



А. П. Волощенко
С. П. Тарасов
П. П. Пивнев

Нелинейные волновые процессы

учебное пособие



УДК 534.222

ББК 32.875

В686

*Печатается по решению кафедры электрогидроакустической
и медицинской техники Института нанотехнологий, электроники
и приборостроения Южного федерального университета
(протокол № 21 от 5 февраля 2020 г.)*

Рецензенты:

начальник отдела, главный конструктор АО «НИИП
им. В. В. Тихомирова», кандидат технических наук *А. В. Скняря*
генеральный директор ООО «УльтраНК», кандидат технических наук
И. Г. Деренский

Волощенко, А. П.

В686 Нелинейные волновые процессы : учебное пособие / А. П. Волощенко, С. П. Тарасов, П. П. Пивнев ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. – 114 с.

ISBN 978-5-9275-3572-9

В учебном пособии изложены результаты теории и практики нелинейных акустических волн, а также сведения об основных нелинейных характеристиках, сопровождающих распространение этих волн. Приведены примеры и задачи по расчету характеристик нелинейных параметрических антенн.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 12.04.01 «Приборостроение», 12.04.04 «Биотехнические системы и технологии», а также научных работников по специальностям 01.04.06 «Акустика» и 05.11.06 «Акустические приборы и системы».

УДК 534.222

ББК 32.875

ISBN 978-5-9275-3572-9

© Южный федеральный университет, 2020
© Волощенко А. П., Тарасов С. П.,
Пивнев П. П., 2020
© Оформление. Макет. Издательство
Южного федерального университета, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 6 |
| 1. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ | 12 |
| 1.1. Уравнение Навье – Стокса. Уравнение непрерывности | 12 |
| 1.2. Уравнение состояния | 13 |
| 1.3. Закон сохранения импульса. Радиационное напряжение | 15 |
| 2. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН | 20 |
| 2.1. Числа Маха и Рейнольдса. Малые параметры | 20 |
| 2.2. Уравнение нелинейной акустики с точностью до квадратичных членов | 21 |
| 2.3. Метод медленно изменяющегося профиля. Уравнение Хохлова – Заболотской – Кузнецова для звуковых пучков | 24 |
| 2.4. Плоские нелинейные волны | 26 |
| 2.4.1. Уравнение Бюргерса | 26 |
| 2.4.2. Решение уравнения Бюргерса для малых чисел Рейнольдса | 26 |
| 2.4.3. Решение уравнения Бюргерса. Эффект «насыщения» | 27 |
| 2.4.4. Развитие нелинейных эффектов при больших числах Рейнольдса | 29 |
| 2.4.5. Распространение нелинейных волн после образования разрыва | 31 |
| 2.4.6. Гармонический состав волн конечной амплитуды | 32 |
| 2.4.7. Затухание волн конечной амплитуды | 35 |
| 2.4.8. Отражение волны конечной амплитуды от границы раздела | 36 |
| 2.5. Сферические и цилиндрические одномерные волны конечной амплитуды | 38 |
| 2.6. Волны в средах с дисперсией | 39 |
| 2.6.1. Уравнение Кортевега – де Вриза | 40 |
| 2.6.2. Метод последовательных приближений для уравнения КДВ | 41 |
| 2.6.3. Стационарное решение уравнения КДВ. Солитоны | 43 |
| 2.6.4. Волны на поверхности жидкости конечной глубины | 45 |

| | |
|--|----|
| 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ | 47 |
| 4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АНТЕННЫ | 52 |
| 4.1. Модель излучающей и приемной антенн. Общие сведения ... | 52 |
| 4.2. Теория излучающей параметрической антенн | 55 |
| <i>4.2.1. Решение уравнения ХЗК методом последовательных приближений</i> | 55 |
| <i>4.2.2. Осевое распределение амплитуды и фазы волны разностной частоты</i> | 59 |
| <i>4.2.3. Диаграмма направленности</i> | 61 |
| <i>4.2.4. Амплитудные характеристики</i> | 64 |
| 4.3. Параметрическая антенна в режиме излучения сложных сигналов | 65 |
| <i>4.3.1. Передача ЛЧМ-сигналов</i> | 66 |
| <i>4.3.2. Самодетектирование акустических импульсов</i> | 67 |
| 4.4. Влияние плоских отражающих границ | 68 |
| <i>4.4.1. Особенности расчета поля ВРЧ при отражении</i> | 68 |
| <i>4.4.2. Анализ характеристик излучающей антенны при отражении</i> | 70 |
| 4.5. Устройство излучающих параметрических антенн и некоторые особенности измерения их характеристик | 73 |
| 4.6. Приемные параметрические антенны | 74 |
| 4.7. Применение параметрических антенн | 77 |
| 5. ЗАДАЧИ ПО РАСЧЕТУ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ | 79 |
| 5.1. Общие сведения | 79 |
| 5.2. Соотношения для аналитического расчета акустического тракта параметрического излучателя | 82 |
| 5.3. Расчет характеристик параметрического излучателя по номограммам | 83 |
| <i>5.3.1. Основные параметры нелинейного акустического излучателя</i> | 84 |
| <i>5.3.2. Некоторые особенности расчета и вопросы оптимизации параметрических излучателей</i> | 85 |

