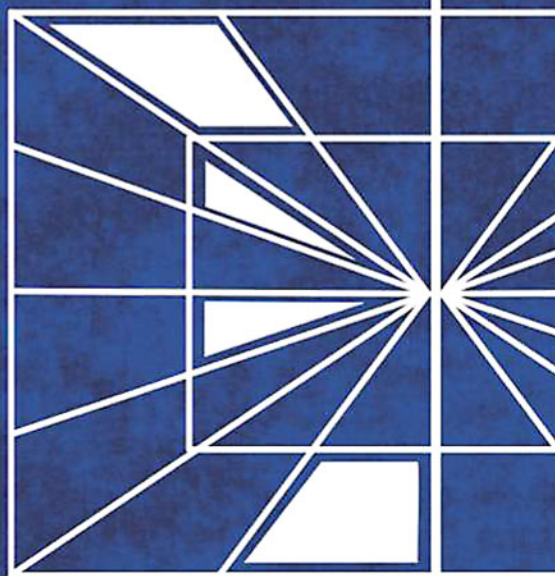


**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ
ОСЕССИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД**



УДК 539.3
ББК 22.251
А 64



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 10-08-07061

Авторский коллектив:

Айзикович С.М., Александров В.М., Васильев А.С.,
Крнев Л.И., Трубчик И.С.

Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 192 с. — ISBN 978-5-9221-1299-4.

Монография посвящена методам решения осесимметричных статических смешанных задач теории упругости и термоупругости для функционально-градиентных сред. Излагаются аналитические методы решения новых неклассических задач механики контактных взаимодействий и концентраций напряжений для функционально-градиентных сред с учетом независимого изменения: как модуля сдвига, так и коэффициента Пуассона. Данные задачи являются ключевыми при использовании новых материалов с градиентными и уникальными физико-механическими свойствами в машиностроении, микроэлектронике, биомеханике, энергетике, в аэрокосмической и транспортной промышленности.

Книга предназначена научным и инженерно-техническим работникам, а также преподавателям, аспирантам и студентам вузов, специализирующимся в области механики деформируемого твердого тела.

Научное издание

АЙЗИКОВИЧ Сергей Михайлович *АЛЕКСАНДРОВ Виктор Михайлович*
ВАСИЛЬЕВ Андрей Сергеевич *КРЕНЕВ Леонид Иванович*
ТРУБЧИК Ирина Степановна

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД**

Редактор *Е.И. Ворошилова*

Оригинал-макет: *Е.В. Макеев*

Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 21.01.11. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Отпечатано

в ОАО «Ивановская областная типография»

153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6

E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

© ФИЗМАТЛИТ, 2011

ISBN 978-5-9221-1299-4

© Коллектив авторов, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Исследование напряженно-деформированного состояния и распределения температуры в функционально-градиентном покрытии при произвольном осесимметричном термо-механическом воздействии	13
§ 1.1. Постановка граничной квазистатической задачи термоупругости для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства при заданных на его поверхности усилиях и источниках	13
§ 1.2. Построение фундаментального решения квазистатической осесимметричной термоупругой задачи для неоднородного по глубине полупространства	18
§ 1.3. Численный анализ решения осесимметричной граничной задачи квазистатической теплопроводности для функционально-градиентного покрытия при заданном на его поверхности тепловом потоке	24
1.3.1. Постановка задачи (24). 1.3.2. Анализ влияния монотонно изменяющегося значения коэффициента теплопроводности в приповерхностном слое на распределение температурного поля и теплового потока (25). 1.3.3. Анализ влияния немонотонно изменяющегося по глубине покрытий коэффициента теплопроводности в приповерхностном слое на распределение температурного поля и теплового потока (31). 1.3.4. Распределения температуры и теплового потока в покрытии, вызванные действием равномерной температуры с поверхности в пределах круга радиуса a , для некоторых немонотонных видов неоднородности (38).	
Глава 2. Кручение жестким круглым штампом неоднородного полупространства	45
§ 2.1. Постановка задач I и I ⁰	45
§ 2.2. Сведение задачи I к решению интегрального уравнения	46
§ 2.3. Численное построение трансформанты ядра интегрального уравнения.	49

