УНИВЕРСИТЕТСКАЯ СЕРИЯ • УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Р. Я. Хамидуллин

Случайное событие. Вероятность. Комбинаторика. Теоремы сложения и умножения. Формула полной вероятности. Теорема гипотез. Числовые характеристики.

Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин. Функция распределения. Плотность распределения. Моменты случайных величин.

Математическая статистика. Статистические ряды и их характеристики. Статистическая оценка. Критерий согласия Пирсона. Критерий Колмогорова. Корреляция и регрессия.

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ | ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

УДК 519.2
ББК 22.17
Х182тв

Серия удостоена диплома в номинации «Лучший издательский проект»
на IV Общероссийском конкурсе учебных изданий для высших учебных заведений
«Университетская книга – 2008»

Печатается по решению Ученого совета Университета «Синергия»

Ответственный редактор серии
член-корреспондент Российской академии образования,
доктор экономических наук, профессор **Ю. Б. Рубин**

Рецензент
заслуженный работник высшей школы РФ,
кандидат технических наук, профессор **Монсик В.Б.**

Хамидуллин Р. Я.

Х182тв Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Р. Я. Хамидуллин. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2020. –276 с. (Университетская серия).

ISBN 978-5-4257-0398-9

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, аспирантов и преподавателей экономических и смежных специальностей, а также для слушателей заочного и вечернего обучения, может быть полезно лицам, применяющим вероятностные методы при решении практических задач.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 978-5-4257-0398-9

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 1
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Случайное событие. Классификация случайных событий

Первичными понятиями теории вероятностей являются такие понятия, как испытание и событие.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого опыта (испытания, эксперимента).

Случайные события принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C, ..., X, Y, Z.*

Опыт (испытание, эксперимент) – это процесс, включающий определенные условия и приводящий к одному из возможных исходов. Исходом опыта может быть результат наблюдения или измерения.

Примеры случайных событий:

$A =$ {выпадение “решки”};

$B =$ {выпадение “орла”} – при бросании монеты;

$C =$ {появление “7” очков} – при бросании игральной кости;

$D =$ {в аудиторию вошла студентка};

$E =$ {в аудиторию вошла студентка старше 18 лет}.

Случайные события могут состоять из нескольких элементарных событий, подразделяющихся на:

- достоверные;
- невозможные;
- совместные;
- несовместные;
- единственно возможные;
- равновозможные;
- противоположные.

Событие, которое обязательно произойдет в результате опыта (испытания, эксперимента) называется **достоверным** (пример A и B). Достоверные события будем обозначать Ω.

Событие, которое не может произойти в результате данного опыта (испытания, эксперимента) называется **невозможным** (пример C).

Обозначение: Ø.

Несколько событий называются **совместными**, если в результате опыта (испытания, эксперимента) появление одного из них не исключает возможность появления других (пример D и E).

Несколько событий называются **несовместными** в данном опыте (испытании, эксперименте), если появление одного из них исключает возможность появления других (пример A и B).

События называются **единственно возможными**, если в результате опыта (испытания, эксперимента) хотя бы одно из них обязательно произойдет (пример A и B).

Несколько событий называются **равновозможными**, если в результате опыта (испытания, эксперимента) ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие (пример A и B).

Два единственно возможных и несовместных события называются **противоположными** (пример A и B).

Совокупность всех единственно возможных и несовместных событий называется **полной группой событий**.

События, которые образуют полную группу, несовместны и равновозможны, называют **случаями** (пример A и B).

1.2. Действия над случайными событиями

Операция умножения событий

Произведением или **пересечением** двух событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется событие $\boldsymbol{C}$, состоящее в совместном появлении события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

$$C=A\cdot B \tag{1.2.1}$$

Для иллюстрации действий над событиями будем использовать так называемые диаграммы Венна[1].

Операция умножения событий (рис. 1.2.1.).

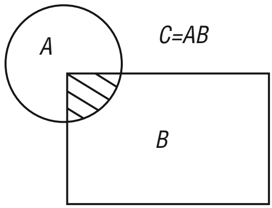

Рис. 1.2.1. Произведение двух событий

Операция умножения событий эквивалентна логической операции «и». В этом смысле формула (1.2.1) может быть представлена как:

$$C = A \text{ и } B \qquad (1.2.2)$$

Пример 1.

