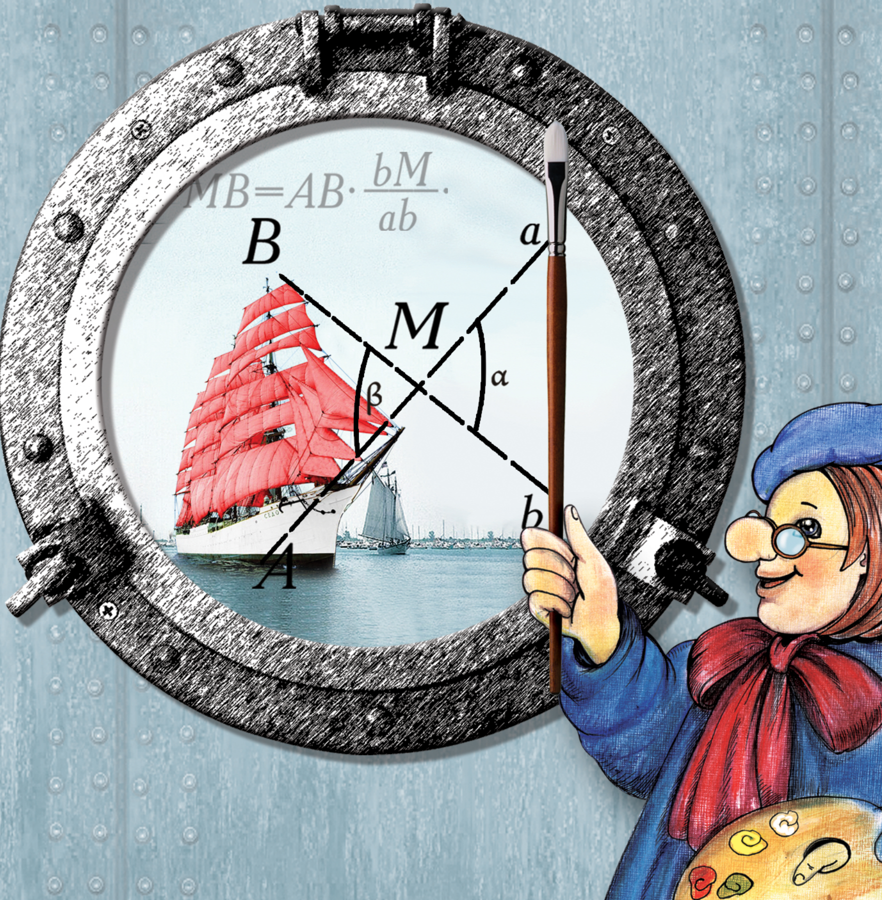
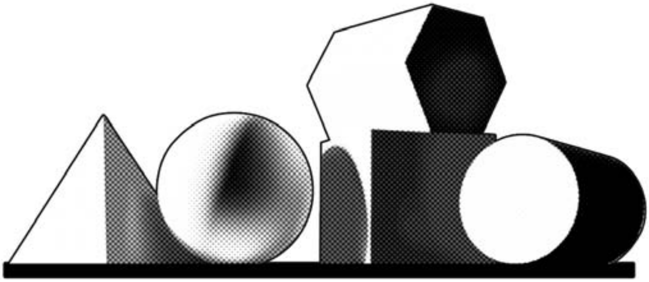
Я.И.ПЕРЕЛЬМАН

Занимательная ГЕОМЕТРИЯ



Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

Занимательная ГЕОМЕТРИЯ



РИМИС
издательский
бутик

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Банка “Новый Символ”
Москва 2010

УДК 514(023)
ББК 22.151
П 27

Издательство «РИМИС» — лауреат Литературной премии им. Александра Беляева 2008 года.

Перельман Я. И.

П 27 Занимательная геометрия. — М.: РИМИС, 2010. — 320 с., ил.

ISBN 978-5-9650-0059-3

Эта книга написана не только для любителей геометрии, но и для людей, разговаривающих с геометрией на «Вы». Книга предназначается для той широкой категории читателей, от которых по каким-то причинам оказались скрыты многие привлекательные стороны этой замечательной науки. Автор стремится освежить и оживить те знания по геометрии, которые уже имеются у читателя, и, безусловно, научить чему-то новому. Говоря словами автора, «внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению — прямая задача настоящей книги».

Текст печатается по изданию: Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград, 1950 год.

УДК 514(023)
ББК 22.151

ISBN 978-5-9650-0059-3

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

«Занимательная геометрия» написана как для друзей математики, так и для тех читателей, от которых почему-либо оказались скрытыми многие привлекательные стороны математики.

Еще больше эта книга предназначается для тех читателей, которые обучались (или сейчас обучаются) геометрии только у классной доски и поэтому не привыкли замечать знакомые геометрические отношения в окружающем нас мире вещей и явлений, не приучились пользоваться приобретенными геометрическими знаниями на практике, в затруднительных случаях жизни, в походе, в бивуачной или фронтовой обстановке.