| | |
|--|-----|
| 5.3.3. Порядок расчета звукового давления ВРЧ в ближней зоне на оси излучателя по номограммам | 88 |
| 5.3.4. Порядок расчета звукового давления ВРЧ в дальней зоне ($x > L_D$) на оси излучателя с учетом затухания по номограммам | 90 |
| 5.3.5. Порядок расчета ширины характеристики направленности параметрического излучателя | 92 |
| 5.4. Пример численного расчета типового задания | 94 |
| 5.4.1. Расчет максимального уровня ВРЧ и амплитудно-частотной характеристики параметрического излучателя | 95 |
| 5.4.2. Расчет осевого распределения звукового давления параметрического излучателя | 98 |
| 5.4.3. Расчет ширины характеристики направленности сигнала разностной частоты по уровню 0,7 в рабочем диапазоне частот | 100 |
| 5.5. Задания по расчету акустического тракта нелинейных параметрических излучателей | 101 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 108 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 110 |

1. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В акустике длина волны намного больше, чем характерные меж-
атомные расстояния. Поэтому используются уравнения механики сплош-
ных сред. Основные уравнения механики сплошных сред нелинейны, они
имеют разный вид в эйлеровых координатах. В эйлеровых координатах
движение описывается в координатах неподвижного пространства. В ла-
гранжевой системе координаты рассматриваемых точек связаны с движу-
щимися элементами среды [1, 24, 28, 29, 31, 32, 34, 35].

1.1. Уравнение Навье – Стокса. Уравнение непрерывности

Уравнения гидродинамики в эйлеровых координатах имеют следу-
ющий вид:

1. Уравнение движения Навье – Стокса

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\vec{v}. \quad (1)$$

2. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность среды; \vec{v} – скорость; p – давление; η , ξ – соответ-
ственно сдвиговая и объемная вязкость среды.

Система (1)–(2) – это четыре уравнения для пяти неизвестных
(ρ , p , v_x , v_y , v_z). Система неполная и должна быть дополнена уравнением со-
стояния.

Иногда систему (1)–(2) дополняют уравнением сохранения энергии,
учитывая, что количество тепла, выделяемое в системе в результате дисси-
пативных процессов, равно произведению изменения энтропии S на темпе-
ратуру среды T :

$$\rho T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)S \right] = \frac{\eta}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik}(\nabla\vec{v}) \right]^2 + \xi(\nabla\vec{v})^2 + \chi\nabla\nabla T, \quad (3)$$

где χ – коэффициент теплопроводности; δ_{ik} – символ Кронекера.

Добавление уравнения (3) не улучшает ситуацию разрешимости системы уравнений (1)–(2), так как добавляются еще две неизвестные функции: энтропия – S и температура T . Требуется учесть еще термодинамические условия движения жидкости, из которых может быть получено уравнение состояния. Система уравнений (1)–(3) нелинейна.

1.2. Уравнение состояния

Уравнение состояния для газов и жидкостей описывает зависимость между плотностью ρ , давлением p и энтропией S в среде.

В звуковой волне при быстрых изменениях плотности не успевает происходить процесс переноса тепла между участками сжатия и растяжения. В этом случае движение изоэнтропично.

Для газов при этом можно пользоваться адиабатическим уравнением состояния Пуассона:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (4)$$

где p_0 – невозмущенное давление; ρ_0 – невозмущенная плотность среды; $\gamma = C_p/C_v$ – отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Если нужно учесть поглощение звука, то вместо выражения (4) в одномерном случае может быть использовано модельное уравнение, дополненное диссипативным членом:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - b \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (5)$$

Здесь $b = \frac{4}{3}\eta + \xi + \chi(1/C_v - 1/C_p)$ – диссипативный коэффициент среды, учитывающий кроме вязкости еще и теплопроводность. Добавочное диссипативное напряжение в уравнении (5) пропорционально $\sim \partial v/\partial z$, так как вязкость и теплопроводность проявляются, когда есть градиент скорости.