§ 2.4. Некоторые общие свойства трансформанты ядра интегрального уравнения.	50
2.4.1. Некоторые свойства трансформанты ядра (50). 2.4.2. Аналитические свойства трансформанты ядра интегрального уравнения (51). 2.4.3. Некоторые аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения (56). 2.4.4. Алгоритм построения аппроксимации главной части функции трансформанты ядра выражением специального вида (57). 2.4.5. Численные примеры трансформант ядер (58).	
§ 2.5. Двухстороннее асимптотическое решение парного интегрального уравнения, порождаемого преобразованием Ханкеля $J_1(\alpha r)$	61
2.5.1. Некоторые вспомогательные преобразования (62). 2.5.2. Замкнутое решение интегральных уравнений класса Π_1 (63). 2.5.3. Существование и единственность решения интегрального уравнения задачи I для $L(u)$ класса Π_1 (65).	
§ 2.6. Двухсторонние асимптотические свойства замкнутых приближенных решений.	68
2.6.1. Единственность решения задачи I (68). 2.6.2. Некоторые определения и вспомогательная теорема (69). 2.6.3. Доказательство асимптотической точности (71).	
§ 2.7. Численные примеры	76
2.7.1. Определение закона неоднородности среды (76). 2.7.2. Неоднородные среды, градиент изменения упругих свойств которых меняет знак 1, 2, 4 и более раз (77). 2.7.3. Простейшие аналитические решения интегральных уравнений контактных задач для материалов с функционально-градиентными покрытиями (80).	
§ 2.8. Оценка упругих характеристик неоднородных покрытий.	85
§ 2.9. Напряженно-деформированное состояние полупространства	87
Глава 3. Вдавливание жесткого кругового в плане штампа в неоднородное полупространство	93
§ 3.1. Постановка задачи о вдавлении штампа с плоской подошвой в неоднородное полупространство	93
§ 3.2. Замкнутое приближенное решение задачи о внедрении осесимметричного штампа в неоднородное полупространство	96
3.2.1. Построение замкнутого приближенного решения задачи о внедрении осесимметричного штампа (96). 3.2.2. Существование и единственность решения интегрального уравнения (3.11) для $L(u)$ класса Π_N (103).	
§ 3.3. Определение формы осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства при внедрении в него осесимметричного штампа	105
§ 3.4. Численные примеры	107
§ 3.5. Контактная задача о деформировании мягкого слоя на жесткой подложке	109

Глава 4. Контактные задачи с неизвестной заранее зоной контакта для неоднородных тел	116
§ 4.1. Внедрение параболического индентора в неоднородное полупространство	116
4.1.1. Введение и постановка задачи (116). 4.1.2. Замкнутое решение поставленной задачи (119). 4.1.3. Численный анализ решения задачи о внедрении параболического штампа в неоднородное основание (125).	
§ 4.2. Определение формы осадки поверхности неоднородного полупространства при внедрении в него параболоида вращения	133
§ 4.3. Апостериорные оценки точности двухстороннего асимптотического метода решения интегрального уравнения задачи	135
4.3.1. Численное исследование зависимости погрешности (135). 4.3.2. Численный анализ напряженно-деформированного состояния неоднородного слоя при индентировании (135). 4.3.3. Численный анализ напряженно-деформированного состояния неоднородного слоя при одновременном изменении модуля Юнга и коэффициента Пуассона (140). 4.3.4. Численный анализ решения задачи о внедрении параболического штампа в неоднородное основание (146). 4.3.5. Оценка точности приближенного аналитического решения (147). 4.3.6. Численный анализ напряженно-деформированного состояния неоднородного слоя при индентировании (147).	
Глава 5. Дисковая трещина в функционально-градиентном пространстве	155
§ 5.1. Постановка задачи и некоторые свойства трансформант ядер интегральных уравнений	157
§ 5.2. Построение и обоснование замкнутого решения парного интегрального уравнения	159
5.2.1. Некоторые вспомогательные преобразования (159). 5.2.2. Замкнутое решение вспомогательного интегрального уравнения (161).	
§ 5.3. Анализ влияния характера неоднородности на напряженно-деформированное состояние градиентной среды на берегах трещины	164
§ 5.4. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородного слоя в окрестности дисковой трещины для типичных функционально-градиентных покрытий	169
5.4.1. Постановка задачи (169). 5.4.2. Построение фундаментального решения для неоднородного по глубине полупространства (170). 5.4.3. Численный анализ решения для некоторых характерных распределений модуля Юнга (172).	
Заключение	181
Список литературы	182

Глава 1

**ИССЛЕДОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕМПЕРАТУРЫ
В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ
ПОКРЫТИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ
ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕРМО-МЕХАНИЧЕСКОМ
ВОЗДЕЙСТВИИ**

В этой главе предлагается аналитико-численный метод решения граничной задачи Неймана для упругого полупространства с функционально-градиентным упругим покрытием. Дается постановка задачи и излагается процесс построения фундаментального решения (функции Грина). Метод позволяет найти решение задачи для достаточно широкого класса законов неоднородности среды и дает возможность аналитически исследовать различные эффекты, связанные с неоднородностью. Особое внимание уделяется решению пространственной задачи термоупругости для полупространства с неоднородным покрытием. Описывается процедура расчета полей смещений, напряжений, деформации и тепловых потоков. Приводятся численные примеры решения осесимметричной граничной задачи квазистатической теплопроводности для функционально-градиентного полупространства при заданном на его поверхности тепловом потоке или температуре.