Возбудить у читателя интерес к геометрии или, говоря словами автора, «внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению — прямая задача настоящей книги».

С этой целью автор выводит геометрию «из стен школьной комнаты на вольный воздух, в лес, поле, к реке, на дорогу, чтобы под открытым небом отдаться непринужденным геометрическим занятиям без учебника и таблиц…», привлекает внимание читателя к страницам Л. Н. Толстого и А. П. Чехова, Жюля Верна и Марка Твена, находит тему для геометрических задач в произведениях Н. В. Гоголя и А. С. Пушкина и, наконец, предлагает читателю «пестрый подбор задач, любопытных по сюжету, неожиданных по результату».

Седьмое издание «Занимательной геометрии» выходит без непосредственного участия автора. Я. И. Перельман умер в Ленинграде в 1942 г.

Новое издание книги содержит почти все статьи предыдущего издания, заново иллюстрированные, отредактированные и *пополненные фактами и сведениями из нашей*, *советской действительности*, а также немалое количество (около 30) *дополнительных статей*.

Мною руководило желание увеличить «коэффициент полезности» книги Я. И. Перельмана, сделать ее еще более действенной и интересной, вовлекающей новых читателей в ряды друзей математики.

Насколько это удалось, — надеюсь узнать от читателей по адресу: Москва, 64, ул. Чернышевского, 31, кв. 53, Б. А. Кордемскому[1].

Б. Кордемский

---

[1] Кордемский Борис Анастасьевич (род. 23.05.1907–ум. 1999) — математик, методист, канд. педагогических наук (1956), доцент (1957), популяризатор занимательной математики. Преподавал (с 1939) в ряде московских вузов. Автор свыше 70 статей и книг по занимательной математике. — *Прим. изд.*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ на вольном воздухе

Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры.

Галилей

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

По длине тени

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось…

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ — без сомнения тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес — говорит предание, — избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени[1]. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени…

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски-простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

2) что сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью

[1] Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (рис. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

т. е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает,

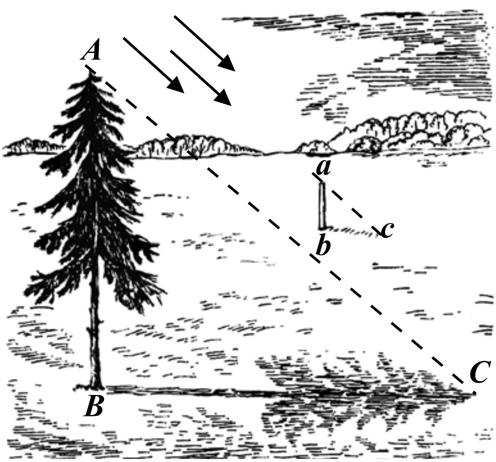


Рис. 1. Измерение высоты дерева по тени

конечно, из геометрического подобия треугольников ABC и abc (по двум углам).

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдается. На рис. 2 вы видите, что столбик AB выше тумбы ab примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы ($BC:bc$) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, в другом нет, — невозможно без геометрии.

З а д а ч а

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — непараллельны. Последнее очевидно; но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

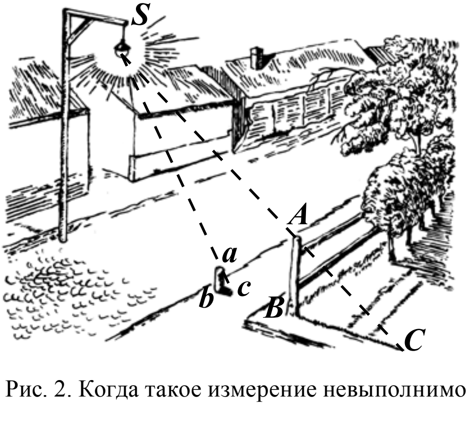


Рис. 2. Когда такое измерение невыполнимо

Р е ш е н и е

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли (т. е. радиусом в 150 000 000 *км*), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиною. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times \times 150\,000\,000$ *км* = 940 000 000 *км*. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т. е. около 2 600 000 *км*; одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, т. е. равна 43 000 *км*, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, т. е. 720 *км*. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 *км*; значит, она соответствует углу в $\frac{1}{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые[1].

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце — не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени *CD*, постепенно сходящей на нет. Угол *CAD* между крайними границами полутени равен тому углу, под которыми мы всегда видим солнечный диск, т. е. половине градуса. Ошибка, происходящая от того, что обе тени измеряются не вполне точно,

[1] Другое дело — лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра; угол между ними достаточно велик для измерения (около 17″); определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.

