гистерезисной на рис. 1.1, в). Разрывные характеристики присущи релейным элементам и аналого-цифровым преобразователям. Характеристиками гистерезисного типа обладают, например, магнитные элементы и механические соединения с люфтом.

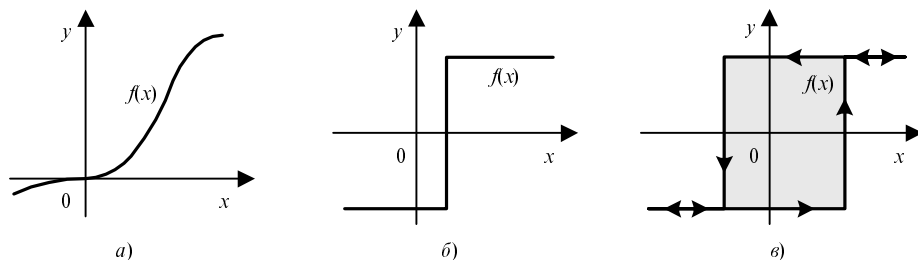


Рис. 1.1

Линейный статический элемент имеет гладкую линейную статическую характеристику

$$y(x) = a_0 + a_1 x,$$

где a_0 есть смещение в нуле, а коэффициент $a_1 = \Delta y / \Delta x$ задает коэффициент усиления элемента относительно *приращений* входного Δx и выходного Δy сигналов.

Астатический элемент не имеет статической характеристики по причине отсутствия установившегося режима при постоянном входном воздействии. Однако может существовать статическая характеристика

$$y^{(i)} \Big|_{\text{уст}} = f_i(x)$$

для i -ой производной выходного сигнала $y(t)$. Минимальный порядок производной $y^{(i)}(t)$, имеющей статическую характеристику, называется *порядком астатизма*. Он равен числу интеграторов между входом и выходом, не охваченных контуром обратной связи. Статические элементы имеют астатизм нулевого порядка.

1.2.1. Соединения статических элементов

Статическая характеристика системы, образованной соединением двух элементов, может быть найдена двумя способами:

- *аналитическим*, если заданы формулы статических характеристик исходных элементов;
- *графическим*, если характеристики элементов заданы графиками.

Рассмотрим *основные типы соединений статических элементов* и методы аналитического и графического расчета их статических характеристик.

- **Параллельное соединение** (рис. 1.2, а):

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Графическое построение результирующей характеристики $f(x)$ очень просто (рис. 1.2, б): она равна сумме ординат y_1 и y_2 характеристик параллельно соединенных элементов при одинаковых значениях абсцисс x .

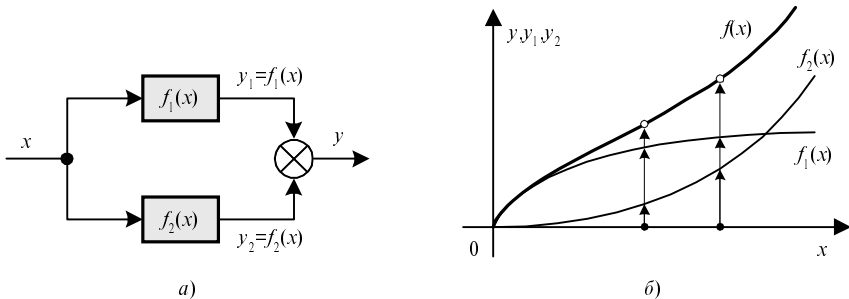


Рис. 1.2

- **Последовательное соединение** (рис. 1.3, а):

$$f(x) = f_2(f_1(x)).$$

Графическое построение результирующей характеристики $f(x)$ выполняем следующим образом (рис. 1.3, б):

- на оси абсцисс характеристики первого элемента выбираем значение x и по графику $f_1(x)$ определяем выходной сигнал y_1 ;
- рассматривая y_1 как входной сигнал второго элемента, по графику $f_2(y_1)$ находим значение y_2 , равное выходному сигналу y последовательного соединения. При этом ось y совпадает с осью x ;
- для каждой пары чисел $\{x, y\}$ на отдельном графике строим точку искомой характеристики $y = f(x)$.