§ 1.1. Постановка граничной квазистатической задачи термоупругости для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства при заданных на его поверхности усилиях и источниках

Рассмотрим полупространство, упругие характеристики которого непрерывно меняются с глубиной в пределах прилегающего к поверхности слоя толщины H , а затем стабилизируются и остаются постоянными. С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Обозначим через u, v, w смещения вдоль осей r, φ, z , а через $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$ — радиальное, угловое, нормальное и танген-

циальные напряжения соответственно. Кроме того, введем обозначения для температуры T , коэффициента теплопроводности $\lambda_T(z)$, коэффициента линейного расширения $\alpha_T(z)$, коэффициента теплоемкости $c_T(z)$. В ненапряженном состоянии температуру полупространства примем равной T_0 и будем анализировать разность температур $\theta = T - T_0$. Для определения полей перемещений, деформаций, напряжений и температуры в рамках квазистатической несвязанной задачи термоупругости мы имеем системы уравнений, выписанных ниже.

1. Уравнения равновесия неоднородного по глубине полупространства при отсутствии массовых сил, записанные в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\varphi = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\varphi}) + r\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + r^2\frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{zr}) + \frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial\varphi} + r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

2. Уравнения неоднородной по глубине теплопроводности для температурного поля:

$$\lambda_T(z)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\lambda_T(z)}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z} + c_T(z)\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

3. Уравнения связи термоупругих напряжений с деформациями (Дюамеля–Неймана) [48]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2M(z)\varepsilon_r + \Lambda(z)\varepsilon - 3K(z)\alpha_T(z)\theta, \\ \sigma_\varphi &= 2M(z)\varepsilon_\varphi + \Lambda(z)\varepsilon - 3K(z)\alpha_T(z)\theta, \\ \sigma_z &= 2M(z)\varepsilon_z + \Lambda(z)\varepsilon - 3K(z)\alpha_T(z)\theta, \\ \tau_{r\varphi} &= 2M(z)\varepsilon_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = 2M(z)\varepsilon_{rz}, \\ \tau_{\varphi z} &= 2M(z)\varepsilon_{\varphi z}, \quad 3K(z) = 3\Lambda(z) + 2M(z), \\ \theta &= T - T_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее предполагается, что как коэффициенты Ламе $M(z)$ и $\Lambda(z)$, так и коэффициенты теплопроводности $\lambda_T(z)$, линейного расширения $\alpha_T(z)$, а также теплоемкости $c_T(z)$ являются непрерывными функциями координаты z , такими, что

$$\begin{aligned} 1. \quad M(z) &= M(-H) = M^S, \quad -\infty \leq z \leq -H, \\ \Lambda(z) &= \Lambda(-H) = \Lambda^S, \quad \lambda_T(z) = \lambda_T(-H) = \lambda_T^S, \\ \alpha_T(z) &= \alpha_T(-H) = \alpha_T^S; \end{aligned}$$

2. $M(z) = M^C(z)$, $\Lambda(z) = \Lambda^C(z)$, $-H \leq z \leq 0$,
 $\lambda_T(z) = \lambda_T^C(z)$, $\alpha_T(z) = \alpha_T^C(z)$, $c_T(z) = c_T^C(z)$;
 3. $M^C(-H) = M^S$, $\Lambda^C(-H) = \Lambda^S$,
 $\lambda_T^C(-H) = \lambda_T^S$, $\alpha_T^C(-H) = \alpha_T^S$, $c_T^C(z) = c_T^S(z)$;
- $$\begin{aligned} \min_{z \in (-\infty, 0)} \Lambda(z) &\geq \Lambda_* > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} \Lambda(z) &\leq \Lambda^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} M(z) &\geq M_* > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} M(z) &\leq M^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} \lambda_T(z) &\geq \lambda_{T*} > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} \lambda_T(z) &\leq \lambda_T^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} \alpha_T(z) &\geq \alpha_{T*} > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} \alpha_T(z) &\leq \alpha_T^* < \infty, \\ \min_{z \in (-\infty, 0)} c_T(z) &\geq c_{T*} > 0, & \max_{z \in (-\infty, 0)} c_T(z) &\leq c_T^* < \infty, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где H — толщина неоднородного слоя, сцепленного с подстилающим полупространством, то есть глубина, с которой мы полагаем термомеханические характеристики полупространства постоянными. Индекс S соответствует подстилающему однородному полупространству, а C — неоднородному слою, Λ_* , Λ^* , M_* , M^* , λ_{T*} , λ_T^* , α_{T*} , α_T^* , c_{T*} , c_T^* — произвольные константы.