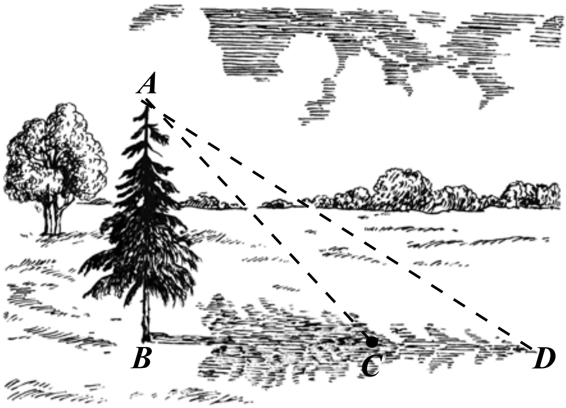


Рис. 3. Как образуется полутень

может при неслишком даже низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т. д. — и делает окончательный результат малонадежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

Еще два способа

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4). Пусть у вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

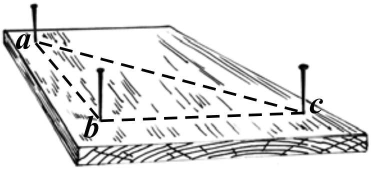


Рис. 4. Булавочный прибор для измерения высот

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место *A* (рис. 5), из которого, глядя на булавки *a* и *c*, увидите, что они покрывают верхушку *C* дерева: это значит,

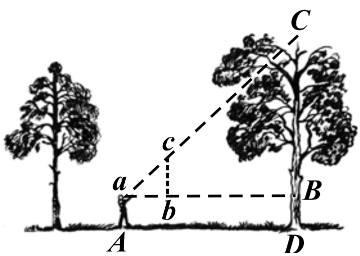


Рис. 5. Схема применения булавочного прибора

что продолжение гипотенузы *ac* проходит через точку *C*. Тогда, очевидно, расстояние *aB* равно *CB*, так как угол $a = 45°$.

Следовательно, измерив расстояние *aB* (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние *AD*) и прибавив *BD*, т. е. возвышение *aA* глаза над землей, получите искомую высоту дерева.

По другому способу вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту. Место для шеста надо

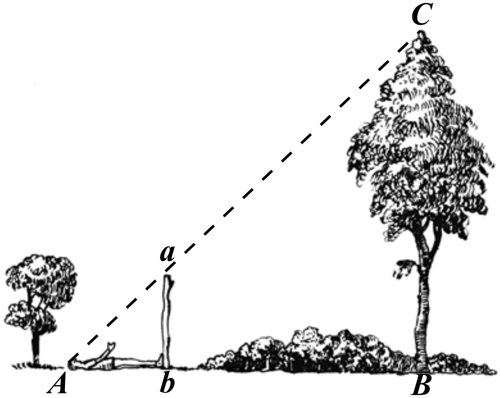


Рис. 6. Еще один способ определения высоты

выбрать так, чтобы лежа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник *Aba*— равнобедренный и прямоугольный, то угол *A* = 45° и, следовательно, *AB* равно *BC*, т. е. искомой высоте дерева.

По способу Жюля Верна

Следующий — тоже весьма несложный — способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюля Верна в известном романе «Таинственный остров».

«— Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, — сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли,

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

— Их сходственные стороны пропорциональны.

— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

— Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

— Да. И, следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т.е. высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

Оба горизонтальных расстояния были измерены: меньшее равнялось 15-ти футам, большее — 500-м футам.

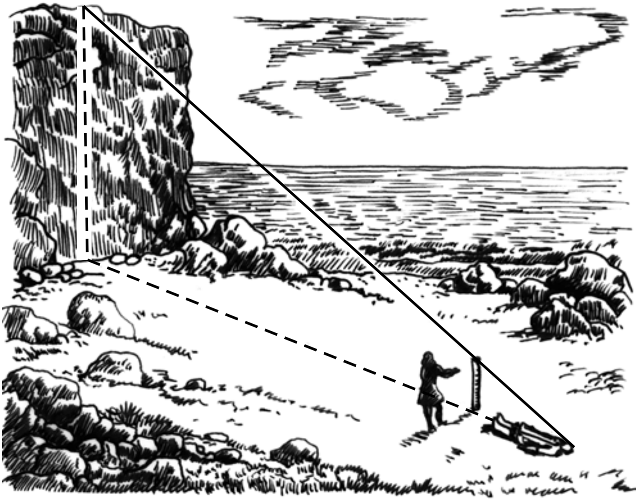


Рис. 7. Как измерили высоту скалы герои Жюля Верна

По окончании измерений инженер составил следующую запись:

$$15:500 = 10:x,$$
$$500 \times 10 = 5000,$$
$$5000:15 = 333{,}3.$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333-м футам».