По некоторой цели производятся 3 выстрела.

Рассматриваются события $A1$, $A2$, $A3$ – попадание в цель первым, вторым и третьим выстрелами, V – попадание в цель всех трех выстрелов. Тогда очевидно:

$$V = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

В данном примере рассматривается произведение трех событий – событие V. Иллюстрация дана на рис. 1.2.2.

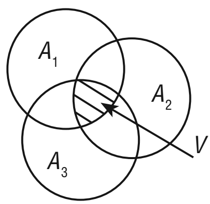

Рис. 1.2.2. Произведение трех событий

Тогда по примеру 1 в общем случае, произведение нескольких событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ можно записать следующим образом:

$$V = \prod_{i=1}^{n} A_i \, . \qquad (1.2.3)$$

[1] Джон Венн (John Venn, 1834 1923) – английский математик-логик, построивший графический аппарат диаграмм. Основные труды: “Логика случая” (1866 г.), “Символическая логика” (1881 г.).

и заключается в появлении в данном опыте событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ вместе, то есть события A_1 и события A_2, ..., и события A_n.

Операция сложения событий

Суммой двух событий A и B называется событие D, состоящее в появлении события A или B, или обоих вместе.

Диаграммы Венна для несовместных и совместных событий будут различаться и представлены на рис. 1.2.3 и 1.2.4.

$$D=A+B \tag{1.2.4}$$

Операция сложения двух несовместных событий эквивалентна логической операции «или». В этом смысле формула (1.2.4) может быть представлена как:

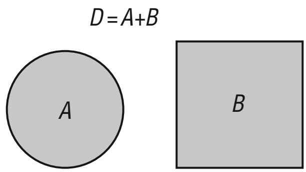

Рис. 1.2.3. Сумма двух несовместных событий

$$D=A \text{ или } B \tag{1.2.5}$$

Сумма нескольких несовместных событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ может быть записана в виде:

$$D = \sum_{i=1}^{n} A_i. \tag{1.2.6}$$

Как видно из рис 1.2.4, сумма двух совместных событий представляет собой их объединение, которое состоит в появлении в данном опыте хотя

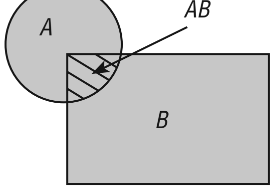

Рис. 1.2.4. Сумма двух совместных событий

бы одного из перечисленных событий – события A или события B или событий A и B вместе:

$$C = A \cup B. \tag{1.2.7}$$

Формула (1.2.7) эквивалентна логической записи:

$$C = A \text{ или } B \text{ или } AB. \tag{1.2.8}$$

Объединение нескольких совместных событий может быть представлено в виде:

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \tag{1.2.9}$$

Операция вычитания событий

Разностью двух событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется событие $\boldsymbol{F}$, которое состоит

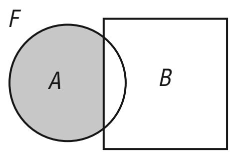

Рис. 1.2.5. Разность двух событий

из всех исходов, принадлежащих $\boldsymbol{A}$, исключая исходы, принадлежащие $\boldsymbol{B}$:

$$F = A - B. \tag{1.2.10}$$

На диаграмме разность событий представлена рис. 1.2.5.

Операция дополнения

Дополнением события A до события Ω называется событие $\overline{A}$, несовместное с A и образующее с ним полную группу событий (рис. 1.2.6). Дополнение A до Ω можно выразить в виде разности:

$$\overline{A} = \Omega - A. \tag{1.2.11}$$

События A и $\overline{A}$ являются противоположными событиями.

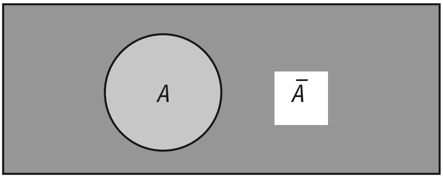

Рис. 1.2.6. Дополнение события *A* до полного пространства

Следовательно, для противоположных событий справедливы следующие соотношения:

$$A + \overline{A} = \Omega, \tag{1.2.12}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset. \tag{1.2.13}$$

1.3. Аксиоматическое определение вероятности события

Аксиоматическое определение вероятности было создано в 1933 году А. Н. Колмогоровым[2].