Наряду с парой коэффициентов Ламе для описания упругого поведения твердого изотропного тела используются: либо модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν , либо модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Коэффициенты Ламе Δ и M (иногда обозначаемый G и называемый модулем сдвига) связаны с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и изотермическим модулем объемного расширения K соотношениями

$$\begin{aligned} M &= \frac{E}{2(1+\nu)}, & \Lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & E &= \frac{M(2M+3\Lambda)}{M+\Lambda}, \\ \nu &= \frac{\Lambda}{2(M+\Lambda)}, & 3K(z) &= 3\Lambda(z) + 2M(z). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Компоненты малой деформации выражаются через смещения по формулам Коши следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В случае действия осесимметричной термо-механической нагрузки смещения деформации напряжения и температура не зависят от угловой координаты φ ; таким образом, система уравнений (1.1) разделяется на две части: (1.7) и (1.8).

$$1. \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\varphi = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{zr}) + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + r^2 \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$

Система (1.7) описывает осесимметричное напряженное состояние, возникающее под действием нормальной к поверхности нагрузки, а уравнение (1.8), соответственно, — равновесие полупространства, скручиваемого касательным усилием. Выражения для компонент деформаций при этом упрощаются, то есть:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для случая стационарной теплопроводности неоднородного по глубине полупространства. В осесимметричном случае соответствующее уравнение имеет вид

$$\lambda_T(z) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda_T(z)}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (1.10)$$

Запишем (на основании (1.3), (1.9)) представления для напряжений через смещения, а именно:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \frac{\partial u}{\partial r} + \Lambda(z) \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - k(z)\theta, \\ \sigma_\varphi &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \frac{u}{r} + \Lambda(z) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - k(z)\theta, \\ \sigma_z &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \frac{\partial w}{\partial z} + \Lambda(z) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - k(z)\theta, \\ \tau_{rz} &= M(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \tau_{r\varphi} = M(z) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ \tau_{\varphi z} &= M(z) \frac{\partial v}{\partial z}, \quad k(z) = 3K(z)\alpha_T(z). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставляя выражения (1.11) в уравнения равновесия (1.7) и (1.8), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных

На бесконечности, при $(r, -z) \rightarrow \infty$, смещения, деформации и напряжения исчезают. Значения разности температур и теплового потока при этом также стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, мы сформулировали первую граничную квазистатическую осесимметричную термоупругую задачу для неоднородного полупространства: найти смещения, деформации, напряжения и распределение температуры внутри полупространства, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1.12) при заданных граничных условиях и распределении воздействий на границе (1.13)–(1.15).

Заметим, что для неоднородного пространства будет справедливо:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta') = 0. \quad (1.16)$$

§ 1.2. Построение фундаментального решения квазистатической осесимметричной термоупругой задачи для неоднородного по глубине полупространства

Будем искать решение для смещений u , v и w и температуры θ в виде интегралов Ханкеля:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= - \int_0^\infty U(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, & v(r, z) &= \int_0^\infty V(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, \\ w(r, z) &= \int_0^\infty W(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, & \theta(r, z) &= \int_0^\infty T(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставим (1.17) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (1.12) и, приравняв к нулю подынтегральные выражения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left\{ \begin{aligned} MU'' + \gamma(M + \Lambda)W' - \gamma^2(2M + \Lambda)U + M'U' + \gamma M'W &= k\gamma T, \\ (2M + \Lambda)W'' - \gamma(M + \Lambda)U' - \gamma^2 MW + \\ &+ (2M' + \Lambda')W' - \gamma \Lambda' U = k'T + kT', \\ MV'' + M'V' - \gamma^2 MV &= 0, \\ \lambda_T^C(z)(T^C)'' - \gamma^2 \lambda_T^C(z)T^C + (\lambda_T^C)'(z)(T^C)' &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.18)$$

Здесь знак «'» указывает на дифференцирование по z . В системе дифференциальных уравнений (1.18) третье уравнение не связано с остальными, поэтому рассмотрим его решение в следующей главе. Граничные условия (1.13) примут следующий вид:

$$(2M(0) + \Lambda(0)) W'(\gamma, 0) - \gamma \Lambda(0) U(\gamma, 0) - k(0) T(\gamma, 0) = -P(\gamma),$$

$$M(0) (\gamma W(\gamma, 0) + U'(\gamma, 0)) = Q(\gamma), \quad T'(\gamma, 0) = -\alpha B(\gamma),$$

$$P(\gamma) = \int_0^{\infty} p(\rho) J_0(\rho\gamma) \rho d\rho, \quad Q(\gamma) = \int_0^{\infty} q(\rho) J_1(\rho\gamma) \rho d\rho, \quad (1.19)$$

$$B(\gamma) = \int_0^{\infty} \beta(\rho) J_0(\rho\gamma) \rho d\rho.$$

Используя векторное представление для трансформант

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

$$x_1 = U, \quad x_2 = U', \quad x_3 = W, \quad x_4 = W', \quad x_5 = T, \quad x_6 = T', \quad (1.20)$$