Уравнение (4) справедливо для газов. Теория жидкого состояния до конца не разработана и не позволяет получить точное уравнение состояния. Однако имеется довольно много полуэмпирических и эмпирических уравнений состояния, удовлетворительно описывающих экспериментальные

данные. В гидроакустике часто используют эмпирическое уравнение состояния Тэта:

$$P = P_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma_0} - 1 \right], \quad (6)$$

где P – избыточное давление; P_0 и γ_0 – эмпирические постоянные. P_0 иногда называют внутренним давлением. Внутреннее давление в жидкостях порядка 10^9 Па, что связано с сильным межмолекулярным давлением в жидкости.

Таблица 1

Значение параметра γ_0 для жидкостей

| Жидкость | γ_0 |
|------------------------|------------|
| Азот жидкий | 4,2 |
| Ацетон | 10,0 |
| Бензин А-70 | 11,2 |
| Вода | 6,1 |
| Глицерин | 10,4 |
| Скипидар | 10,5 |
| Спирт метиловый | 9,7 |
| Спирт этиловый | 10,8 |
| Трансформаторное масло | 7,5 |

Для полного давления в жидкости ($P + P_0$) из (6) следует аналог уравнения (4). Поскольку в уравнениях нелинейной акустики будут встречаться в основном производные от уравнения (6), то далее не будет делаться различие между уравнениями (6) и (4), даже если берется лишь избыточное давление. Поэтому все последующие результаты, в которых используется γ , могут быть применены для жидкостей $\gamma \rightarrow \gamma_0$. В дальнейшем для газов и жидкостей будет использоваться одно и то же обозначение нелинейного параметра γ . Значения γ_0 для некоторых жидкостей приведены в табл. 1, откуда следует, что параметр γ_0 для различных жидкостей меняется незначительно. В настоящее время имеется ряд теоретических и экспериментальных работ, показывающих, что при насыщении жидкости или пластмасс пузырьками какого-либо газа параметр γ может быть увеличен на 2 или 3 порядка [1, 24, 28, 29, 31, 32, 34, 35].

1.3. Закон сохранения импульса. Радиационное напряжение

В звуковом поле возникают не зависящие от времени радиационные напряжения. В отличие от давления напряжение характеризуется тензорной величиной. По тензору напряжений T_{ij} можно определить компоненты вектора силы $F_i = T_{ij}n_j$, где n_j – компонента единичного вектора нормали к площадке, на которую действует сила. Таким образом, величина силы на единицу площади в этом случае зависит от ориентации выбранной площадки (в случае скалярного давления, как известно, такой зависимости нет). Несмотря на то, что в звуковом поле возникают именно радиационные напряжения и, следовательно, на предметы, помещенные в поле, действуют радиационные силы (т.е. векторные величины), до сих пор в акустической литературе широко используется старый термин «радиационное давление».

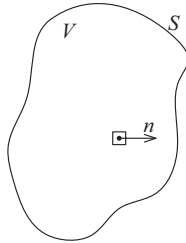


Рис. 1. К расчету изменения импульса в объеме V с поверхностью S в потоке

Рассмотрим силы, действующие на некоторый объем V (рис. 1), находящийся в потоке. Пренебрегая вязкостью, уравнения (1) и (2) запишем в виде

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (8)$$

где суммирование, как обычно, проводится по дважды повторяющимся индексам. Умножая (8) на v_i и складывая с (7), получим

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho v_i v_j + p \delta_{ij}] = 0. \quad (9)$$

Интегрируя (9) по объему V и преобразуя для дивергентной части объемный интеграл в поверхностный, получим закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho v_i dV = - \iint T_{ij}^0 n_j dS, \quad (10)$$

где $T_{ij}^0 = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}$, n_j – компоненты вектора внешней нормали к поверхности S объема V . Левая часть (10) представляет собой изменение импульса в объеме V , которое определяет силу F_i , действующую на этот объем. Следовательно,

$$F_i = - \iint T_{ij}^0 n_j dS. \quad (11)$$

Тензор T_{ij}^0 носит название тензора плотности потока импульса. В вязкой среде $T_{ij} = T_{ij}^0 - \sigma'_{ij}$, $\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \xi \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ – тензор вязких напряжений. В звуковой волне ρ , v и p изменяются в пространстве и во времени. Постоянная радиационная сила определяется усреднением (11) (или соответствующего условия для вязкой среды) за период

$$\bar{F}_i = - \iint \bar{T}_{ij}^0 n_j dS. \quad (12)$$

Радиационные напряжения возникают в звуковом поле вместе с полем. Однако это не означает, что они всегда сопровождаются возникновением радиационных сил. Для иллюстрации рассмотрим простейший пример плоской волны, распространяющийся в невязкой жидкости вдоль оси z (рис. 2). Определим радиационную силу, действующую на объем V , в виде кубика, две поверхности которого S_3 и S'_3 нормальны к оси z . В соответствии с (12) действующая на боковые поверхности S_1, S'_1, S_2, S'_2 суммарная радиационная сила равна нулю из-за попарной компенсации сил на поверхности $S_1 - S'_2$ и $S_1 - S'_2$ (нормали к этим поверхностям направлены противоположно). Аналогично сила, действующая S'_3 , компенсируется силой, действующей на S_3 :

