М. Э. Абрамян

Лекции по дифференциальному исчислению функций одной переменной

учебник

УДК 517.4(075.8)
ББК 22.162я73
А164

*Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета (протокол № 2 от 14 февраля 2020 г.)*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика»
Южно-Российского государственного политехнического университета,
почетный работник высшего профессионального образования РФ,
профессор *А. Э. Пасенчук*;

доктор физико-математических наук, зав. кафедрой информатики
и вычислительного эксперимента Института математики, механики
и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета,
профессор *В. С. Пилиди*

Абрамян, М. Э.
А164 Лекции по дифференциальному исчислению функций одной переменной : учебник / М. Э. Абрамян ; Южный федеральный университет. — Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. — 228 с.
ISBN 978-5-9275-3495-1

Учебник содержит лекционный материал первого семестра курса по математическому анализу и включает такие темы, как предел последовательности, предел функции, непрерывные функции и дифференцируемые функции (вплоть до формулы Тейлора, правила Лопиталя и исследования функций методами дифференциального исчисления). Особенностью книги является возможность ее изучения одновременно с просмотром набора из 22 видеолекций, записанных автором и доступных на сайте youtube.com. Разделы и подразделы учебника снабжены сведениями о номере лекции, времени начала соответствующего фрагмента и длительности этого фрагмента. В электронном варианте учебника эти сведения оформлены в виде гиперссылок, позволяющих немедленно перейти к просмотру требуемого фрагмента лекции.

Учебник предназначен для студентов физико-математических и технических специальностей.

УДК 517.4(075.8)
ББК 22.162я73

ISBN 978-5-9275-3495-1

Оглавление

1. Границы множеств

Аксиома непрерывности множества вещественных чисел

1A/00:00 (09:55)

У вещественных чисел имеется большое количество свойств, связанных с арифметическими операциями (сложение, умножение), а также с операциями сравнения. Эти свойства подробно изучаются в курсе алгебры. Для наших целей особую роль будет играть свойство вещественных чисел, называемое *аксиомой непрерывности*.

Аксиома непрерывности множества вещественных чисел.

Пусть X, Y – непустые подмножества множества $\mathbb{R}$, обладающие следующим свойством: для любых двух элементов $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$. Тогда существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для любых элементов $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq c \leq y$.

Замечание.

Множество рациональных чисел таким свойством не обладает. Действительно, рассмотрим два непустых подмножества *рациональных* чисел:

$$X = \left\{x \in \mathbb{Q} : 1 < x < \sqrt{2}\right\}, \quad Y = \left\{y \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < y < 2\right\}.$$

Очевидно, что для любых элементов $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, однако не существует *рационального* числа c, удовлетворяющего условию $x \leq c \leq y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$, поскольку число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

Границы и точные границы числовых множеств

Ограниченные числовые множества: основные определения

1A/09:55 (16:59)

Определение.

Числовое множество X называется *ограниченным сверху*, если существует такое вещественное число M, что для любого элемента x из множества X справедлива оценка $x \leq M$:

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad x \le M.$$

Если множество X *не* ограничено сверху, то это означает, что

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, x \in X \quad x > M.$$

Числовое множество X называется *ограниченным снизу*, если существует такое вещественное число m, что для любого элемента x из множества X справедлива оценка $x \ge m$:

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad x \ge m.$$

Если множество X *не* ограничено снизу, то это означает, что

$$\forall\, m \in \mathbb{R} \quad \exists\, x \in X \quad x < m.$$

Множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу, т. е.

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad m \le x \le M.$$

Число M, фигурирующее в определении ограниченного сверху множества, называется *верхней границей* этого множества, а число m, фигурирующее в определении ограниченного снизу множества, называется *нижней границей* этого множества.

Если множество X ограничено, то

$$\exists\, M_0 > 0 \quad \forall\, x \in X \quad |x| \le M_0.$$

В качестве M_0 можно взять максимальное из чисел $|m|$ и $|M|$, где m и M – числа из определения ограниченного множества.

Точные границы числовых множеств: первый вариант определения

1A/26:54 (03:38)

Определение 1 супремума и инфимума.

