Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Я.И.ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

РИМИС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 2009

УДК 087.5:51(076.1)
ББК 22.1я7
П 27

Издательство «РИМИС» — лауреат Литературной премии им. Александра Беляева 2008 года.

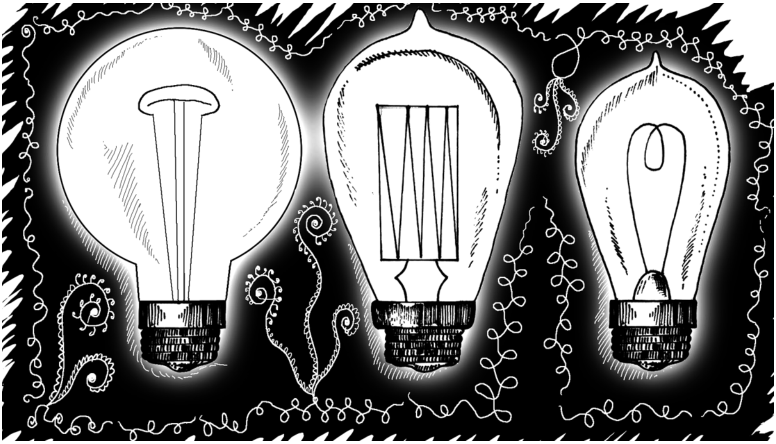
Текст и рисунки восстановлены по книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра», вышедшей в издательстве «Время» (Ленинград) в 1933 г.

Перельман Я. И.

П 27 Занимательная алгебра. — М.: РИМИС, 2009. — 240 с., ил.

ISBN 978-5-9650-0052-4

«Занимательная алгебра» — одно из лучших классических пособий известного российского популяризатора науки Я. И. Перельмана, наделенного редчайшим даром удивлять людей обыкновенными вещами и создавшего новый вид внешкольного научного пособия — увлекательного, остроумного, эффективного и доступного каждому. «Занимательная алгебра» ставит своей целью уточнить, воскресить и закрепить разрозненные, непрочные сведения, иногда плохо усвоенные или полузабытые, но главным образом — воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и привить ему желание самостоятельно восполнить пробелы в своей подготовке. Для дополнительной привлекательности и наглядности эта хорошо проиллюстрированная книга дополнена задачами с необычными сюжетами, подстрекающими любопытство, занимательными экскурсиями в область истории математики, а также самыми неожиданными применениями алгебры к практической жизни.



ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

ПЯТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», желая подчеркнуть, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возвышение в степень и два ему обратных действия. Это гораздо характернее для алгебры, чем употребление буквенных обозначений. В истории математики мы знаем сочинения, даже целый ряд их, не содержащие вовсе буквенных обозначений и все же представляющие собой несомненно учебники алгебры; к таким «риторическим» алгебрам принадлежит, например, знаменитый учебник Леонарда Пизанского, появившийся в начале XIII века и употреблявшийся затем еще в течение трёх столетий.

Наши алгебраические беседы мы начнем с «пятого действия» — с возвышения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы сталкиваемся с ним в реальной действительности очень часто. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где неизбежно приходится возвышать чи́сла во вторую и третью степень. Далее: сила всемирного тяготения, взаимодействия электростатическое и магнитное, свет, звук — ослабевают со второю степенью расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг солнца и спутников вокруг планет связана с расстояниями от центра обращения также степенно́й зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, более же высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например диаметра паропровода) — даже с шестою степенью. Исследуя силу, с какою текущая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также от шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекатывать по своему ложу камни в 4^6, т. е. в 4 096 раз более тяжелые, чем медленная[1].

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела — например, нити накала в электрической лампочке — от температуры. Общая яркость растет при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном — с тридцатой степенью температуры

1 Подробно об этом в «Занимательной механике» Перельмана.

(«абсолютной», т. е. считаемой от минус 273°). Это значит, что тело, нагретое, например, от 2000° до 4000° (абсолютные), т. е. в 2 раза сильнее, становится ярче в 2^{12}, иначе говоря, более чем в 4 000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте, — так же, как и о применении «пятого действия» в процессах живой природы.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям Вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной–двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно когда приходится производить с ними вычисления. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров;

8 500 000 000 000 000 000.