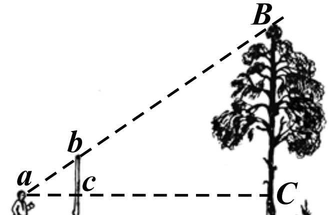


Рис. 8. Измерение высоты дерева при помощи шеста

Как поступил сержант

Некоторые из только что описанных способов измерения высоты неудобны тем, что вызывают необходимость ложиться на землю. Можно, разумеется, избежать такого неудобства.

Вот как однажды было на одном из фронтов Великой Отечественной войны. Подразделению лейтенанта Иванюк было приказано построить мост через горную реку. На противоположном берегу засели фашисты. Для разведки места постройки моста лейтенант выделил разведывательную группу во главе со старшим сержантом Поповым… В ближайшем лесном массиве они измерили диаметр и высоту наиболее типичных деревьев и подсчитали количество деревьев, которые можно было использовать для постройки.

Высоту деревьев определяли при помощи вешки (шеста) так, как показано на рис. 8.

Этот способ состоит в следующем.

Запасшись шестом выше своего роста, воткните его в землю отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдите от шеста назад, по продолжению Dd до того места A, с которого, глядя на вершину дерева, вы увидите на одной линии с ней верхнюю точку b шеста. Затем, не меняя положения головы, смотрите по направлению горизонтальной прямой aC, замечая точки c и C, в которых луч зрения встречает шест и ствол. Попросите помощника сделать в этих местах пометки, и наблюдение окончено. Остается только на основании подобия треугольников abc и aBC вычислить BC из пропорции

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}.$$

Расстояния bc, aC и ac легко измерить непосредственно. К полученной величине BC нужно прибавить расстояние CD (которое также измеряется непосредственно), чтобы узнать искомую высоту дерева.

Для определения количества деревьев старший сержант приказал солдатам измерить площадь лесного массива. Затем он подсчитал количество деревьев на небольшом участке размером 50×50 *кв. м* и произвел соответствующее умножение.

На основании всех данных, собранных разведчиками, командир подразделения установил, где и какой мост нужно строить. Мост построили к сроку, боевое задание было выполнено успешно[1].

При помощи записной книжки

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехлик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаз так, как показано на упрощенном рис. 9. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки *a*, видеть вершину *B* дерева покрытой кончиком *b* карандаша. Тогда вследствие подобия треугольников *abc* и *aBC* высота *BC* определится из пропорции

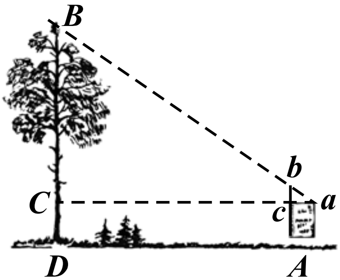


Рис. 9. Измерение высоты при помощи записной книжки

$$BC : bc = aC : ac.$$

Расстояния *bc*, *ac* и *aC* измеряются непосредственно. К полученной величине *BC* надо прибавить еще длину *CD*, т. е. — на ровном месте — высоту глаза над почвой.

Так как ширина *ac* книжки неизменна, то если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например в 10 *м*), высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части *bc* карандаша.

[1] Изложенные здесь и далее эпизоды Великой Отечественной войны описаны А. Демидовым в журнале «Военные знания» № 8, 1949, «Разведка реки».

Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш. Ваша записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер, так как вы сможете при ее помощи определять высоты сразу, без вычислений.

Не приближаясь к дереву

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Можно ли в таком случае определить его высоту?

Вполне возможно. Для этого придуман остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки ab и cd (рис. 10, вверху) скрепляются под прямым углом так, чтобы ab равнялось bc, а bd составляло половину ab. Вот и весь прибор. Чтобы измерить им высоту, держат его в руках, направив планку cd вертикально (для чего при ней имеется отвес — шнурок с грузиком), и становятся последовательно в двух местах: сначала (рис. 10) в точке A, где располагают прибор концом c вверх, а затем в точке A', подальше, где прибор держат вверх концом d. Точка A избирается так, чтобы, глядя из a на конец c, видеть его на одной прямой с верхушкой дерева. Точку же A' отыскивают так, чтобы, глядя из a' на точку d', видеть ее совпадающей с B. В отыскании этих двух точек A и A'[1] заключается все измерение, потому что искомая часть высоты дерева BC равна расстоянию AA'. Равенство вытекает, как легко сообразить, из того, что $aC = BC$, а $a'C = 2BC$; значит,

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собою разумеется, что если подойти к стволу возможно, то достаточно найти только одну из точек — A или A', чтобы узнать его высоту.

---

[1] Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева.