Если X – ограниченное сверху множество, то наименьшая верхняя граница множества X называется *супремумом* множества X, или его *точной верхней границей* (обозначение: $\sup X$).

Если X – ограниченное снизу множество, то наибольшая нижняя граница множества X называется *инфимумом* множества X, или его *точной нижней границей* (обозначение: $\inf X$).

Теоремы о существовании точных границ

1A/30:32 (06:43)

Теорема 1 (о существовании точной верхней границы).

Непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу.

Доказательство.

Пусть X – данное множество. Обозначим через B множество всех его верхних границ. Множество B не пусто, так как по условию X ограничено сверху. Тогда для любых $x \in X$, $y \in B$ справедлива оценка $x \le y$.

Таким образом, выполнены условия аксиомы непрерывности вещественных чисел, если в качестве множества A взять множество X.

По аксиоме непрерывности получаем:

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X, y \in B \quad x \le c \le y.$$

Покажем, что это число c есть точная верхняя граница:

1) c – верхняя граница множества X, так как $\forall\, x \in X$ $x \le c$;

2) c – наименьшая верхняя граница, так как $\forall\, y \in B$ $c \le y$. □

Следующая теорема доказывается аналогичным образом.

Теорема 2 (о существовании точной нижней границы).

Непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю границу.

Следствие.

Непустое ограниченное множество X имеет точную верхнюю и точную нижнюю границу.

Точные границы числовых множеств: второй вариант определения

1В/00:00 (13:34)

Определение 2 супремума и инфимума.

Число s называется *супремумом* множества X, если

1) это число является верхней границей:

$$\forall\, x \in X \quad x \le s;$$

2) это число является наименьшей верхней границей:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X \quad x > s - \varepsilon.$$

Число i называется *инфимумом* множества X, если

1) это число является нижней границей:

$$\forall\, x \in X \quad x \ge i;$$

2) это число является наибольшей нижней границей:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X \quad x < i + \varepsilon.$$

Очевидно, определения 1 и 2 являются эквивалентными.

Пример.

Докажем, что b является точной верхней границей интервала (a, b). По определению интервала точка b является верхней границей (поскольку если $x \in (a, b)$, то $a < x < b$). Осталось показать, что b – наименьшая верхняя граница, т. е. что выполняется следующее условие:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in (a, b) \quad x > b - \varepsilon.$$

Действительно, в качестве такого x можно, например, взять точку $b - \frac{\varepsilon}{2}$ (или любую точку интервала (a, b), если $b - \frac{\varepsilon}{2} \le a$).

Максимальный и минимальный элемент множества

1B/13:34 (11:02)

Определение.

Пусть X – непустое ограниченное сверху множество. Если для него выполняется условие $\sup X \in X$, то элемент $\sup X$ называется *максимальным элементом* множества X и обозначается $\max X$.

Пусть X – непустое ограниченное снизу множество. Если для него выполняется условие $\inf X \in X$, то элемент $\inf X$ называется *минимальным элементом* множества X и обозначается $\min X$.

Не каждое ограниченное непустое множество имеет максимальный или минимальный элемент. Например, интервал (a, b) не имеет ни минимального, ни максимального элемента.

Множество, состоящее из конечного числа чисел, всегда имеет минимальный и максимальный элемент. Эти элементы можно найти с помощью алгоритма поиска минимального или максимального элемента, сделав конечное число шагов.

Теорема 1 (о существовании максимального элемента у ограниченного сверху целочисленного множества).

Если непустое множество X содержит только целые числа и ограничено сверху, то оно имеет максимальный элемент.

Доказательство.

Если X ограничено сверху, то для него существует точная верхняя граница s: $s = \sup X$. Это означает, что $\forall\, x \in X \ x \le s$; кроме того, для $\varepsilon = 1$ найдется такой элемент $x_0 \in X$, что $x_0 > s - 1$.

Покажем, что $x_0 = \max X$. Поскольку $x_0 \in X$, получаем $x_0 \le s$. Неравенство $x_0 > s - 1$ можно преобразовать к виду $x_0 + 1 > s$, поэтому все целые числа, начиная с $x_0 + 1$, не принадлежат X. Таким образом, для всех чисел $x \in X$ справедлива оценка $x \le x_0$, значит, x_0 является верхней границей множества X и $x_0 \ge s$. Из неравенств $x_0 \le s$ и $x_0 \ge s$ следует, что x_0 совпадает с точной верхней границей s, поэтому $x_0 = \max X$. $\square$

Аналогичным способом может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2 (о существовании минимального элемента у ограниченного снизу целочисленного множества).