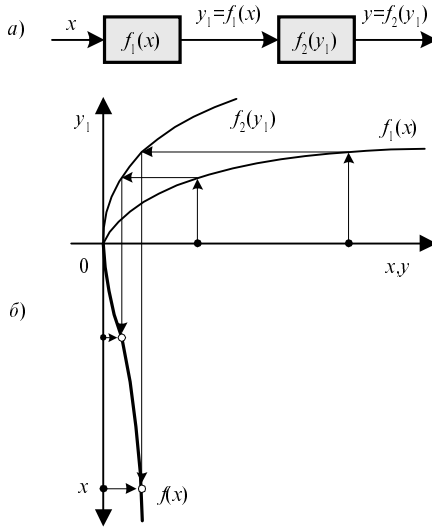


Рис. 1.3

Нелинейные элементы нельзя переставлять местами, т. к. в общем случае

$$f_2(f_1(x)) \neq f_1(f_2(x)).$$

Например, для функций $f_1(x) = 1 - e^{-x}$ и $f_2(x) = x^2$ имеем

$$1 - e^{-x^2} \neq (1 - e^{-x})^2.$$

- **Соединение с обратной связью** (рис. 1.4, а). На рисунке и формулах в обозначениях « \pm » и « \mp » верхний знак означает *отрицательную* обратную связь (ООС), а нижний — *положительную* (ПОС).

Запишем уравнения трех блоков системы:

$$e = x \mp z, \quad y = f_1(e), \quad z = f_2(y).$$

Исключая переменные e и z , получим уравнение связи входа и выхода:

$$y = f_1(x \mp f_2(y)).$$

Оно имеет решение в виде функции, *обратной* к статической характеристике $y = f(x)$:

$$x = f^{-1}(y) = f_1^{-1}(y) \pm f_2(y).$$

Аналитическое обращение нелинейной функции не всегда возможно. Так, для функций $f_1(x) = 1 - e^{-x}$ и $f_2(x) = x^2$ получим $f_1^{-1}(y) = -\ln(1 - y)$, откуда следует *обратная* зависимость

$$x = -\ln(1 - y) \pm y^2.$$

Видно, что явной зависимости $y = f(x)$ не существует.