При выполнении астрономических расчетов приходится, к тому же, выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Наше число, так раздробленное, удлиняется 5 нулями:

850 000 000 000 000 000 000 000.

Массы звезд выражаются еще бóльшими числами, особенно если их раздроблять, как требуется для многих расчетов, в граммы. Масса нашего солнца в граммах равна:

1 900 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа!

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собою определенную степень десяти:

$$100 = 10^2;\ 1\,000 = 10^3 \text{ и т. д.}$$

Приведенные раньше числовые великаны могут быть потому представлены в таком виде:

первый $85 \cdot 10^{22}$

второй $19 \cdot 10^{32}$.

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти чисʼла перемножить, то достаточно было бы найти произведение $85 \times 19 = 1\,615$ и поставить его впереди множителя $10^{22+32} = 10^{54}$:

$$85 \cdot 10^{22} \times 19 \cdot 10^{32} = 1\,615 \cdot 10^{54}.$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 22 нулями, затем с 32-мя и, наконец, с 54-мя, — не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

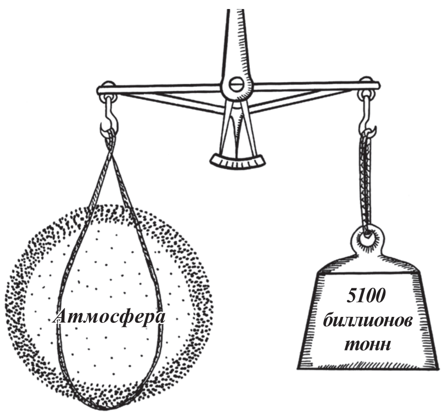
СКОЛЬКО ВЕСИТ ВЕСЬ ВОЗДУХ?

Чтобы убедиться, «насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенны́м изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, какую долю массы земного шара составляет масса всего окружающего его воздуха.

На каждый квадратный сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силою около килограмма. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 *см*^{2}, равен 1 *кг*. Атмосферная оболочка Земли вся составлена из таких воздушных столбов; их столько, сколько *см*^{2} содержит поверхность нашей планеты; и столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что поверхность земного шара равна 510 миллионам *км*^{2}. В степенно́м изображении

$$510\,000\,000 = 51 \cdot 10^7 \text{ км}^2.$$

Сколько квадратных сантиметров в квадратном километре? Рассчитаем. Линейный километр содержит 1 000 *м*, по 100 *см* каждый, т. е. $100\,000 = 10^5$ *см*, а *км*^{2} — $(10^5)^2 = 10^{10}$ *см*^{2}. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому квадратных сантиметров



$$51 \cdot 10^7 \times 10^{10} = 51 \cdot 10^{17}.$$

Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим

$$51 \cdot 10^{17} : 1\,000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом

$$57 \cdot 10^{20} \text{ тонн}.$$

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$$57 \cdot 10^{20} : 51 \cdot 10^{14} = \text{около } 10^6,$$

т. е. масса атмосферы составляет примерно миллионную долю массы земного шара.

Едва ли бы вы избежали ошибки в числе нулей, если бы проделали весь этот расчет с числами в обычном изображении, не говоря уже о том, что затратили бы на него и больше времени.

ГОРЕНИЕ БЕЗ ПЛАМЕНИ И ЖАРА

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при в с я к о й температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) у м е н ь ш а е т с я   в   д в а   р а з а. «Были измерены реакции, где заметная инверсия сахара (т. е. превращение его в смесь декстрозы и левулозы) наступала только через сутки, если жидкость была при 100°. Если поддерживать температуру при 0°, то скорость реакции будет в 2^{10} раз меньше. Значит, при 0° заметная реакция может быть наблюдаема только спустя $2^{10} = 1\,024$ суток, т. е. на третий год после начала опыта», — пишет Оствальд («Эволюция химии»).