Если непустое множество X содержит только целые числа и ограничено снизу, то оно имеет минимальный элемент.

Единственность точных границ 2A/00:00 (03:23)

Теорема (о единственности точных границ).

Если множество X имеет точную верхнюю или точную нижнюю границу, то эта граница определяется единственным образом.

Доказательство.

Докажем данное утверждение от противного. Предположим, что множество X имеет две различные точные верхние границы: $a = \sup X$, $b = \sup X$ и $a \neq b$. Поскольку $a \neq b$, получаем, что выполняется одно из двух неравенств: $a < b$ или $b < a$. Тогда если $a < b$ и $a = \sup X$, то число b не может быть точной верхней границей, а если $b < a$ и $b = \sup X$, то число a не может быть точной верхней границей. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и существует единственная точная верхняя граница.

Единственность точной нижней границы доказывается аналогично. □

Арифметические операции над множествами

Арифметические операции над множествами: определения 1B/24:36 (06:09)

Определение.

Пусть X и Y – множества вещественных чисел. Тогда их *сумма* $X+Y$ определяется следующим образом:

$$X + Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R} : (\exists\, x \in X, y \in Y \quad z = x + y)\}.$$

Пример.

Найдем сумму множеств $[0,1]$ и $[2,3]$ ($[0,1]$ и $[2,3]$ – сегменты).

Для $x \in [0,1]$ имеем $0 \leq x \leq 1$. Для $y \in [2,3]$ имеем $2 \leq x \leq 3$. Тогда $2 \leq x + y \leq 4$. Следовательно, $[0,1] + [2,3] = [2,4]$.

Определение.

Пусто X – множество вещественных чисел, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда *произведение множества X на число λ* определяется следующим образом:

$$\lambda X \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R} : (\exists\, x \in X \quad z = \lambda x)\}.$$

Замечание.

Вообще говоря, $X + X \neq 2X$. Приведем пример. Пусть $X = \{0, 1\}$. Тогда $X + X = \{0, 1, 2\}$, $2X = \{0, 2\}$. Следовательно, $X + X \neq 2X$.

Теоремы о точных границах для суммы множеств

1B/30:45 (12:50)

Теорема 1 (о точной верхней границе суммы множеств).

Пусть X и Y – непустые ограниченные сверху множества. Тогда

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

Доказательство.

1. Обозначим $s = \sup X + \sup Y$ и докажем, что s – верхняя граница множества $X + Y$.

Рассмотрим произвольный элемент z множества $X + Y$: $z = x + y$ для некоторых $x \in X$ и $y \in Y$.

Так как $x \le \sup X$, $y \le \sup Y$, получаем $z = x + y \le \sup X + \sup Y = s$.

Таким образом, для произвольного элемента $z \in X + Y$ выполняется оценка $z \le s$, следовательно, s – верхняя граница.

2. Докажем, что s – наименьшая верхняя граница множества $X + Y$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число.

Покажем, что $s - \varepsilon$ не является верхней границей множества $X + Y$, т. е. что существует такое число $z_0 = x_0 + y_0 \in X + Y$, для которого $z_0 > s - \varepsilon$.

По определению наименьшей верхней границы множества X

$$\exists\, x_0 \in X \quad x_0 > \sup X - \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению наименьшей верхней границы множества Y

$$\exists\, y_0 \in Y \quad y_0 > \sup Y - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Почленно складывая данные неравенства, получаем требуемое:

$$z_0 = x_0 + y_0 > \sup X + \sup Y - \varepsilon = s - \varepsilon. \ \square$$

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 2 (о точной нижней границе суммы множеств).

Пусть X и Y – непустые ограниченные снизу множества. Тогда

$$\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y.$$

Теоремы о точных границах для произведения множества на число

2A/03:23 (04:13)

Теорема 1 (первая теорема о точных границах произведения множества на число).