запишем систему (1.18) с исключенным третьим уравнением в матричном виде; при этом явно выделим части соответствующие покрытию и подложке:

$$\frac{d\mathbf{x}^C}{dz} = \mathbf{A}^C \mathbf{x}^C, \quad -H \leq z \leq 0, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{A}^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2 \frac{2M + \Lambda}{M} & -\frac{M'}{M} & -\gamma \frac{M'}{M} & -\gamma \frac{M + \Lambda}{M} & \frac{\gamma k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma \frac{\Lambda'}{2M + \Lambda} & \gamma \frac{M + \Lambda}{2M + \Lambda} & \gamma^2 \frac{M}{2M + \Lambda} & -\frac{2M' + \Lambda'}{2M + \Lambda} & \frac{k'}{2M + \Lambda} & \frac{k}{2M + \Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & -\frac{\lambda_T^{C'}}{\lambda_T^C} \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{x}^S}{dz} = \mathbf{A}^S \mathbf{x}^S, \quad -\infty < z \leq -H, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2 \frac{2M + \Lambda}{M} & 0 & 0 & -\gamma \frac{M + \Lambda}{M} & \frac{\gamma k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \frac{M + \Lambda}{2M + \Lambda} & \gamma^2 \frac{M}{2M + \Lambda} & 0 & 0 & \frac{k}{2M + \Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия при этом имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (2M(0) + \Lambda(0))x_4^C(\gamma, 0) - \gamma\Lambda(0)x_1^C(\gamma, 0) - k(0)x_5^C &= -P(\gamma), \\ M(0)(\gamma x_3^C(\gamma, 0) + x_2^C(\gamma, 0)) &= Q(\gamma), \quad x_6^C(\gamma, 0) = -\alpha B(\gamma), \\ x_1^C(\gamma, 0) = x_1^S(\gamma, -H), \quad x_3^C(\gamma, 0) &= x_3^S(\gamma, -H), \\ x_2^C(\gamma, 0) = x_2^S(\gamma, -H), \quad x_4^C(\gamma, 0) &= x_4^S(\gamma, -H), \\ x_5^C(\gamma, 0) = x_5^S(\gamma, -H), \quad x_6^C(\gamma, 0) &= x_6^S(\gamma, -H). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Необходимо отметить, что последнее условие имеет место в силу непрерывности изменения свойств слоя и основания (1.3).

Общее решение системы (1.18) для однородного полупространства $\Lambda' = M' = K' = \lambda_T' = 0$, $M > 0$, $\Lambda > 0$, $K > 0$, $\lambda_T > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^S(\gamma, z) &= (d_1 + \gamma z d_2 + (-\kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3) e^{\gamma z}, \\ x_2^S(\gamma, z) &= (d_1 + (1 + \gamma z) d_2 + (\kappa_3/\gamma + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3) \gamma e^{\gamma z}, \\ x_3^S(\gamma, z) &= (d_1 + (-\kappa_1 + \gamma z) d_2 + (-\kappa_3/\gamma + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3) e^{\gamma z}, \\ x_4^S(\gamma, z) &= (d_1 + (1 - \kappa_1 + \gamma z) d_2 + (\kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3) \gamma e^{\gamma z}, \\ x_5^S(\gamma, z) &= d_3 e^{\gamma z}, \quad x_6^S(\gamma, z) = \gamma d_3 e^{\gamma z}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\kappa_1 = \frac{\Lambda + 3M}{\Lambda + M}, \quad \kappa_2 = \frac{k_1}{2(2M + \Lambda)}, \quad \kappa_3 = \frac{k_1}{2M},$$

где d_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольная функция параметра γ . Решение $\mathbf{x}^C(\gamma, z)$ системы дифференциальных уравнений (1.21) строится методом модулирующих функций [33]. Будем искать $\mathbf{x}^C(\gamma, z)$ в виде

$$\mathbf{x}^C(\gamma, z) = \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) \mathbf{a}_i(\gamma, z) e^{\gamma z}. \tag{1.25}$$

Векторы $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$, ($i = 1, 2, 3$) определяются из решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{dz} = \mathbf{A}^C \mathbf{a}_i - \gamma \mathbf{a}_i, \quad -H \leq z \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.26)$$

при начальных условиях для $z = -H$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\gamma, z) \Big|_{z=-H} &= (1, \gamma, 1, \gamma, 0, 0), \\ \mathbf{a}_2(\gamma, z) \Big|_{z=-H} &= (\gamma z, \gamma + \gamma^2 z, -\kappa_1 + \gamma z, \gamma - \kappa_1 \gamma + \gamma^2 z, 0, 0) \Big|_{z=-H}, \\ \mathbf{a}_3(\gamma, z) \Big|_{z=-H} &= (-\kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, \kappa_3 / \gamma + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, \\ &\quad - \frac{\kappa_3}{\gamma} + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, \kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, 1, \gamma) \Big|_{z=-H}. \end{aligned}$$