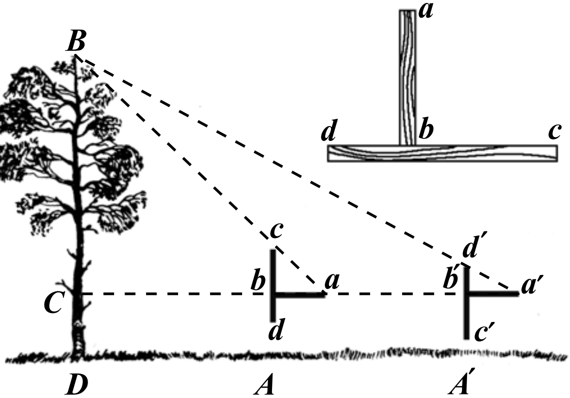


Рис. 10. Применение простейшего высотомера,
состоящего из двух планок

Вместо двух планок можно воспользоваться четырьмя булавками, разместив их на дощечке надлежащим образом; в таком виде «прибор» еще проще.

Высотомер лесоводов

Пора объяснить теперь, как устроены «настоящие» высотомеры, которыми пользуются на практике работники леса. Опишу один из подобных высотомеров, несколько изменив его так, чтобы прибор легко было изготовить самому. Сущность устройства видна из рис. 11. Картонный или деревянный прямоугольник *abcd* держат в руках так, чтобы, глядя вдоль края *ab*, видеть на одной линии с ним вершину *B* дерева. В точке *b* привешен на нити грузик *q*. Замечают точку *n*, в которой нить пересекает линию *dc*. Треугольники *bBC* и *bnc* подобны, так как оба прямоугольные и имеют равные острые углы *bBC* и *bnc* (с соответственно параллельными сторонами). Значит, мы вправе написать пропорцию

$$BC : nc = bC : bc;$$

отсюда

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bc}.$$

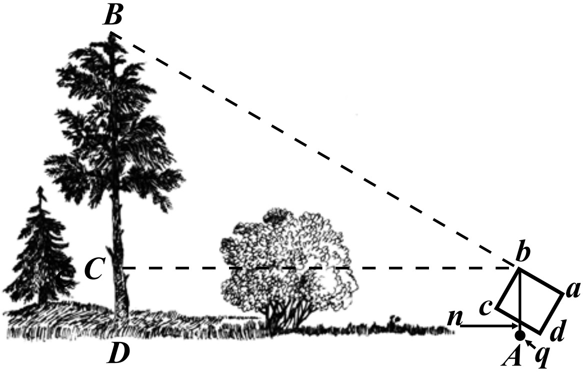


Рис. 11. Схема употребления высотомера лесоводов

Так как bC, nc и bc можно измерить непосредственно, то легко получить искомую высоту дерева, прибавив длину нижней части CD ствола (высоту прибора над почвой).

Остается добавить несколько подробностей. Если край bc дощечки сделать, например, ровно в $10\,см$, а на краю dc нанести сантиметровые деления, то отношение $\frac{nc}{bc}$ будет всегда выражаться десятичной дробью, прямо указывающей, какую долю расстояния bC составляет высота BC дерева. Пусть, например, нить остановилась против 7-го деления (т. е. $nc = 7\,см$); это значит, что высота дерева над уровнем глаза составляет 0,7 расстояния наблюдателя от ствола.

Второе улучшение относится к способу наблюдения: чтобы удобно было смотреть вдоль линии ab, можно отогнуть у верхних углов картонного прямоугольника два квадратика с просверленными в них дырочками: одной поменьше — у глаза, другой побольше — для наведения на верхушку дерева (рис. 12).

Дальнейшее усовершенствование представляет прибор, изображенный почти в натуральную величину на рис. 12. Изготовить его в таком виде легко и недолго; для этого не требуется особенного уменья мастерить. Не занимая в кармане много места, он доставит вам возможность

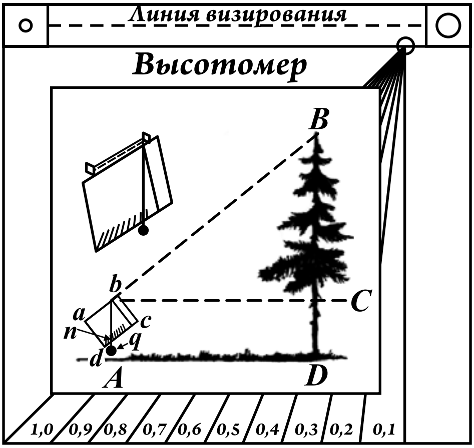


Рис. 12. Высотомер лесоводов

во время экскурсии быстро определять высоты встречных предметов — деревьев, столбов, зданий и т. п. (Инструмент входит в состав разработанного автором этой книги набора «Геометрия на вольном воздухе».)

З а д а ч а

Можно ли описанным сейчас высотомером измерять деревья, к которым не подойти вплотную? Если можно, то как следует в таких случаях поступать?