Вероятностью $P(A)$ называется числовая функция, определенная для всех событий A поля S (поля событий для данного эксперимента) и удовлетворяющая трем аксиомам вероятностей:

Аксиома 1 (*неотрицательности*): $P(A) \geq 0$. Вероятность неотрицательна.

Аксиома 2 (*нормировки*):. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3 (*аддитивности*). Вероятность суммы несовместных событий A_1, A_2, A_3,..., A_n равна сумме вероятности этих событий:

$$P\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad A_i A_j = \emptyset, \quad i \neq j\,. \tag{1.3.1}$$

Смысл этих аксиом: вероятность есть неотрицательная, нормированная и аддитивная функция.

Аксиоматическое определение вероятности не дает способа конкретного вычисления вероятности, поэтому используются другие определения вероятности, на которых остановимся ниже.

---

[2] Андрей Николаевич Колмогоров (25 апреля 1903 — 20 октября 1987) — советский математик, один из крупнейших математиков XX века. Колмогоров — один из основоположников современной теории вероятностей.

1.4. Классическое определение вероятности

При классификации случайных событий мы использовали термин «возможность», то есть рассмотрели качественные признаки основных положений теории вероятностей. Для того, чтобы сравнивать события по степени возможности их появления, необходимо ввести количественную характеристику, то есть выразить численно.

Такой численной мерой объективной возможности наступления события является вероятность события.

Так называемый “классический” способ определения вероятности непосредственно используется для событий, называемых “случаями”.

Случаями (шансами) называют несовместные, равновозможные события, образующие полную группу. Примерами событий, образующих группу случаев, являются:

- появление герба и цифры при одном бросании монеты;
- появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при однократном бросании игральной кости;
- появление различных шаров при вынимании наугад одинаковых на ощупь шаров из урны, содержащей несколько различных по цвету шаров.

Пусть события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ – несовместны, равновозможны и образуют полную группу – случаи, а события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ благоприятствуют появлению интересуемого нас события A ($m \leq n$). Тогда вероятность события A определяется по так называемой **классической формуле**:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.4.1)$$

где n – общее число случаев,
m – число случаев, благоприятствующих событию A.

Свойства вероятности события:

1. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega)=1$.
2. Вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing)=0$.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1: $0<P<1$.

Таким образом, вероятность любого события: $0 \leq P \leq 1$.

Пример 2. Опыт заключается в однократном бросании игральной кости. Рассматриваются события:
A – появление четного числа очков;

B – появление не менее трех очков;

C – появление хотя бы одного очка.

Определим вероятности этих событий.

Решение.

Так как пространство исходов опыта – события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ – появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков – образуют группу случаев, то искомые вероятности будем вычислять по формуле (1.4.1).

Событию A благоприятны исходы A_2, A_4, A_6, ($m_A = 3$) событию B благоприятны исходы A_3, A_4, A_5, A_6 ($m_B = 4$), событию C благоприятны все исходы $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ($m_C = 6$). Вероятности этих событий соответственно равны:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad P(C) = \frac{6}{6} = 1 = P(\Omega).$$

Пример 3. В урне находятся 12 шаров, пять из них красных. Найти вероятность, что наудачу вынутый шар – красный.

Решение.

A={наудачу вынутый из урны шар – красный}.

Всего шаров – 12, значит n=12 из них красных – 5, значит число благоприятствующих исходов m=5 .

Тогда по формуле (1.4.1):

$$P(A) = \frac{5}{12}.$$

1.5. Статистическое определение вероятности

Рассмотрим n одинаковых испытаний. Предположим, что результатом каждого испытания может быть появление или непоявление события A. Естественной характеристикой события A в этой последовательности испытаний является относительная частота (частость) его появления – отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к числу всех проведенных испытаний. Обозначая относительную частоту (частость) события A через $P^*(A)$, а число появлений события A в n испытаниях через m_A, получим:

$$P^*(A) = \frac{m_A}{n}. \tag{1.5.1}$$

Относительная частота невозможного события Ø:

$$P^*(\emptyset) = \frac{m_\emptyset}{n} = \frac{0}{n} = 0\,. \qquad (1.5.2)$$

Относительная частота достоверного события Ω:

$$P^*(\Omega) = \frac{m_\Omega}{n} = \frac{n}{n} = 1. \qquad (1.5.3)$$

Относительная частота случайного события A, которое может появиться или не появиться в результате испытания, очевидно, заключена между нулем и единицей. Поэтому относительная частота любого события представляет собой либо правильную дробь, либо равна нулю, либо равна единице:

$$0 \le P^*(A) \le 1 \text{ или в \% } 0\% \le P^*(A) \le 100\%. \qquad (1.5.4)$$