Применим сказанное к реакции соединения углерода с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает ежесекундно 1 грамм древесины. Во сколько времени сгорит 1 грамм дерева при 20°? Мы уже знаем, что при температуре на 580 = 58·10 ниже скорость реакции меньше в

$$2^{58} \text{ раз,}$$

т. е. 1 грамм дерева сгорит в 2^{58} секунд.

Сколькими годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 умножений двойки на себя и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что

$$2^{10} = 1\,024 = \text{около } 10^3.$$

Следовательно,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10}) \cdot 6 =$$

$$= \text{около } \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 миллионов, т. е. $3 \cdot 10^7$ секунд; поэтому

$$\frac{1}{4} \cdot 10^{18} : 3 \cdot 10^7 = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} = \text{около } 10^{10}.$$

Сто миллиардов лет! Вот во сколько, примерно, времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево и уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение огня ускорило этот страшно медленный процесс почти в триллион раз.

РАЗНООБРАЗИЕ ПОГОДЫ

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, — покрыто ли небо облаками или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно шестидневок с различным чередованием погоды?

Казалось бы, не много: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в шестидневке будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это — одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной шестидневке чередоваться ясные и пасмурные дни?

Решение

Первый день шестидневки может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две «комбинации».

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный,
ясный и пасмурный,
пасмурный и ясный,
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение 2 дней 2^2 различных рода чередований. В 3-дневный промежуток к каждой из 4 комбинаций первых 2 дней присоединяются две комбинации третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \times 2 = 2^3.$$

В течение 4-дневки число чередований достигнет

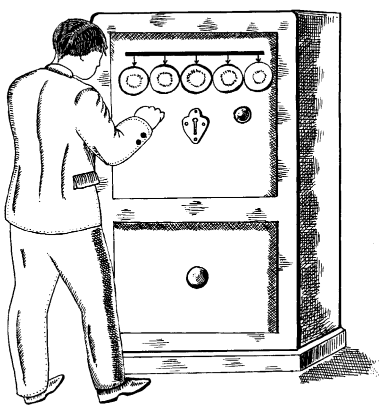
$$2^3 \times 2 = 2^4.$$

В 5-дневку $2^5 = 32$ и, наконец, в шестидневку $2^6 = 64$ различных рода чередований.

Отсюда следует, что шестидневок с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 64. Спустя $64 \times 6 = 384$ дня необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 384 дня — срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целый год, даже больше (1 год и 19 дней), в течение которого ни одна шестидневка не будет по погоде похожа на другую.

ЗАМÓК С СЕКРЕТОМ

В заводской конторе обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но, чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (26 букв) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все сочетания букв на кружкáх. На составление одного сочетания требовалось 3 секунды времени.



Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

Решение

Подсчитаем, сколько всех буквенных сочетаний надо было перепробовать.

Каждая из 26 букв первого кружка́ может сопоставляться с каждой из 26 букв второго кружка́. Значит, двубуквенных сочетаний было

$$26 \times 26 = 26^2.$$

К каждому из этих сочетаний можно присоединить каждую из 26 букв третьего кружка́. Поэтому трехбуквенных сочетаний было

$$26^2 \times 26 = 26^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных сочетаний было 26^4, а пятибуквенных 26^5, или 11 881 376. Чтобы составить эти почти 12 миллионов сочетаний, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждое, —

$$3 \times 11\,881\,376 = 35\,644\,128 \text{ сек.}$$

Это составляет около 10 000 часов, или 1 400 семичасовых рабочих дней — без малого четыре года.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, 10 на 1 400, или один на 140. Это очень малая вероятность.

ДВОЙНИКИ

Подобным же расчетом можно уяснить себе, почему так редко попадаются люди со сходною наружностью, не находящиеся между собой в родстве.