Рис. 13. Как измерить высоту дерева, не приближаясь к нему

Р е ш е н и е

Надо направить прибор на вершину B дерева (рис. 13) с двух точек A и A'. Пусть в A мы определили, что $BC = 0{,}9AC$, а в точке A' — что $BC = 0{,}4A'C$. Тогда мы знаем, что

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}, \quad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

откуда

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18}BC.$$

Итак,

$$AA' = \frac{25}{18}BC, \text{ или } BC = \frac{18}{25}A'A = 0{,}72A'A.$$

Вы видите, что, измерив расстояние $A'A$ между обоими местами наблюдения и взяв определенную долю этой величины, мы узнаем искомую недоступную и неприступную высоту.

При помощи зеркала

З а д а ч а

Вот еще своеобразный способ определения высоты дерева при помощи зеркала. На некотором расстоянии (рис. 14) от измеряемого дерева, на ровной земле в точке C кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D, стоя в которой наблюдатель видит в зеркале верхушку A дерева. Тогда дерево (AB) во столько раз выше роста наблюдателя (ED), во сколько раз расстояние BC от зеркала до дерева больше расстояния CD от зеркала до наблюдателя. Почему?

Р е ш е н и е

Способ основан на законе отражения света. Вершина A (рис. 15) отражается в точке A' так, что $AB = A'B$. Из подобия же треугольников BCA' и CED следует, что

$$A'B : ED = BC : CD.$$

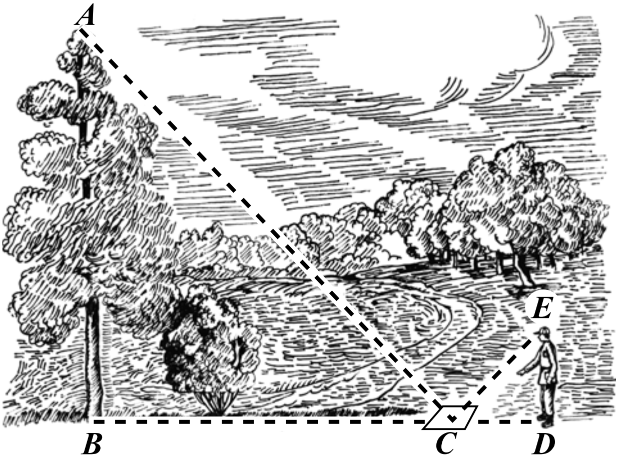


Рис. 14. Измерение высоты при помощи зеркала

В этой пропорции остается лишь заменить *A'B* равным ему *AB*, чтобы обосновать указанное в задаче соотношение.

Этот удобный и нехлопотливый способ можно применять во всякую погоду, но не в густом насаждении, а к одиноко стоящему дереву.

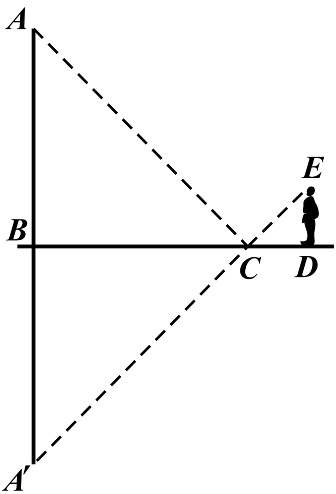


Рис. 15. Геометрическое построение к способу измерения высоты при помощи зеркала

Задача

Как, однако, следует поступать, когда к измеряемому дереву невозможно почему-либо подойти вплотную?

Решение

Это — старинная задача, насчитывающая за собою свыше 500 лет. Ее рассматривает средневековый математик Антоний де Кремона в сочинении «О практическом землемерии» (1400 г.).

Задача разрешается двукратным применением сейчас описанного способа — помещением зеркала в двух местах. Сделав соответствующее построение, нетрудно из подобия треугольников вывести, что искомая высота дерева равна возвышению глаза наблюдателя, умноженному на отношение расстояния между положениями зеркала к разности расстояний наблюдателя от зеркала.

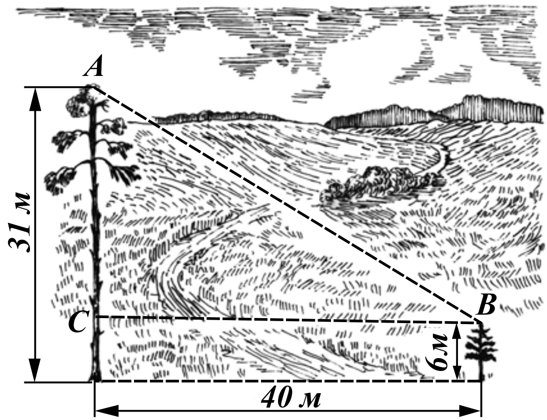


Рис. 16. Как велико расстояние между вершинами сосен?