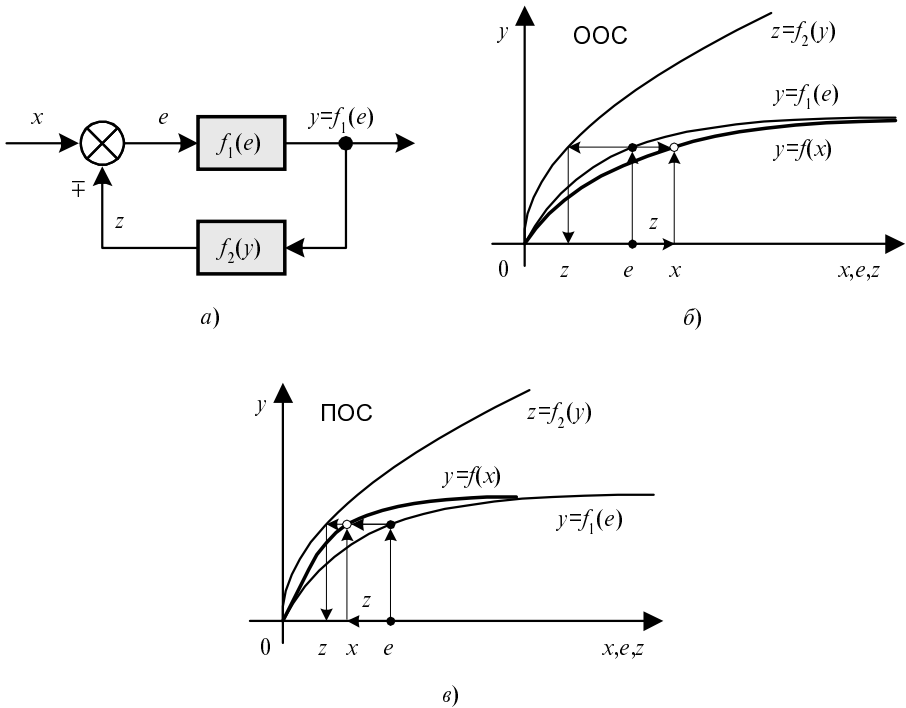


Рис. 1.4

Последовательность графического построения статической характеристики обратного соединения

$$e \rightarrow y = f_1(e) \rightarrow z = f_2(y) \rightarrow x \pm z$$

дает функцию $y = f(x)$ для каждого значения e и показана стрелками для случаев отрицательной (рис. 1.4, б) и положительной (рис. 1.4, в) обратных связей.

1.2.2. Линеаризация статических элементов

Каждый элемент системы имеет рабочую область изменения входных и выходных переменных, причем некоторые точки этой области наиболее предпочтительны как точки равновесия или как самые удаленные от границ рабочей области. Такие точки называются *номинальными*, а координаты точки (x_n, y_n) — *номинальным режимом*. При слабой нелинейности статической характеристики достаточно иметь одну номинальную точку, сильная же нелинейность заставляет разбивать область работоспособности на подобласти, каждую со своим номинальным режимом (рис. 1.5).

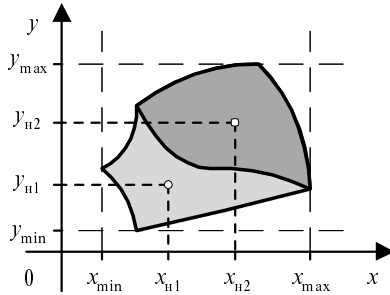


Рис. 1.5

В окрестности номинального режима желательно иметь *линейное* описание элемента как наиболее удобное для решения задач анализа и синтеза. *Линеаризация* — это замена реальных нелинейных уравнений, описывающих функционирование объекта, близкими к ним линейными уравнениями. Линеаризация гладкой функции $y = f(x)$ в окрестности номинальной точки (x_n, y_n) выполняется по формуле разложения в ряд Тейлора

$$y \approx y_n + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_n (x - x_n).$$

Это уравнение *касательной* к кривой $f(x)$ в точке (x_n, y_n) (рис. 1.6). Приведем примеры разложения до линейных членов в ряд Тейлора и, где возможно, при $x_n = 0$ — в ряд Маклорена некоторых простейших нелинейных функций одного переменного:

- $e^{ax} \approx e^{ax_n} + ae^{ax_n}(x - x_n), e^{ax} \approx 1 + ax;$
- $\sin(ax) \approx \sin(ax_n) + a \cdot \cos(ax_n)(x - x_n), \sin(ax) \approx ax;$
- $\cos(ax) \approx \cos(ax_n) - a \cdot \sin(ax_n)(x - x_n), \cos(ax) \approx 1;$
- $\log_b(ax) \approx \log_b(ax_n) + \frac{x - x_n}{x_n \ln(b)};$

$$\square \quad \sqrt[n]{x} \approx \sqrt[n]{x_H} + \frac{x - x_H}{n \cdot \sqrt[n]{x_H^{n-1}}}.$$

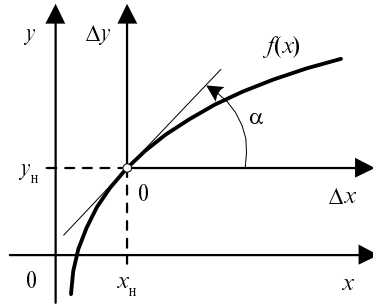


Рис. 1.6

Введем *отклонения* от номинального режима

$$\Delta y = y - y_H, \quad \Delta x = x - x_H,$$

тогда линеаризованное уравнение в отклонениях примет вид

$$\Delta y = K \cdot \Delta x$$

с коэффициентом наклона касательной

$$K = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_H} = \operatorname{tg}(\alpha).$$