При многократном воспроизведении серии из n испытаний в одинаковых условиях изменяется число появлений m_A события A в каждой серии, следовательно, изменяется (является случайной) и относительная частота события (1.5.1).

Относительная частота события обладает замечательным свойством **устойчивости**, которое заключается в неограниченном приближении относительной частоты события к некоторой постоянной величине при неограниченном увеличении числа испытаний. Рассмотрим пример, характеризующий устойчивость частоты.

В таблице 1.5.1 приведены результаты испытаний известных ученых-статистиков Бюффона и Пирсона по наблюдениям за частотой появления герба при бросании монеты.

Таблица 1.5.1.

Экспериментатор	Число бросаний монеты	Число появлений герба	Частота
Бюффон (18 век)	4040	2048	0,5080
Пирсон (начало 20 века)	12000	6019	0,5016
Пирсон (начало 20 века)	24000	12012	0,5005

Результаты, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что относительная частота появлений герба неограниченно приближается к числу 0,5, которое назовем **статистической вероятностью события** G и будем обозначать $P(G)$. Таким образом, $P(G)$=0.50.

Мы ввели в рассмотрение статистическую вероятность – число, к которому неограниченно приближается относительная частота события при увеличении числа испытаний. Характер сходимости частоты и вероятности впервые изучен Я. Бернулли[3] и сформулирован в соответствующей теореме.

Величина X_n сходится по вероятности к величине a, если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|X_n - a| < \varepsilon$ неограниченно приближается к единице при неограниченном увеличении числа n.

Применительно к частоте и вероятности это запишется в виде:

$$P(|P^*(A) - P(A)| < \varepsilon) > 1 - \delta, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0. \qquad (1.5.5)$$

Выражение (1.5.5) составляет содержание теоремы Я. Бернулли: частота события A при неограниченном увеличении числа испытаний сходится по вероятности к вероятности события A.

Следовательно, вероятность события $P(A)$ есть численная мера степени объективной возможности события в данном испытании, и с понятием “вероятность события” мы связываем определенный практический смысл: на основании накопленного опыта мы утверждаем, что наиболее вероятны те события, которые чаще происходят, а те события, которые редко происходят – наименее вероятны. Таким образом, понятие “вероятность события” связано с результатами опытов и, следовательно, с понятием “частота события”.

1.6. Геометрическая вероятность

Одним из недостатков классического определения вероятности события, основанного на рассмотрении конечного числа равновозможных исходов испытания, является невозможность использования формулы (1.4.1) для случая бесконечного множества исходов испытания. Устранить этот недостаток можно используя так называемую геометрическую вероятность.

Общая задача, которая является моделью подхода к вычислению вероятности для такого случая, формулируется следующим образом. Рассмотрим на плоскости некоторую область G (рис.1.6.1) и область $g \subset G$. В область G наугад бросается точка x так, что она может равновероятно попасть в любую точку области, следовательно, вероятность попадания

[3] Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик, профессор Базельского университета (с 1687). Фундаментальные достижения в теории вероятностей – разработка вероятностной модели независимых повторных испытаний (испытания Бернулли). Дал первое доказательство закона больших чисел. Основной труд по теории вероятностей “Искусство предположений” (опубликован в 1713 г).

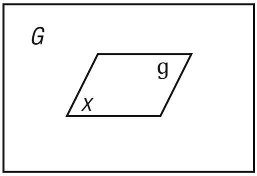

Рис. 1.6.1. Модель вычисления геометрической вероятности

в какую-либо часть области G, например, в область g, пропорциональна площади этой области и не зависит от её формы и расположения.