Прежде чем окончить беседу об измерении высоты деревьев, предложу читателю еще одну «лесную» задачу.

Две сосны

Задача

В 40 *м* одна от другой растут две сосны. Вы измерили их высоту: одна оказалась 31 *м* высоты, другая, молодая — всего 6 *м*.

Можете ли вы вычислить, как велико расстояние между их верхушками?

Решение

Искомое расстояние между верхушками сосен (рис. 16) по теореме Пифагора равно

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47 \text{ м}.$$

Форма древесного ствола

Теперь вы можете уже, прогуливаясь по лесу, определить — чуть не полдюжиной различных способов — высоту любого дерева. Вам интересно будет, вероятно, определить также и его *объем*, вычислить, сколько в нем кубических метров древесины, а заодно и *взвесить* его — узнать, можно ли было бы, например, увезти такой ствол на одной телеге. Обе эти задачи уже не столь просты, как определение высоты; специалисты не нашли способов *точного* ее разрешения и довольствуются лишь более или менее приближенной оценкой. Даже и для ствола срубленного, который лежит перед вами очищенный от сучьев, задача разрешается далеко не просто.

Дело в том, что древесный ствол, даже самый ровный, без утолщений, не представляет ни цилиндра, ни полного конуса, ни усеченного конуса, ни какого-либо другого геометрического тела, объем которого мы умеем вычислять по формулам. Ствол, конечно, не цилиндр, — он суживается к вершине (имеет «сбег», как говорят лесоводы), — но он и не конус, потому что его «образующая» не прямая линия, а кривая, и притом не дуга окружности, а некоторая другая кривая, обращенная выпуклостью к оси дерева[1].

Поэтому более или менее точное вычисление объема древесного ствола выполнимо лишь средствами интегрального исчисления. Иным читателям покажется, быть может, странным, что для измерения простого бревна приходится обращаться к услугам высшей математики. Многие думают, что высшая математика имеет отношение только к каким-то особенным предметам, в обиходной же жизни применима всегда лишь математика элементарная. Это совершенно неверно: можно довольно точно вычислить объем звезды или планеты, пользуясь элементами геометрии, между тем как точный расчет объема

[1] Всего ближе эта кривая подходит к так называемой «полукубической параболе» ($y^3 = ax^2$); тело, полученное вращением этой параболы, называется «нейлоидом» (по имени старинного математика Нейля, нашедшего способ определять длину дуги такой кривой). Ствол выросшего в лесу дерева по форме приближается к нейлоиду. Расчет объема нейлоида выполняется приемами высшей математики.

длинного бревна или пивной бочки невозможен без аналитической геометрии и интегрального исчисления.

Но наша книга не предполагает у читателя знакомства с высшей математикой; придется поэтому удовлетвориться здесь лишь приблизительным вычислением объема ствола. Будем исходить из того, что объем ствола более или менее близок либо к объему усеченного конуса, либо — для ствола с вершинным концом — к объему полного конуса, либо, наконец, — для коротких бревен — к объему цилиндра. Объем каждого из этих трех тел легко вычислить. Нельзя ли для однообразия расчета найти такую формулу объема, которая годилась бы сразу для всех трех названных тел? Тогда мы приближенно вычисляли бы объем ствола, не интересуясь тем, на что он больше похож — на цилиндр или на конус, полный или усеченный.

Универсальная формула

Такая формула существует; более того: она пригодна не только для цилиндра, полного конуса и усеченного конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид полных и усеченных и даже для шара. Вот эта замечательная формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{причем} \\ h \text{ — высота тела,} \\ b_1 \text{ — площадь нижнего основания,} \\ b_2 \text{ — » среднего}^{1} \text{ сечения,} \\ b_3 \text{ — » верхнего основания.} \end{array} \right.$$

З а д а ч а

Доказать, что по приведенной сейчас формуле можно вычислить объем следующих семи геометрических тел: призмы, пирамиды полной, пирамиды усеченной, цилиндра, конуса полного, конуса усеченного, шара.

---

[1] То есть площадь сечения тела посредине его высоты.

Р е ш е н и е

Убедиться в правильности этой формулы очень легко простым применением ее к перечисленным телам. Тогда получим для призмы и цилиндра (рис. 17, *а*)

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

для пирамиды и конуса (рис. 17, *б*)

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4\frac{b_1}{4} + 0) = \frac{b_1 h}{3};$$

для усеченного конуса (рис. 17, *в*)

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi(\frac{R+r}{2})^2 + \pi r^2\right] =$$

$$= \frac{h}{6}(\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2);$$

для усеченной пирамиды доказательство ведется сходным образом; наконец, для шара (рис. 17, *г*)

$$v = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

З а д а ч а

Отметим еще одну любопытную особенность нашей универсальной формулы: она годится также для вычисления площади п л о с к и х фигур:

параллелограмма,

трапеции и

треугольника,

если под h разуметь, как прежде, высоту фигуры,

под b_1 — длину нижнего основания,

под b_2 — среднего,

под b_3 — верхнего.