Желая придать конкретность расчету, будем опираться хотя и на произвольные, но правдоподобные числовые данные. А именно, предположим, что разнообразие наружности зависит от изменчивости 25 признаков (рост, сложение, толщина, волосы, фасон головы, лоб, брови, глаза, нос, уши, щеки, губы, подбородок, шея и т. п.), из которых

10	допускают по	3	варианта каждый,
10	" "	4	" "
5	" "	5	" "

Нетрудно определить тогда число всех различных комбинаций признаков. Оно равно

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5.$$

Преобразуем это выражение:

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{20} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{15} \times 2^5 \times 5^5 =$$

$$= 3^{10} \times 2^{15} \times 10^5 = 59\,049 \times 32\,768 \times 10^5 = \text{около } 19{\cdot}10^{13}.$$

Людей же на всем земном шаре около 1 900 миллионов[1], т. е. $19{\cdot}10^8$. Число возможных изменений наружности больше числа людей в 10^{13-8}, т. е. в 100 000 раз.

Понятно теперь, почему двойники встречаются лишь в виде исключений. Людей на Земле недостаточно для того, чтобы двойники могли попадаться чаще.

НЕОБЫЧАЙНОЕ ЛЕКАРСТВО

То направление в медицине, которое носит название г о м е о п а т и и, признает обычные дозы лекарств вредными и назначает их только в чрезвычайно сильном разведении. Гомеопатические лекарства приготовляются так. Одну часть лекарственного настоя разбавляют в 99 равных частях чистого спирта. Сотую часть полученного раствора вновь смешивают с 99 частями спирта. То же делают с сотой долей нового разведения и т. д., повторяя эту операцию от 18 до 30 раз. Для лечения, например, коклюша настой росянки (Drosera) разбавляют в спирту 30-ю сейчас описанными приемами.

1 Сейчас численность населения планеты составляет 6,6 млрд. чел. — *Прим. изд.*

Надо думать, что, назначая подобные дозы лекарств, гомеопаты никогда не пытались математически осознать то, что они делают. Потому что, если подойти к гомеопатическим разведениям с надлежащим расчетом, то обнаружится совершенно неожиданная вещь. Займемся таким вычислением; оно как раз и относится к настоящему разделу нашей книги.

Пусть количество первоначального лекарственного настоя равнялось 100 $см^3$. В гомеопатической аптеке берут 1 сантиметровый кубик настоя и смешивают с 99 кубиками чистого спирта. Получают 100 кубиков раствора, в котором содержится 1 кубик лекарства. Иначе говоря, лекарство разбавлено в 100 раз.

Далее берут 1 $см^3$ этого разбавленного лекарства и смешивают с 99 $см^3$ чистого спирта, — т. е. разбавляют снова в 100 раз. Но в новом растворе на 100 $см^3$ жидкости приходится уже только 0,01 $см^3$ первоначального настоя. Следовательно, здесь степень разбавления $0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$, или $\frac{1}{10^4}$.

После третьей подобной же операции первоначальный раствор разбавляется в 100^3, т. е. в 10^6; после четвертой — в 10^8 раз и т. д.

Наконец, после 30-й операции (столько их предписано для лекарства против коклюша) первоначальный настой окажется разбавленным в 10^{60} раз. Это значит, что 1 $см^3$ настоя словно влит в 10^{60} $см^3$ спирта.

Пока мы видим лишь «астрономическое число», но не подозреваем, что оно означает. Дело предстанет перед нами в новом свете, если мы сопоставим это число с числом молекул в одном кубическом сантиметре первоначального лекарства. Физика утверждает (имея на то вполне достаточные основания), что число молекул в $см^3$ настоя никак не больше 10^{22}.

Иными словами, в объеме 10^{60} *см*^{3} разбавленной жидкости содержится «только» 10^{22} молекул лекарственного вещества, — по одной молекуле на каждые