Константы $d_i(\gamma)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются из условия (1.23). Таким образом, мы имеем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) N_i(\gamma) = -P(\gamma), \\ \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) M_i(\gamma) = Q(\gamma), \\ \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) O_i(\gamma) = -\alpha B(\gamma), \end{cases} \quad (1.27)$$

$$N_i(\gamma) = -\Lambda(0) \gamma a_i^1(\gamma, 0) + (\Lambda(0) + 2M(0)) a_i^4(\gamma, 0) - k(0) a_i^5(\gamma, 0),$$

$$M_i(\gamma) = M(0) a_i^2(\gamma, 0) + M(0) \gamma a_i^3(\gamma, 0),$$

$$O_i(\gamma) = a_i^6(\gamma, 0), \quad O_1(\gamma) = O_2(\gamma) = 0.$$

Здесь $a_i^k(\gamma, z)$ ($i = 1, 2, 3$) обозначает k -ю компоненту вектора $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

$$d_1 = -k_2^1(\gamma) P(\gamma) - k_2^2(\gamma) Q(\gamma) + k_2^3(\gamma) \alpha B(\gamma),$$

$$d_2 = k_1^1(\gamma) P(\gamma) + k_1^2(\gamma) Q(\gamma) + k_1^3(\gamma) \alpha B(\gamma),$$

$$d_3 = \frac{1}{O_3(\gamma)} \alpha B,$$

$$k_2^1(\gamma) = \frac{M_2(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_2^2(\gamma) = \frac{N_2(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_2^3(\gamma) = \frac{\Delta_{23}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)} \frac{1}{O_3(\gamma)}, \quad (1.28)$$

$$k_1^1(\gamma) = \frac{M_1(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_1^2(\gamma) = \frac{N_1(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_1^3(\gamma) = \frac{\Delta_{13}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)} \frac{1}{O_3(\gamma)},$$

$$\Delta_{ij}(\gamma) = N_i(\gamma) M_j(\gamma) - N_j(\gamma) M_i(\gamma).$$

Окончательно получаем следующее выражение для компонент вектора решения $\mathbf{x}^C(\gamma, z)$ при $z \geq -H$:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= U(\gamma, z) = \\
 &= (L_1^1(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^1(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^1(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\
 x_2 &= U'(\gamma, z) = \\
 &= (L_1^2(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^2(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^2(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\
 x_3 &= W(\gamma, z) = \\
 &= (L_1^3(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^3(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^3(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\
 x_4 &= W'(\gamma, z) = \\
 &= (L_1^4(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^4(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^4(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z}/\gamma, \\
 x_5 &= T(\gamma, z) = L_3^5(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z}/\gamma, \\
 x_6 &= T'(\gamma, z) = L_3^6(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z}/\gamma.
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
 L_1^i(\gamma, z) &= (k_1^1(\gamma)a_2^i(\gamma, z) - k_2^1(\gamma)a_1^i(\gamma, z))\gamma, \\
 L_2^i(\gamma, z) &= (k_1^2(\gamma)a_2^i(\gamma, z) - k_2^2(\gamma)a_1^i(\gamma, z))\gamma, \\
 L_3^i(\gamma, z) &= (k_1^3(\gamma)a_2^i(\gamma, z) + k_2^3(\gamma)a_1^i(\gamma, z) + \frac{a_3^i(\gamma, z)}{O_3(\gamma)})\gamma.
 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 I_{1i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_1^k(\gamma, z)P(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r) d\gamma \\
 &(k = 1, 2; i = 1), (k = 3, 4; i = 0), \\
 I_{2i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_2^k(\gamma, z)Q(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r) d\gamma \\
 &(k = 1, 2; i = 1), (k = 3, 4; i = 0), \\
 I_{3i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_3^k(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r) d\gamma \\
 &(k = 1, 2; i = 1), (k = 3, 4, 5, 6; i = 0), \\
 J_{1i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_1^k(\gamma, z)P(\gamma)e^{\gamma z}J_i(\gamma r) \gamma d\gamma \\
 &(k = 2; i = 0), (k = 4; i = 1),
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$J_{2i}^k(r, z) = \int_0^\infty L_2^k(\gamma, z) Q(\gamma) e^{\gamma z} J_i(\gamma r) \gamma d\gamma$$

$$(k = 2; i = 0), (k = 4; i = 1),$$

$$J_{3i}^k(r, z) = \int_0^\infty L_3^k(\gamma, z) \alpha B(\gamma) e^{\gamma z} J_i(\gamma r) \gamma d\gamma$$

$$(k = 2; i = 0), (k = 4; i = 1),$$

В соответствии с (1.9)–(1.11) мы можем теперь выписать выражения для смещений, температуры, теплового потока и деформаций:

$$u(r, z) = \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z), \quad w(r, z) = \sum_{i=1}^3 I_{i0}^3(r, z),$$

$$\theta(r, z) = I_{30}^5(r, z), \quad \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} = I_{30}^6(r, z),$$

$$\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w(r, z)}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z), \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} = \sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z),$$

$$\frac{\partial w(r, z)}{\partial r} = - \sum_{i=1}^3 J_{i1}^4(r, z), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) - \sum_{i=1}^3 J_{i1}^4(r, z) \right),$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) + \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z);$$