Если статическая характеристика $y = f(\bar{x})$ является функцией *вектора* переменных $\bar{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T$, то линеаризованная характеристика в приращениях представляет собой *гиперплоскость*, касающуюся поверхности $y = f(\bar{x})$ в номинальной точке (\bar{x}_H, y_H) и описываемую векторным уравнением в приращениях

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n K_i \Delta x_i = \nabla f(\bar{x}) \Delta \bar{x},$$

где $\nabla f(\bar{x}) = [K_1 \ \dots \ K_n]$ — вектор-строка градиента $f(\bar{x})$ в точке \bar{x} с элементами

$$K_i = \left. \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_H}.$$

Рассмотрим примеры линеаризации статических характеристик.

▣ **Пример 1.1.** Устройство умножения двух сигналов $y = x_1 \cdot x_2$ (рис. 1.7, а):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\text{н}} = x_{2\text{н}}, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\text{н}} = x_{1\text{н}} \Rightarrow y = y_{\text{н}} + x_{2\text{н}}(x_1 - x_{1\text{н}}) + x_{1\text{н}}(x_2 - x_{2\text{н}}).$$

По этому выражению построена структурная схема умножителя, линеаризованного в окрестности точки $y_{\text{н}} = x_{1\text{н}}x_{2\text{н}} \neq 0$ (рис. 1.7, б). Нелинейная поверхность гиперболического параболоида $y(x_1, x_2)$ изображена на рис. 1.7, в.

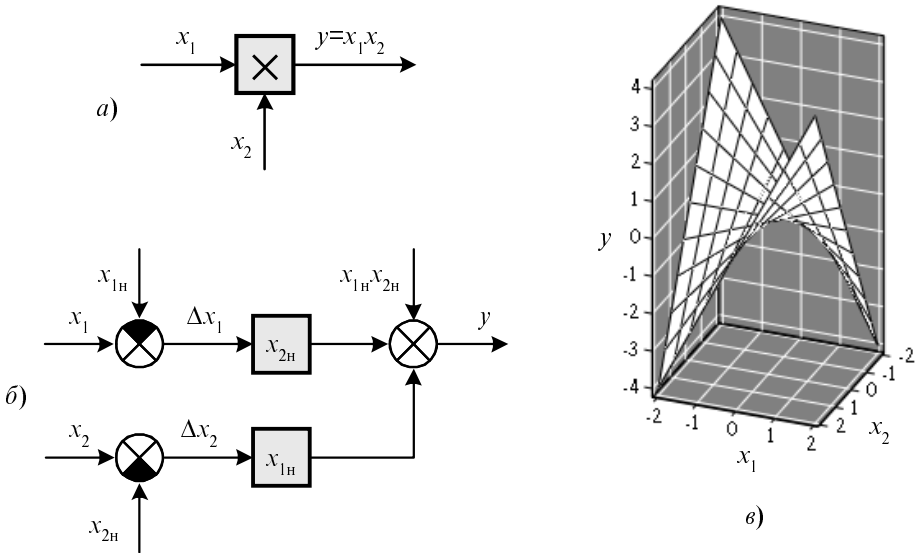


Рис. 1.7

▣

▣ **Пример 1.2.** Устройство деления двух сигналов $y = x_1 / x_2$ (рис. 1.8, а):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\text{н}} = \frac{1}{x_{2\text{н}}}, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\text{н}} = \frac{-x_{1\text{н}}}{x_{2\text{н}}^2} \Rightarrow y = y_{\text{н}} + \frac{x_1 - x_{1\text{н}}}{x_{2\text{н}}} - \frac{x_{1\text{н}}(x_2 - x_{2\text{н}})}{x_{2\text{н}}^2}.$$