Как в этом убедиться?

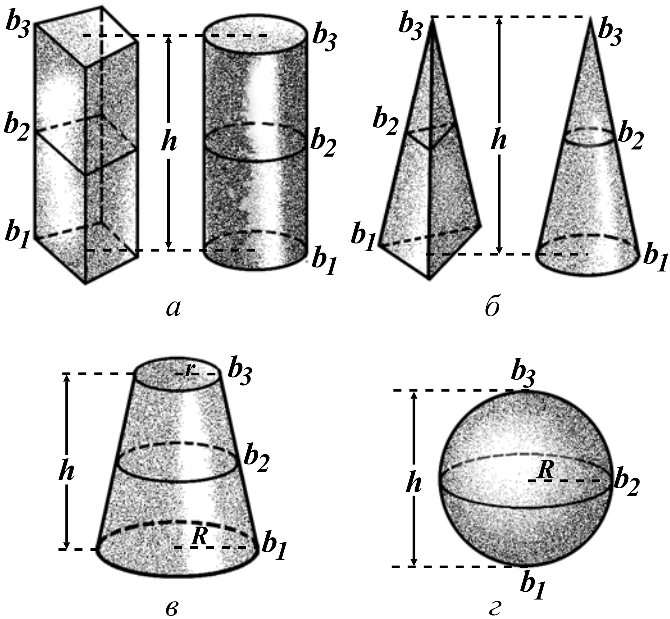


Рис. 17. Геометрические тела, объемы которых можно вычислить, пользуясь одной формулой

Рис. 18. Универсальная формула пригодна также для вычесления площадей этих фигур

Решение

Применяя формулу, имеем: для параллелограмма (квадрата, прямоугольника) (рис. 18, *а*)

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

для трапеции (рис. 18, *б*)

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3);$$

для треугольника (рис. 18, *в*)

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = \frac{b_1 h}{2}.$$

Вы видите, что формула наша имеет достаточно прав называться *универсальной*.

Объем и вес дерева на корню

Итак, вы располагаете формулой, по которой можете приближенно вычислить объем ствола *срубленного* дерева, не задаваясь вопросом о том, на какое геометрическое тело он похож: на цилиндр, на полный конус или на усеченный конус. Для этого понадобятся четыре измерения — длины ствола и трех поперечников; нижнего сруба, верхнего и посредине длины. Измерение нижнего и верхнего поперечников очень просто; непосредственное же определение среднего поперечника без специального приспособления («мерной вилки» лесоводов, рис. 19 и 20[1]) довольно неудобно. Но трудность можно обойти, если измерить бечевкой окружность ствола и разделить ее длину на $3\frac{1}{7}$, чтобы получить диаметр.

Объем срубленного дерева получится при этом с точностью, достаточной для многих практических целей. Короче, но менее точно решается эта задача, если вычислить объем ствола, как объем цилиндра, диаметр основания

[1] Сходным образом устроен общеизвестный прибор для измерения диаметра круглых изделий — штангенциркуль (рис. 20, направо).

Рис. 19. Измерение диаметра дерева «мерной вилкой»

которого равен диаметру ствола посредине длины; при этом результат получается, однако, преуменьшенный, иногда на 12%. Но если разделить мысленно ствол на отрубки в два метра длины и определить объем каждого из этих почти цилиндрических частей, чтобы, сложив их, получить объем всего ствола, то результат получится гораздо лучший: он грешит в сторону преуменьшения не более чем на 2–3%.

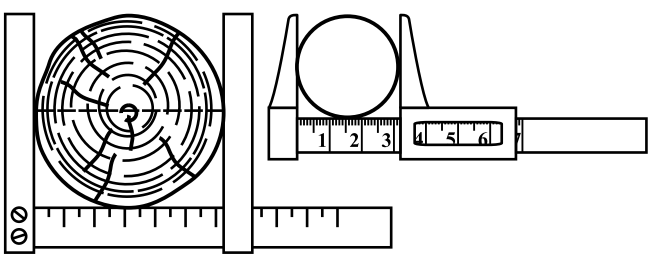


Рис. 20. «Мерная вилка» (налево) и штангенциркуль (направо)

Все это, однако, совершенно неприменимо к дереву на корню: если вы не собираетесь взбираться на него, то вашему измерению доступен только диаметр его нижней части. В этом случае придется для определения объема довольствоваться лишь весьма приближенной оценкой, утешаясь тем, что и профессиональные лесоводы поступают обычно сходным же образом. Они пользуются для этого таблицей так называемых «видовых чисел», т. е. чисел, которые показывают, какую долю объем измеряемого дерева составляет от объема