Поэтому, по определению, вероятность попадания точки x в область g при её бросании наугад в область G (событие A), естественно, будет равна:

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes G}}, \tag{1.6.1}$$

где $mes\, g$ – мера области $g \subset G$,
$mes\, G$ – мера области G.

В качестве меры могут выступать длина, площадь, объем, угол и другое.

Рассмотрим несколько примеров вычисления геометрических вероятностей.

Пример 4. Два лица A и B условились о встрече в определенном месте в течение часа после 12 часов. Лицо, пришедшее первым – предположим A, ждет встречи в течение 20 минут. Когда они заканчиваются, лицо A уходит. Какова вероятность встречи A и B, если они приходят независимо друг от друга в случайное время после 12 часов до 13 часов?

Решение.

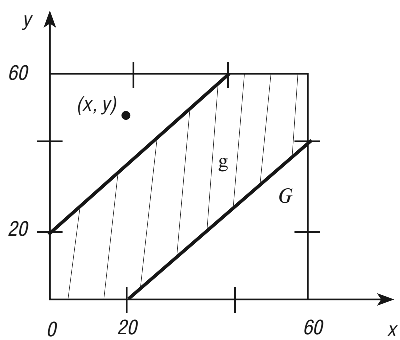

Рис. 1.6.2. Пространство исходов и область встречи A и B

Обозначим моменты прихода A через X, а B – через Y. Для встречи A и B необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие $|X - Y| \leq 20$.

Элементарное событие ω_1 (встреча A и B) будет характеризоваться двумя случайными параметрами X и Y и может быть представлено точкой с координатами (x, y) на плоскости $X0Y$. Построим на плоскости пространство элементарных исходов (событий) Ω. Это – квадрат (рис. 1.6.2) со стороной 60 минут. Условие встречи будет выполнено, если случайная точка (x, y) окажется в заштрихованной области g. Её площадь (мера области g) равна площади квадрата за вычетом площадей двух угловых треугольников:

$$S_g = S_G - 2\frac{1}{2}40^2,$$

$$S_g = 60^2 - 40^2 = 2000,$$

$$S_G = 60^2 = 3600,$$

$$P_{\text{вст.}} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

Пример 5. В квадрат со стороной, равной a см, вписан круг. Бросается случайная точка. Какова вероятность того, что точка попадет внутрь круга.

Решение.

Вероятность попадания случайной точки в круг (событие) определяется как (см. рис. 1.6.3):

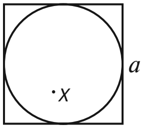

Рис. 1.6.3. Иллюстрация, к примеру 5

$$P(A) = \frac{S_{\text{кр.}}}{S_{\text{кв.}}}.$$

Найдем площадь круга и квадрата:

$$S_{\text{кр.}} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4},$$

$$S_{\text{кв.}} = a^2$$

тогда искомая вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под испытанием и событием в теории вероятностей?
2. Какова классификация событий в теории вероятностей?
3. Какое событие называется достоверным, какое невозможным и какое случайным?
4. Что является предметом изучения теории вероятностей?
5. На какие виды подразделяются случайные события?
6. Какие события называются равновозможными, какие несовместными, какие совместными и какие противоположными?
7. Что понимается под полной группой событий?
8. Что понимается под вероятностью события?
9. Что является единицей меры вероятности события?
10. Вероятность, равная нулю, соответствует какому событию?
11. В каких пределах находится вероятность случайного (возможного) события?
12. Какие события можно отнести к схеме случаев?
13. Какой случай называется благоприятствующим для события ?
14. По какой формуле определяется вероятность события , если испытание можно отнести к схеме случаев?
15. Что понимается под геометрической вероятностью на оси, на плоскости и в пространстве?
16. Что понимается под относительной частотой события ?
17. В чем отличие вероятности события от ее относительной частоты?
18. В чем состоит свойство устойчивости относительной частоты события ?

ЗАДАНИЯ

1.1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

1.2. В урне 9 красных, 6 желтых и 5 зеленых шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется желтым?

1.3. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

1.4. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что конкретно выбранный турист, входящий в состав группы, пойдет в магазин?

1.5. По железнодорожному полотну производится бомбометание. Длина полотна 3 км. Известно, что бомба попала на железнодорожное полотно. Какова вероятность попадания в железнодорожный состав длиною в 500 м находящийся на этом полотне?