По этому выражению построена структурная схема делителя, линеаризованного в окрестности точки $y_{\text{н}} = x_{1\text{н}} / x_{2\text{н}}$ при $x_{2\text{н}} \neq 0$ (рис. 1.8, б). Нелинейная поверхность гиперболического параболоида $y(x_1, x_2)$, по иному ориентированного по сравнению с параболоидом в *примере 1.7*, изображена на рис. 1.8, в. ▣

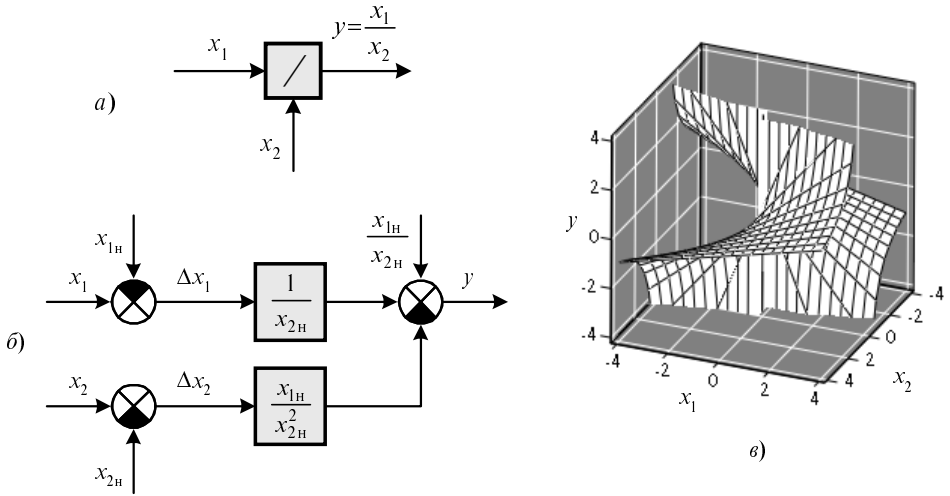


Рис. 1.8

Пример 1.3. Вольт-амперная характеристика диода, т. е. зависимость проходящего тока I от приложенного напряжения U и температуры окружающей среды T , имеет вид (рис. 1.9, а)

$$I(U, T) = I_0(T) \left(e^{\frac{UT_n}{n\varphi_T T}} - 1 \right), \quad I_0(T) = \gamma T^2 e^{-\frac{\varphi_0 T_n}{\varphi_T T}}, \quad (1.1)$$

где $\varphi_T = 0.0257$ В и $\varphi_0 = 0.7$ В — тепловой и барьерный потенциалы;

n и γ — индивидуальные параметры для каждого диода.

Справочные данные номинального режима диода КД512А [10]:

- $I_n = 10$ мА при $U_n = 1$ В;
- $T_n = 25$ °С = 298 К.

Предельные параметры диода:

- обратный ток $I_{он} = 5$ мкА при максимальном обратном напряжении $U_{омакс} = 15$ В;
- максимальный прямой ток $I_{макс} = 20$ мА;
- диапазон температур от $T_{мин} = -25$ °С до $T_{макс} = 100$ °С.

Линеаризовать вольт-амперную характеристику диода в окрестности точки (U_n, T_n, I_n) . Построить рабочую область диода в окрестности номинального

режима. Оценить изменение тока при изменениях напряжения на $\Delta U = 100$ мВ и температуры на $\Delta T = -20$ °С.