$$10^{60} : 10^{22} = 10^{38}\ см^3.$$

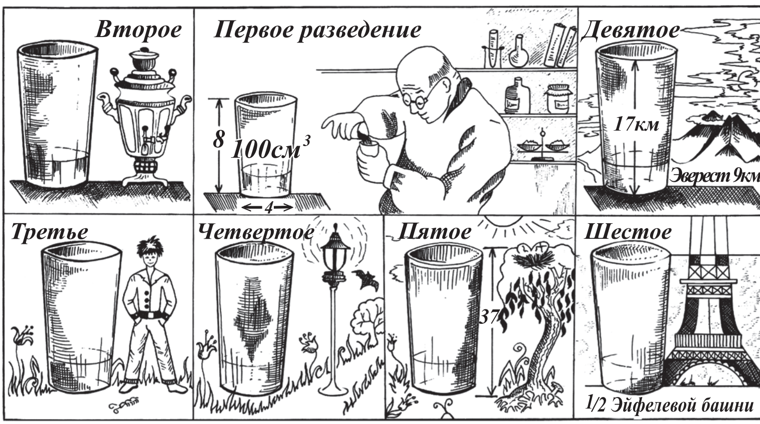
Что же это за объем 10^{38} *см*^{3}, содержащий одну молекулу лекарства? Сделаем расчет. В кубическом километре 10^{15} *см*^{3}. Значит, 10^{38} *см*^{3} заключают в себе кубических километров

$$10^{38} : 10^{15} = 10^{23}.$$

Заглядываем в астрономический справочник и ищем подходящие объемы. Находим, что объем земного шара, 10^{12} кубических километров, — микроскопическая величина по сравнению с сейчас полученной. Даже Солнце, имеющее объем $14 \cdot 10^{17}$ *км*^{3}, недостаточно велико для наглядного сравнения: оно в 70 000 раз меньше того объема раствора, который содержит в себе одну единственную молекулу лекарственного вещества.

Возвращаясь от астрономии к медицине, приходим к такому выводу. Если признать, что 1 молекула росянкового настоя способна излечить коклюш, то больной должен для своего исцеления проглотить 70 тысяч капсул, каждая величиной с солнце, — порция для детского возраста несомненно чрезмерная...

После сказанного естественно поставить вопрос: что же содержат в себе пилюли гомеопатических аптек? Очевидно, все что угодно, только не лекарственное вещество. Легко рассчитать, что уже после 11-го разведения, когда 1 *см*^{3} первоначального настоя разбавился в 10^{22} раза, в стакане жидкости окажется всего только одна молекула. Остальные 19 разведений будут состоять уже из чистого спирта, без малейших следов лекарственного вещества. При изъятии из склянки (100 $см^3$) одного $см^3$ вам едва ли посчастливится извлечь как раз тот кубик, в котором затеряна наша единственная молекула. 99 шансов против и только один — за. И уже во всяком случае так не будет 19 раз кряду; можно поручиться, что до 30-го разведения ни одна молекула лекарственного вещества не дойдет[1].

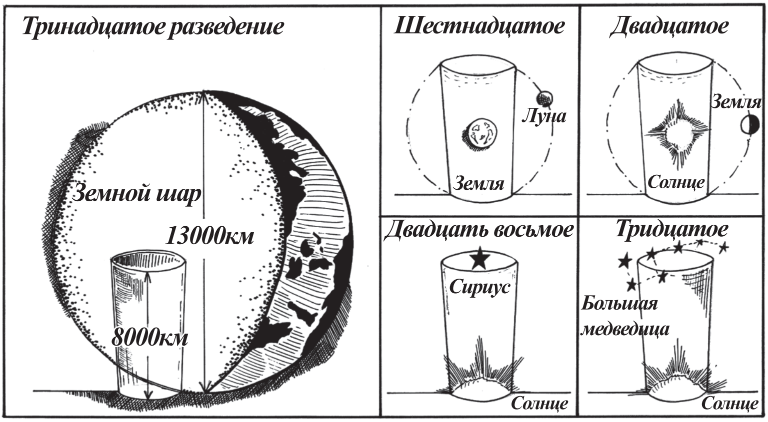


Раньше было замечено, что гомеопаты никогда не отдают себе отчета в математической стороне своих операций. Это не вполне верно. Русский химик А. М. Бутлеров, принадлежавший к сторонникам гомеопатии, ясно сознавал астрономическую огромность того количества спирта, в котором разводится гомеопатическое лекарство. В одной из его статей читаем:

«Хотя все знают, что гомеопатические лекарства употребляются часто в больших разжижениях, но далеко не

1 Автором этого поучительного расчета является не кто иной, как всемирно известный датский физик Нильс Бор, сообщивший о нем советскому физику Г. А. Гамову; от последнего идея расчета дошла до меня благодаря любезности ленинградского физика М. П. Бронштейна.