Пусть X – непустое ограниченное сверху множество, $\lambda > 0$. Тогда

$$\sup(\lambda X) = \lambda \sup X.$$

Доказательство.

1. Пусть $\lambda x \in \lambda X$.

Поскольку для $x \in X$ имеем $x \le \sup X$, получаем $\lambda x \le \lambda \sup X$.

Следовательно, $\lambda \sup X$ является верхней границей множества λX.

2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

По определению наименьшей верхней границы множества X

$$\exists\, x' \in X \quad x' > \sup X - \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Тогда

$$\lambda x' > \lambda \left(\sup X - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = \lambda \sup X - \varepsilon.$$

Мы нашли элемент $\lambda x' \in \lambda X$, обладающий тем свойством, что для выбранного ε выполняется неравенство $\lambda x' > \lambda \sup X - \varepsilon$. Следовательно, $\lambda \sup X$ является точной верхней границей множества λX. □

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 2 (вторая теорема о точных границах произведения множества на число).

1. Пусть X – непустое ограниченное снизу множество, $\lambda > 0$. Тогда

$$\inf(\lambda X) = \lambda \inf X.$$

2. Пусть X – непустое ограниченное сверху множество, $\lambda < 0$. Тогда

$$\inf(\lambda X) = \lambda \sup X.$$

3. Пусть X – непустое ограниченное снизу множество, $\lambda < 0$. Тогда

$$\sup(\lambda X) = \lambda \inf X.$$

2. Предел последовательности

Окрестность и симметричная окрестность точки

Окрестность и симметричная окрестность: определение и свойства 2A/07:36 (13:32)

Определение.

Пусть A – точка числовой прямой: $A \in \mathbb{R}$. *Окрестностью* U_A точки A называется любой интервал (a, b), содержащий эту точку. *Симметричной ε-окрестностью* U_A^ε точки A называется интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое число, называемое *радиусом* симметричной окрестности.

Пересечение любого непустого конечного множества окрестностей точки A есть окрестность точки A. Пересечение любого непустого конечного множества симметричных окрестностей точки A есть симметричная окрестность точки A.

Объединение любого непустого (в том числе бесконечного) множества окрестностей точки A есть окрестность точки A. Объединение любого непустого (в том числе бесконечного) множества симметричных окрестностей точки A есть симметричная окрестность точки A.

Замечание.

Любая окрестность (a, b) точки A содержит симметричную окрестность:

$$(a, b) \supset (A - \varepsilon, A + \varepsilon), \text{ где } \varepsilon = \min\{|A - a|, |A - b|\}.$$

Дополнение. Пересечение окрестностей 3A/00:00 (01:21)

При описании свойств окрестностей точек мы отмечали, что пересечение любого непустого конечного множества окрестностей данной точки является окрестностью этой точки. Покажем, что в случае бесконечного множества окрестностей данное утверждение не является верным. Для этого достаточно привести пример.

Рассмотрим множество интервалов вида $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Все такие интервалы являются окрестностями точки 0. Однако их пересечение состоит из единственной точки 0. Действительно, для любой точки $x \neq 0$

найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|x| \geq \frac{1}{n_0}$. Следовательно, точка x не будет принадлежать интервалу $\left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right)$, а значит, и пересечению всех таких интервалов для n от 1 до ∞.

Итак, пересечение всех интервалов $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, состоит из одной точки 0. Но единственная точка не может быть окрестностью. Таким образом, мы показали, что пересечение бесконечного количества окрестностей некоторой точки может не являться ее окрестностью.

Определение предела последовательности

Последовательность: определение и примеры

2A/21:08 (06:29)

Определение.

Отображение $f : \mathbb{N} \to X$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, называется *последовательностью* с *элементами* (или *членами*) $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots$ и обозначается $\{x_n\}$. При этом x_n называется *общим членом* последовательности.

Последовательность называется *числовой*, если $X = \mathbb{R}$.

Примеры последовательностей.

$\left\{\frac{1}{n}\right\} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

$\left\{n^2\right\} : 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

Как определить предел последовательности?