Решение. Вычислим коэффициенты n и γ решением системы уравнений (1.1) в двух режимах (U_H, T_H, I_H) и $(-U_{\text{омах}}, T_H, I_{\text{оH}})$, полагая, что $\exp(-U_{\text{омах}} / n\varphi_T) \approx 0$:

$$\begin{cases} I_H = \gamma T_H^2 e^{-\frac{\varphi_0}{\varphi_T}} \left(e^{\frac{U_H}{n\varphi_T}} - 1 \right) \\ I_{\text{оH}} \approx \gamma T_H^2 e^{-\frac{\varphi_0}{\varphi_T}} \end{cases} \Rightarrow n = \frac{U_H}{\varphi_T \ln \left(1 + \frac{I_H}{I_{\text{оH}}} \right)} \approx 5.12,$$

$$\gamma = \frac{I_{\text{оH}}}{T_H^2} e^{\frac{\varphi_0}{\varphi_T}} = 37.88 \frac{\text{А}}{\text{К}^2}.$$

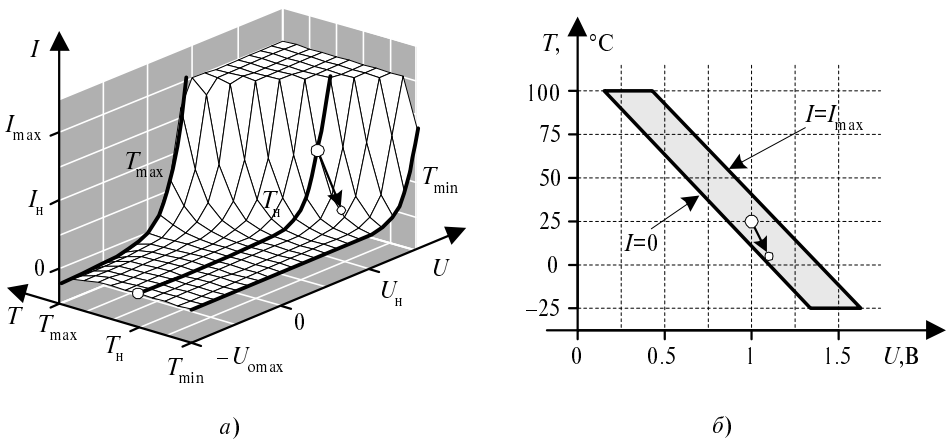


Рис. 1.9

Найдем частные производные $I(U, T)$ по U и T :

$$K_U = \left. \frac{\partial I(U, T)}{\partial U} \right|_H = \frac{\gamma T_H^2}{n\varphi_T} e^{\frac{U_H - n\varphi_0}{n\varphi_T}} = 0.0761 \frac{\text{МА}}{\text{МВ}},$$

$$K_T = \left. \frac{\partial I(U, T)}{\partial T} \right|_H = \frac{\gamma T_H}{n\varphi_T} e^{-\frac{\varphi_0}{\varphi_T}} \left[\left(e^{\frac{U_H}{n\varphi_T}} - 1 \right) (2n\varphi_T + n\varphi_0 - U_H) - U_H \right] = 0.7258 \frac{\text{МА}}{\text{К}}.$$

Таким образом, линеаризованная вольт-амперная характеристика открытого диода в отклонениях ΔU , ΔT и ΔI имеет вид

$$\Delta I = K_U \Delta U + K_T \Delta T.$$

В переменных U (мВ) и T (°C) зависимость

$$I = 10 + 0.0761(U - 1000) + 0.7258(T - 25) = 0.0761U + 0.7258T - 84.2 \text{ мА}$$

представляет собой уравнение плоскости в пространстве $\{U, T, I\}$, проходящей через точку (U_n, T_n, I_n) касательно к поверхности $I(U, T)$. Рабочая область диода изображена на рис. 1.9, б и ограничена четырьмя прямыми:

$$T = -25 \text{ °C};$$

$$T = 100 \text{ °C};$$

$$0.0761U + 0.7258T = 84.2;$$

$$0.0761U + 0.7258T = 104.2.$$

Левее рабочей области в пределах $-25 \text{ °C} \leq T \leq 100 \text{ °C}$ расположена область отсечки закрытого диода, а правее — область насыщения открытого диода.