$$\iint \bar{T}_{33}^0 n_3 dS_3 = - \iint \bar{T}_{33}^0 n_3 dS'_3. \quad (13)$$

Общая сила, действующая на этот объем, равна нулю. Радиационные силы проявляются в тех случаях, когда в объеме по тем или иным причинам возникает изменение среднего по времени импульса. Это изменение может быть вызвано, например, поглощением звука (при этом из-за поглощения в объеме V интегралы в (13) не будут равны), рассеянием звука на препятствиях, односторонним излучением звука и т.д. Видно, что, например, в

плоской волне радиационное давление на плоскость, ориентированную нормально к направлению распространения звука, зависит от коэффициента отражения от этой плоскости: при нулевом коэффициенте отражения (полностью поглощающей плоскости) это давление будет в два раза меньше, чем при полностью отражающей звук поверхности, так как в последнем случае изменение импульса определяется как падающей, так и отраженной волной. Из (11) видно, что в звуковом поле радиационная сила в невязкой среде, действующая на единицу полностью поглощающей звук поверхности тела, имеет вид

$$P_i = \overline{\rho v_i u_j} n_j + \bar{p} \delta_{ij} n_j, \quad (14)$$

или в векторных обозначениях:

$$\vec{P} = \overline{\rho \vec{v} (\vec{v} \vec{n})} + \bar{p} \vec{n}. \quad (15)$$

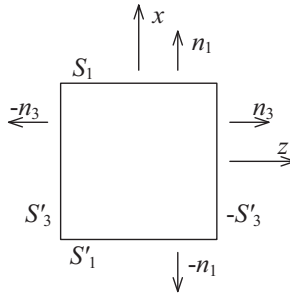


Рис. 2. Попарная компенсация радиационных сил, действующих на поверхность кубика, в плоской волне, распространяющейся вдоль оси z в невязкой среде

Часто \vec{P} называют просто радиационным давлением, не говоря об условиях его возникновения в звуковом поле, что может привести к неправильным выводам. Поэтому следует подчеркнуть еще раз, что (14) и (15) – это не реальное радиационное давление на какое-либо препятствие, а давление, которое могло бы возникнуть на поверхности гипотетического тела, полностью поглощающего звук. Из (15) формально следует, что радиационное давление равно среднему по времени давлению в звуковой волне только в случае абсолютно жесткого твердого тела (нормальная компонента скорости $(\vec{v} \vec{n})$), причем, согласно сказанному ранее, это тело еще

должно полностью поглощать звук. Это противоречивые требования, так как в такое тело потока звуковой энергии не будет. Поэтому равенство радиационного давления среднему по времени звуковому давлению в эйлеровой системе координат практически никогда не выполняется.

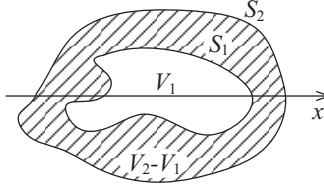


Рис. 3. К теореме определения радиационной силы, действующей на объем V_1 , по полю рассеяния звука объемом V_2 в недиссипативной среде

В реальных ситуациях зачастую бывает трудно определить для тела сложной формы со сложными импедансными условиями на границе интеграл по поверхности тела в выражении (12). В недиссипативной среде в этом необходимости нет: можно определить интеграл не на поверхности S_1 (см. рис. 3), а на некоторой другой поверхности S_2 , ограничивающей больший объем V_2 . Если в объеме $V_2 - V_1$ потери импульса нет, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho v_i d(V_2 - V_1) = 0 = - \iint T_{ij}^0 n_j dS_2 + \iint T_{ij}^0 n_j dS_1. \quad (16)$$

(разные знаки перед интегралами в (16) стоят потому, что для внутреннего объема берется внутренняя нормаль) и, следовательно:

$$\iint \bar{T}_{ij}^0 n_j dS_1 = \iint \bar{T}_{ij}^0 n_j dS_2, \quad (17)$$

т.е. сила, действующая на тело V_1 , равна силе, действующей на весь объем V_2 . Эта теорема позволяет по дальнему полю рассеяния звука объектом определить радиационную силу, при этом используются асимптотические решения для рассеянной волны. Естественно, что эта теорема справедлива в отсутствие диссипации в объеме $V_2 - V_1$, а также в том случае, когда в этом объеме нет дополнительных рассеивателей.

Радиационное давление – квадратичная величина относительно переменных поля. При расчете радиационного давления из (14) необходимо принимать во внимание величины второго порядка малости. Для плоской бегущей волны, например, из (14) следует