все имеют ясное представление, о каких именно величинах идет здесь речь... При каждом разжижении количество вещества делится на 10. Поэтому в сотом разжижении на 1 $мм^3$ первоначальной лекарственной тинктуры приходится такое количество алкоголя, которое, представленное в $мм^3$, выражается цифрой, имеющей после себя сто нулей. Если представить себе всю эту массу жидкости в форме куба,



то единица и 30 нулей, или один квинтиллион будет выраженная в метрах величина ребра куба... Простой расчет показывает, что в квинтиллионе метров содержится около 10 триллионов солнечных расстояний и около 7 биллионов расстояний от Земли до Сириуса... Если же взять двухтысячное разведение, то, выражая величину ребра куба жидкости в расстояниях Сириуса, мы имели бы цифру, заключающую не менее 646 знаков».

Это не мешало нашему химику с доверием относиться к сообщению, что «поваренная соль обнаруживает главный максимум действия именно в двухтысячном разведении».

Чудовищное разжижение не смущало сторонников гомеопатии и не ослабляло их веры в действие лекарств потому, что они, не зная числа молекул в 1 $см^3$, ссылались на факт поглощения энергии материей при переходе в более тонкое состояние. «Образование воды из льда — пара из воды — сопровождается поглощением тепла; пар является, так сказать, резервуаром энергии» (Бутлеров). Но все подобные соображения, каковы бы они ни были, начисто отпадают, когда в пилюле нет буквально ни одной молекулы лекарственного вещества.

ЧЕТЫРЬМЯ ЕДИНИЦАМИ

Четырьмя единицами, не употребляя никаких знаков математических действий, написать возможно большее число.

Решение

Естественно приходящее на ум решение — 1 111 — не отвечает требованию задачи, так как число

$$11^{11}$$

во много раз больше. Вычислять это число десятикратным умножением на 11 едва ли у кого хватит терпения. Но можно определить его величину гораздо быстрее — с помощью логарифмических таблиц. Число это превышает 285 миллиардов и, следовательно, больше числа 1 111 в 25 миллионов раз.

ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Всем, вероятно, известно, как следует написать три цифры, чтобы изобразить ими возможно большее число. Надо взять три девятки и расположить их так:

$$9^{9^9}.$$

Число это столь чудовищно велико, что никакие сравнения не помогают уяснить себе его грандиозность. Число электронов видимой Вселенной ничтожно по сравнению с ним. В «Занимательной арифметике» уже говорилось об этом. Возвращаюсь к этой задаче лишь потому, что хочу предложить здесь по ее образцу другую:

Тремя двойками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Под свежим впечатлением трехъярусного расположения девяток, вы, вероятно, готовы дать и двойкам такое же расположение:

$$2^{2^2}.$$

Однако на этот раз ожидаемого эффекта не получается. Написанное так число довольно мизерно, — меньше даже, чем ординарное 222. В самом деле: ведь мы написали всего лишь 2^4, т. е. 16.

Подлинно наибольшее число из трех двоек не 222 и не 22^2 (т. е. 484), а

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

Пример этот очень поучителен. Он показывает, что в математике опасно поступать по шаблону и что аналогия легко может повести к ошибочным заключениям.

ТРЕМЯ ТРОЙКАМИ

Теперь, вероятно, вы осмотрительнее приступите к решению следующей задачи.

Тремя тройками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Р е ш е н и е

Трехъярусное расположение и здесь не приводит к ожидаемому эффекту, так как

$$3^{3^{3}}, \text{ т. е. } 3^{27}, \text{ меньше, чем } 3^{33}.$$

Последнее расположение и дает ответ на вопрос задачи.

ТРЕМЯ ЧЕТВЕРКАМИ

Тремя четверками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Р е ш е н и е

Если в этом случае вы поступите по образцу сейчас рассмотренных двух задач, т. е. дадите ответ

$$4^{44},$$

то промахнетесь, потому что на этот раз трехъярусное расположение

$$4^{4^{4}}$$

дает большее число. В самом деле, $4^4 = 256$, а 4^{256} больше 4^{44}.

ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Попытаемся углубиться в это озадачивающее явление: почему одни цифры порождают числовые исполины при трехъярусном расположении, другие — нет. Рассмотрим общий случай:

Тремя о д и н а к о в ы м и ц и ф р а м и, не употребляя знаков действий, изобразить возможно большее число.

Обозначим цифру буквой *a*. Расположению

$$2^{22}, 3^{33}, 4^{44}$$

соответствует написание

$$a^{10a+a}, \text{ т. е. } a^{11a}.$$

Расположение же трехъярусное представится в общем виде так:

$$a^{a^a}.$$

Определим, при каком значении a второе расположение изображает большее число, нежели первое. Так как оба выражения представляют степени с равными основаниями, то бóльшая величина отвечает большему показателю. Когда же

$$a^a > 11a?$$

Разделим обе части неравенства на a. Получим:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко видеть, что a^{a-1} больше 11 только при a, равном или большем 4, потому что

$$4^{4-1} > 11,$$

между тем как степени

$$3^2 \text{ и } 2^1$$

меньше 11.

Теперь понятны те неожиданности, с которыми мы сталкивались при решении предыдущих задач: для двоек и троек надо было брать одно расположение, для четверок и более — другое.

ЧЕТЫРЬМЯ ДВОЙКАМИ

Сделаем следующий шаг в развитии задач рассматриваемого рода и поставим наш вопрос для четырех одинаковых цифр, именно для двоек:

При каком расположении четыре двойки изображают наибольшее число?

Решение

Возможны 8 комбинаций:

$$2222\ ,\ 222^2\ ,\ 22^{22}\ ,\ 2^{222}$$

$$22^{2^2},\quad 2^{22^2},\quad 2^{2^{22}},\quad 2^{2^{2^2}}.$$

Какое же из этих чисел наибольшее?

Займемся сначала верхним рядом, т. е. числами в двухъярусном расположении.

Первое — 2222 — очевидно меньше трех прочих. Чтобы сравнить следующие два —

$$222^2 \text{ и } 22^{22},$$

преобразуем второе из них:

$$22^{22} = 22^{2\times 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Последнее число больше, нежели 222^2, так как и основание и показатель степени числа 484^{11} больше, чем числа 222^2.

Сравним теперь 22^{22} с четвертым числом первой строки — с 2^{222}. Заменим 22^{22} бóльшим числом 32^{22} и покажем, что даже это большее число уступает по величине числу 2^{222}.

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110},$$

степень меньшая, нежели 2^{222}.

Итак, наибольшее число верхней строки 2^{222}.

Теперь нам остается сравнить между собой пять чисел: сейчас полученное и следующие четыре:

$$22^{2^2},\quad 2^{22^2},\quad 2^{2^{22}},\quad 2^{2^{2^2}}.$$

Последнее число, равное всего 2^{16}, сразу выбывает из состязания. Далее, первое число этого ряда, равное 22^4 и меньшее, чем 32^4, или 2^{20}, меньше каждого из двух следующих. Подлежат сравнению, следовательно, три числа, каждое из которых есть степень 2-х. Больше, очевидно, та степень 2-х, показатель которой больше. Но из трех показателей

$$22^2,\ 48^4 \text{ и } 2^{20+2}\ (= 2^{10\cdot 2} \cdot 2^2 = \text{около } 10^6 \cdot 4)$$

последний — наибольший.

Поэтому наибольшее число, какое можно изобразить четырьмя двойками, таково

$$2^{2^{22}}.$$

Не обращаясь к услугам логарифмических таблиц, мы можем составить себе приблизительное представление о величине этого числа, пользуясь приближенным равенством

$$2^{10} = \text{около } 1\,000:$$

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 = 4 \cdot 10^6,$$

$$2^{2^{22}} = \text{около } 2^{4000000} = \text{около } 10^{1200000}.$$

Ясно, что в этом числе свыше миллиона цифр.