При заданных отклонениях ΔU и ΔT получим приращение тока

$$\Delta I = 0.0761 \cdot 100 - 0.726 \cdot 20 = -6.91 \text{ мА}$$

и полный ток $I = 3.09 \text{ мА}$. Истинное значение тока, вычисленное по нелинейному уравнению (1.1), равно 4.8 мА. Большая относительная погрешность линеаризации $\delta_I = 35.6\%$ при небольших отклонениях аргументов от номинального режима объясняется сильной нелинейностью вольт-амперной характеристики диода. □

1.2.3. Статические ошибки в замкнутых системах управления

Основа функционирования замкнутой системы автоматического управления — принцип обратной связи, т. е. зависимость текущего сигнала, управляющего объектом, от его состояния, обусловленного предыдущими воздействиями. Обратная связь может быть *естественной*, присущей объекту, и *искусственно организованной* для повышения качества регулирования. Отрицательная обратная связь действует в сторону уменьшения, а положительная — в сторону увеличения отклонений выходных координат системы от их уставок. Деление обратной связи на отрицательную и положительную условно: при определенных частотных свойствах объекта может произойти инверсия ее знака.

Для определения статической ошибки в системе с обратной связью (см. рис. В.1, в) обозначим статические коэффициенты усиления устройства управления как K_y и объекта вместе с измерительным устройством как K_o . Тогда в установившемся режиме получим

$$x_{уст} = K_y e_{уст}, y_{уст} = K_o x_{уст}$$

и статическую ошибку регулирования

$$e_{уст} = g - y_{уст} = g - K_y K_o e_{уст} \Rightarrow e_{уст} = \frac{1}{1 + K_y K_o} g \neq 0.$$

Вывод

В статической замкнутой системе всегда существует ненулевая статическая ошибка регулирования. Будь она нулевой, то были бы нулевыми управление $x_{уст}$ и выход $y_{уст}$, что дало бы *ненулевое* значение $e_{уст} = g - y_{уст}$. Полученное противоречие доказывает основное свойство замкнутых статических систем.

Таким образом, **статический регулятор в принципе не может свести невязку к нулю**, а может лишь ее уменьшить. Для этого нужно увеличивать значение *коэффициента контурного усиления* $K_y K_o$. Поскольку обычно объект неизменяем, то остается единственная возможность — увеличение усиления регулятора K_y до максимально возможного значения. Верхний предел этого увеличения ограничен мощностью устройства управления и, в большей степени, требованиями устойчивости замкнутой системы управления, что будет показано в гл. 4.

На величину статической ошибки влияют также постоянные неконтролируемые внешние воздействия. Так, если на объекте скачком изменится нагрузка f_o , то изменится и выходная координата $y(t)$. В установившемся режиме замкнутой статической системы благодаря наличию отрицательной обратной связи автоматически сформируются новые значения y , e и x , зависящие от новой нагрузки.

Для устранения нежелательного свойства статизма введем в состав регулятора дополнительный элемент — *интегратор* с коэффициентом усиления $K_{\text{и}}$ (рис. 1.10, а). Докажем от противного, что в установившемся режиме полученной системы всегда будет достигаться нулевая статическая ошибка. Проследим развитие процессов $e(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ в пошаговом режиме отсчета времени (рис. 1.10, б).

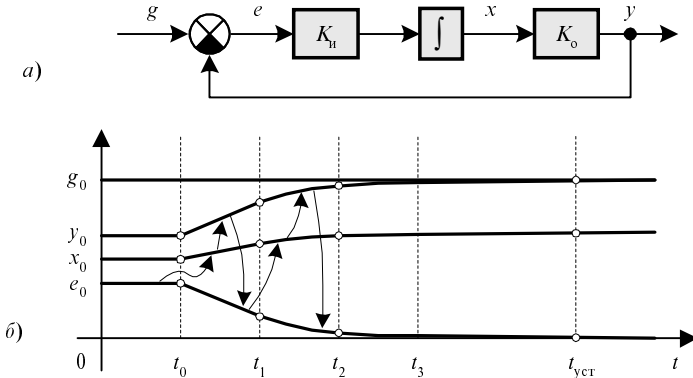


Рис. 1.10

Итак, предположим, что к моменту времени t_0 в системе установились *постоянные* значения управления x_0 , выхода $y_0 \neq g_0$ и ошибки $e_0 = g_0 - K_o x_0 \neq 0$. На первом шаге интегратор, обрабатывая постоянную ошибку, дает линейно изменяющееся управление