а также для напряжений:

$$\sigma_r = (\Lambda(z) + 2M(z)) \left(\sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) \right) +$$

$$+ \Lambda(z) \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) + \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z) \right) - k(z) I_{30}^5(r, z),$$

$$\sigma_\varphi = (\Lambda(z) + 2M(z)) \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) +$$

$$+ \Lambda(z) \left(\sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) + \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z) \right) - k(z) I_{30}^5(r, z), \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z) + \\ &+ \Lambda(z) \left(\sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) \right) - k(z) I_{30}^5(r, z), \\ \tau_{rz} &= M(z) \left(\sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) - \sum_{i=1}^3 J_{i1}^4(r, z) \right), \quad k(z) = 3K(z)\alpha_T(z). \end{aligned}$$

§ 1.3. Численный анализ решения осесимметричной граничной задачи квазистатической теплопроводности для функционально-градиентного покрытия при заданном на его поверхности тепловом потоке

1.3.1. Постановка задачи. Рассмотрим распределение температуры и теплового потока в покрытии, вызванное воздействием равномерного теплового потока с поверхности в пределах круга радиуса a , для некоторых характерных видов неоднородности. Будем считать, что коэффициент теплопроводности $\lambda_T(z)$ непрерывно изменяется в приповерхностной зоне так, что выполняются соотношения (1.4). В записи граничных условий на поверхности неоднородного полупространства (1.13) полагаем, что усилия отсутствуют, то есть: $p(r) = q(r) = t(r) = 0$, $0 \leq r < \infty$, $z = 0$ и граничные условия на поверхности и в зоне сцепления неоднородного слоя с подстилающим однородным полупространством имеют вид

$$\begin{aligned} (\theta^C(r, 0))' &= -\alpha\beta(r), \quad \text{при } r \leq a; \quad (\theta^C(r, 0))' = 0, \quad \text{при } r > a; \\ \theta^C(r, -H) &= \theta^S(r, -H), \quad (\theta^C(r, -H))' = (\theta^S(r, -H))'. \end{aligned} \quad (1.33)$$

На бесконечности, при $(r, -z) \rightarrow \infty$, значения разности температур и теплового потока стремятся к нулю и выполняются соотношения (1.15).

В § 1.2 было построено общее решение квазистатической осесимметричной термоупругой задачи для неоднородного полупространства. В развернутом виде формулы для определения распределения температуры и теплового потока в функционально-градиентном покрытии при заданном на поверхности тепловом потоке можно записать так:

$$\theta(r, z) = \int_0^\infty L_3^5(\gamma, z) \alpha B(\gamma) e^{\gamma z} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} = \int_0^\infty L_3^6(\gamma, z) \alpha B(\gamma) e^{\gamma z} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad B(\gamma) = \int_0^a \beta(\rho) J_0(\rho \gamma) \rho d\rho.$$

Значения температуры и теплового потока в приповерхностной зоне функционально-градиентного покрытия находятся с помощью численного интегрирования в заданных точках (r, z) неоднородного по глубине полупространства. Бесконечная область интегрирования по γ разбивается на отрезки знакопостоянства подынтегральной функции (функции $L_3^5(\gamma, z)e^{\gamma z}$ и $L_3^6(\gamma, z)e^{\gamma z}$ могут менять знак в ограниченной области изменения (γ, z) и далее монотонно стремятся к 0, так что корни подынтегральной функции определяются в основном корнями функций Бесселя, которые легко находятся). Расчет ведется до тех пор, пока значение интеграла на отрезке знакопостоянства превосходит заданную (достаточно малую) величину. Таким образом, можно интегрировать, отступая от границы полупространства на некоторое расстояние (порядка 0,01 Н), при этом функции $L_3^5(\gamma, z)e^{\gamma z}$ и $L_3^6(\gamma, z)e^{\gamma z}$ должны быть вычислены до значений $\gamma \leq 500$.