2A/27:37 (07:52)

Если мы рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и будем перебирать ее элементы по возрастанию их индексов, то они будут всё ближе и ближе подходить к точке 0. Естественно считать, что число 0 будет *пределом* последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Еще одним примером последовательности, предел которой равен 0, является последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Эта последовательность интересна тем, что ее элементы приближаются к точке 0 с разных сторон.

Если же мы рассмотрим последовательность $\left\{n^2\right\}$, то ее элементы не будут приближаться ни к какому конечному числу, поэтому естественно считать, что эта последовательность не имеет конечного предела.

Какое свойство точки 0 позволяет считать ее пределом последовательностей $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$? Для описания такого свойства проще всего воспользоваться понятием окрестности точки. Точка A будет пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности U_A этой точки все элементы последовательности, кроме, быть может, некоторого конечного числа ее начальных элементов, будут лежать в этой окрестности. Иными словами, требуется, чтобы для любой окрестности U_A в ней находилось бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, а вне ее – конечное число элементов.

Легко видеть, что для последовательностей $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ только точка 0 удовлетворяет указанному условию.

В этом определении важно не только то, что в любой окрестности содержится бесконечное число элементов последовательности, но и то, что вне окрестности остается лишь конечное число ее элементов. Без второго условия оказалось бы, что последовательность $\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ имеет два предела: -1 и 1, однако наличие нескольких пределов у одной последовательности привело бы к проблемам при построении теории пределов.

В определении предела можно использовать симметричные окрестности, этот вариант часто оказывается более удобным для использования.

Определение предела последовательности на языке окрестностей `2A/35:29 (05:33)`, `2B/00:00 (01:07)`

Определение 1 предела последовательности (на языке окрестностей).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности U_A точки A найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что все элементы x_n с номерами, большими, чем N, будут содержаться в окрестности U_A. Кратко это условие можно записать следующим образом:

$$\forall\, U_A \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad x_n \in U_A.$$

Определение предела последовательности на языке симметричных окрестностей `2B/01:07 (19:41)`

Определение 2 предела последовательности (на языке симметричных окрестностей).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности V_A^ε точки A радиуса $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что все элементы x_n с номерами, большими, чем N, будут содержаться в окрестности V_A^ε:

$$\forall V_A^\varepsilon \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n \in V_A^\varepsilon.$$

Теорема (об эквивалентности двух определений предела последовательности).

Определения 1 и 2 равносильны.

Доказательство.

Очевидно, что если A – предел последовательности в смысле определения 1, то A – предел и в смысле определения 2, так как симметричная окрестность является окрестностью.

Докажем обратное. Пусть A – предел $\{x_n\}$ в смысле определения 2. Покажем, что A – предел $\{x_n\}$ и в смысле определения 1.

Пусть U_A – произвольная окрестность точки A. Для окрестности U_A всегда можно выбрать содержащуюся в ней симметричную окрестность V_A^ε: $V_A^\varepsilon \subset U_A$.

Согласно определению 2 для окрестности V_A^ε существует $N \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $n > N$ $x_n \in V_A^\varepsilon$. Но $V_A^\varepsilon \subset U_A$, поэтому для всех $n > N$ $x_n \in U_A$. Таким образом, в силу произвольности выбора окрестности U_A, точка A является пределом и в смысле определения 1. □

Определение 2 можно переформулировать следующим образом.

Определение 3 предела последовательности (на языке ε–N).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, или, что то же самое, $|x_n - A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon.$$

Такой вариант определения называется определением на языке ε–N.

Обозначение предела: $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$ при $n \to \infty$ (читается «x_n стремится к A при n, стремящемся к бесконечности»).

Последовательность, имеющая предел $A \in \mathbb{R}$, называется *сходящейся* (к этому пределу A).

Примеры нахождения предела последовательности с использованием определения

2B/20:48 (11:47)

1. $x_n = \frac{1}{n}$.

Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, что для всех $n > N$ будет выполняться оценка $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, т. е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ равносильно неравенству $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Пусть $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Поскольку n является натуральным, получаем, что для всех $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ справедлива оценка: $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Эту оценку можно продолжить, если использовать свойство целой части вещественного числа ($[x] \leq x < [x] + 1$):

$$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит, для всех натуральных $n > N$, где $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, справедлива оценка $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \quad \forall\, n > N \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

В данном случае предел тоже будет равен 0.