$$x(t) = x_0 + K_{\text{и}} e_0 \cdot (t - t_0).$$

Оно в свою очередь приводит к линейно изменяющемуся выходу

$$y(t) = K_o x_0 + K_o K_{\text{и}} e_0 \cdot (t - t_0),$$

приближающемуся к уставке g_0 . Тем самым ошибка регулирования

$$e(t) = e_0 - K_{\text{и}} K_o e_0 \cdot (t - t_0),$$

перестает быть постоянной и при правильно рассчитанном коэффициенте $K_{\text{и}}$ начинает уменьшаться. На последующих шагах процессы $e(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ становятся нелинейными, но общая тенденция развития переходных процессов такова, что с течением времени управление изменяется до тех пор, пока выход системы не сравняется с уставкой, а ошибка не станет исчезающе малой.

Таким образом, полученное противоречие позволяет сделать вывод: **в устойчивой астатической системе всегда автоматически устанавливается нулевая ошибка регулирования**. При этом выход интегратора равен g_0 / K_o при нулевом входе. Это справедливо при любой статической нагрузке, действующей на объект. Скачкообразное изменение нагрузки порождает изменение выхода системы и новый переходный процесс устранения статической ошибки благодаря наличию интегратора в структуре регулятора и действию отрицательной обратной связи. Управление

$$x(t) = K_{\text{и}} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

называется *интегральным*, или И-управлением.

Системы с И-управлением являются *астатическими* (с нулевой статической ошибкой), но медленными, что объясняется инерционностью процесса интегрирования ошибки. Системы с *пропорциональным* управлением

$$x(t) = K_{\text{п}}e(t)$$

могут быть быстродействующими, но не имеют астатизма. Комбинация пропорционального и интегрального управления

$$x(t) = K_{\text{п}}e(t) + K_{\text{и}} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

с оптимально подобранными коэффициентами $K_{\text{п}}$ и $K_{\text{и}}$ делает *двухканальную* замкнутую систему ПИ-управления (рис. 1.11) и астатической, и быстродействующей [20, 30]. При больших уровнях ошибки работает преимущественно пропорциональная составляющая управления, быстро сводящая ошибку к значению $g / (1 + K_{\text{п}}K_{\text{о}})$. Окончательное точное сведение ошибки к нулю возлагается на интегральную составляющую управления.

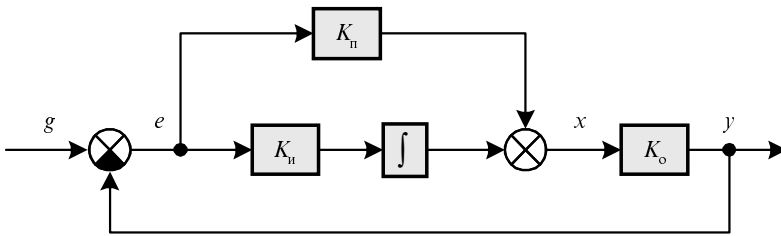


Рис. 1.11

1.3. Статический анализ и синтез схем на операционных усилителях

Для практической реализации и моделирования элементов и систем автоматики будем использовать широко распространенные средства аналоговой электроники — *операционные усилители* (ОУ), позволяющие конструировать сложные и разнообразные схемы с широким спектром статических и динамических свойств [1, 2, 18]. Операционный усилитель (рис. 1.12, а) — это аналоговое устройство усиления разности

$$\Delta U = U - \bar{U}$$

напряжений на его *прямом* (U) и *инверсном* (\bar{U}) входах:

$$U_{\text{вых}} = K_{\text{у}}\Delta U.$$