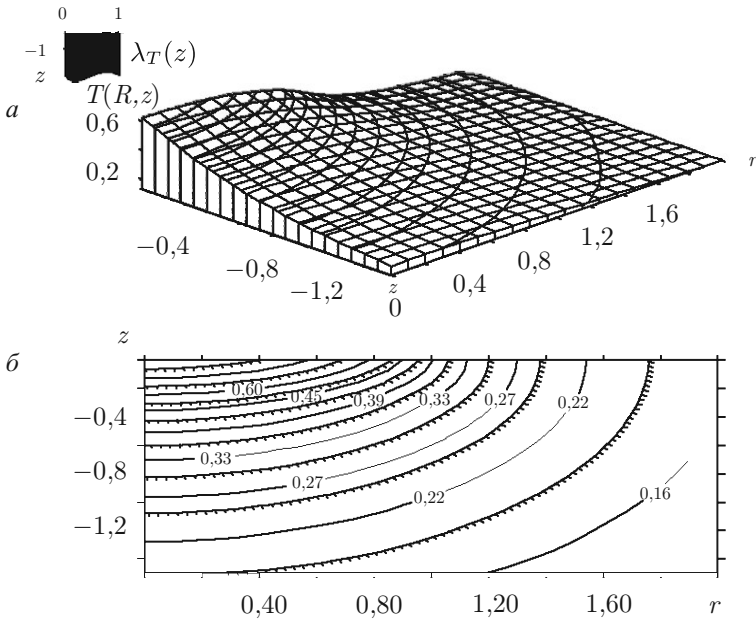
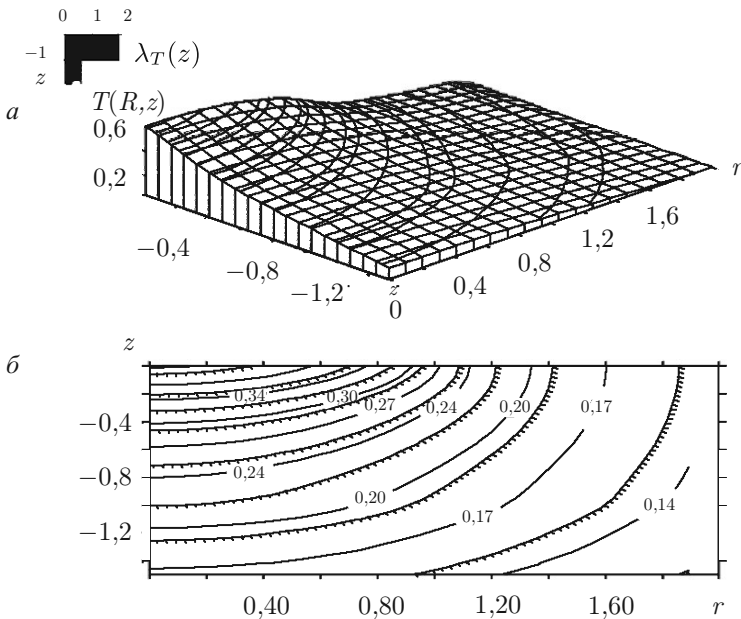
1.3.2. Анализ влияния монотонно изменяющегося значения коэффициента теплопроводности в приповерхностном слое на распределение температурного поля и теплового потока. На рисунках 1.1–1.5 представлено распределение установившегося температурного поля в приповерхностной зоне для однородного полупространства и четырех характерных законов изменения коэффициента теплопроводности $\lambda_T(z)$ в приповерхностном слое (относительно подстилающего однородного полупространства)

$$\lambda_T(z) = \begin{cases} \lambda_T^C(z) = \lambda_T^S f_i(z) & \text{при } -H \leq z < 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \lambda_T^S = \text{const} & \text{при } -\infty < z < -H, \end{cases} \quad (1.35)$$

$$f_1(z) = \frac{7}{2}, \quad f_2(z) = \frac{2}{7}, \quad f_3(z) = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} \frac{z}{H}, \quad f_4(z) = \frac{2}{7} - \frac{5}{7} \frac{z}{H}.$$

Анализ рисунков показывает, что изменение по глубине слоя коэффициента теплопроводности мало влияет на вид поверхностей, описывающих изменение температуры в покрытии. Для того, чтобы сопоставить численные значения температуры для различных покрытий, на рисунке 1.6 приведены графики изменения значения температуры по глубине (при $r = 0$) для всех перечисленных выше законов неоднородности в покрытии и однородного полупространства без покрытия. При изменении коэффициента теплопроводности в 2 раза в покрытии по сравнению с однородным полупространством температура на поверхности изменяется примерно в 1,5 раза.

На рисунках 1.7–1.11 показано распределение поля установившегося теплового потока для пяти указанных выше законов изменения коэффициента теплопроводности. В случае с тепловым потоком вид закона изменения коэффициента теплопроводности в покрытии существенно влияет на вид поверхностей, описывающих изменение значений теплового потока в приповерхностном слое.

Рис. 1.1. Распределение температуры. $H/a = 1,0$ Рис. 1.2. Распределение температуры. $H/a = 1,0$