Рассуждения будут совершенно аналогичными рассуждениям, проведенным для последовательности из примера 1, так как неравенство $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$ записывается в том же виде, что и в примере 1: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Пример последовательности, не имеющей предела

2B/32:35 (08:29)

Итак, повторим еще раз, что число A является пределом последовательности $\{x_n\}$, если в *любой* окрестности числа A содержатся *все* элементы последовательности, кроме, быть может, некоторого *конечного* количества ее начальных элементов.

Для того чтобы показать, что число A не является пределом последовательности $\{x_n\}$, достаточно указать некоторую окрестность числа A, вне которой содержится *бесконечное* количество элементов последовательности $\{x_n\}$.

Формально утверждение о том, что число A *не* является пределом последовательности $\{x_n\}$, можно записать, применив операцию отрицания к одному из определений предела, например (для определения 3):

$$\overline{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon},$$

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n > N \quad |x_n - A| \geq \varepsilon.$$

Пусть $\varphi_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \ldots$

Докажем, что эта последовательность не имеет предела. Для этого воспользуемся приведенным выше отрицанием утверждения о том, что число A является пределом последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пусть $A = 1$. Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда для любого натурального N существует *нечетный* номер $n > N$, для которого $\varphi_n = -1$, и, следовательно, этот элемент последовательности не попадет в ε-окрестность точки 1. Поэтому число $A = 1$ не является пределом последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пусть $A = -1$. Тогда, выбрав $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получаем, что для любого натурального N существует *четный* номер $n > N$, для которого $\varphi_n = 1$, и, следовательно, этот элемент последовательности не попадет в ε-окрестность точки -1. Поэтому число $A = -1$ также не является пределом последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пусть A – некоторое число, отличное от 1 и -1. Положим $\varepsilon = \min\{|A-1|, |A+1|\}$. Тогда в ε-окрестность точки A не попадет *ни один* элемент последовательности $\{\varphi_n\}$. Поэтому все такие числа также не могут быть пределом последовательности $\{\varphi_n\}$.

Простейшие свойства предела последовательности

Теорема о единственности предела сходящейся последовательности

3A/01:21 (13:39)

Теорема (о единственности предела сходящейся последовательности).

Сходящаяся последовательность не может иметь двух разных пределов.

Доказательство.

Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что A и B – разные пределы исходной последовательности $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = B, \quad A \neq B.$$

Тогда у точек A и B существуют непересекающиеся окрестности U_A и U_B: $U_A \cap U_B = \varnothing$.

По определению 1 предела последовательности для окрестности U_A имеем:

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_1 \quad x_n \in U_A. \tag{1}$$

Аналогично для окрестности U_B имеем:

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_2 \quad x_n \in U_B. \tag{2}$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда, в силу соотношений (1) и (2), для $n > N$ должно выполняться условие $x_n \in U_A \cap U_B$.

Но окрестности U_A и U_B не пересекаются, значит, для $n > N$ $x_n \in \varnothing$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что наше предположение было неверным, и последовательность $\{x_n\}$ не может иметь двух разных пределов. □

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

3A/15:00 (12:09)

Определение.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое $M > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка $|x_n| \leq M$:

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M.$$

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности).

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство.

Пусть $A = \lim_{n\to\infty} x_n$. Тогда для $\varepsilon = 1$ имеем:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad |x_n - A| < 1.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Таким образом, для любых $n > N$ имеем $|x_n| < M_1$, где $M_1 = 1 + |A|$.

Кроме того, множество $\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$ является конечным и, следовательно, содержит максимальный элемент со значением M_2. Тогда для всех $n \leq N$ выполняется оценка $|x_n| \leq M_2$.

Взяв $M = \max\{M_1, M_2\}$, получаем:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M. \ \square$$

Замечание.

Обратное утверждение неверно: последовательность может быть ограниченной и при этом не иметь предела. В качестве примера можно привести ранее рассмотренную последовательность $\{\varphi_n\} = \{(-1)^n\}$. Очевидно, она является ограниченной, так как $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\varphi_n| \leq 1$, но мы доказали, что предела она не имеет.