1.6. В квадрат вписан равнобедренный треугольник так, что его основание совпадает со стороной квадрата. В квадрат случайным образом бросается точка. Найти вероятность того, что точка не попадет в треугольник?

1.7. На плоскость нанесена система параллельных линий, расположенных на расстоянии 3 см друг от друга. На плоскость случайным образом брошена монета диаметром 1 см. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одну из линий?

1.8. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Петр Иванов. Найдите вероятность того, что в первом туре Петр Иванов будет играть с каким-либо шашистом из России?

1.9. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

1.10. Два шахматиста играют одну партию. Событие А - выиграет первый игрок, В - выиграет второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

1.11. События: А – хотя бы один из проверяемых приборов бракованный, - все приборы доброкачественные. Что означают события:
а) $A+B$?; б) AB?; в) $\overline{A}$; г) $\overline{B}$.

1.12. Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа. События и соответственно, означают, что выбрано хотя бы одно простое число и хотя бы одно четное число. Что означают события AB?, $A+B$?.

1.13. В зоне поражения цели зенитной артиллерией, представляющей шар радиуса 100 м, оказалась цель, объем которой приближенно равен 1000 м^3. Какова вероятность поражения цели при одном выстреле?

ГЛАВА 2
КОМБИНАТОРИКА В ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧАХ

2.1. Комбинаторный характер вероятностных задач

Комбинаторика – один из разделов дискретной математики, наука, изучающая комбинации и перестановки объектов произвольной природы, подчиненные определенным условиям.

С точки зрения теории множеств комбинаторика имеет дело со способами образования различных подмножеств конечных множеств, их объединениями и пересечениями, а также разрабатывает способы упорядочения этих подмножеств.

В методическом плане комбинаторика рассматривается как введение в теорию вероятностей, поскольку широко используется при решении вероятностных задач. Как правило, решение задач по классической схеме с конечным числом равновозможных исходов (1.4.1) сводится к использованию комбинаторных методов для подсчета общего числа случаев и числа случаев , благоприятствующих некоторому событию A:

$$P(A) = \frac{m}{n} \cdot$$

Кроме теории вероятностей, комбинаторика нашла применение во многих областях науки и техники, в частности, в теории информации, кодирования, статистической физике, теории графов, планировании экспериментов, теории программирования, генетике, биологии.

Рассмотрим пример, подтверждающий необходимость использования комбинаторных методов для их решения.

Пример 1. Игральная кость бросается дважды подряд. Вычисляется вероятность появления одного и того же числа очков при первом и втором бросаниях (событие A).

Решение.

Для определения общего числа случаев (исходов опыта) необходимо рассмотреть все возможные комбинации цифр, выпадающих на первой и второй костях, каждая из которых включает двухзначные числа, составленные из цифр от 1 до 6 на первой и второй позиции, то есть (1,1), (1,2), ... , (3,6), ... , (6,6). Число случаев, благоприятных событию A, равно числу двухзначных чисел, состоящих из одинаковых цифр, то есть (1,1), (2,2), ..., (6,6).

Способы подсчета чисел комбинаций в представленном примере, будет рассмотрен ниже.

2.2. Выборка из множества элементов

Изложение методов комбинаторики применительно к решению вероятностных задач ведется на основе понятия «выборка из множества элементов», что позволяет рассматривать все комбинаторные методы с единых позиций.

Если элементы выборки располагаются в порядке их выбора из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_\mathrm{k}$ (в линейку), то такая выборка называется **упорядоченной**.

Если порядок элементов выборки не имеет значения (“куча”), то такая k^0 - выборка называется **неупорядоченной**.

Рассмотрим два основных правила подсчета чисел упорядоченных выборок (размещений) – правило произведения и правило суммы.

Пусть для образования упорядоченных выборок, обладающих заданным свойством, элемент $x_i^{(1)}$ из множества X_1 можно выбрать n_1 способами (по числу n_1 элементов этого множества), элемент из множества можно выбрать способами и т.д., наконец, элемент $x_j^{(2)}$ из множества X_2 можно выбрать n_2 способами и т.д., наконец, элемент $x_m^{(k)}$ из множества X_k – n_k способами. Тогда число выборок n, обладающих заданным свойством, будет равно произведению чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i\ . \tag{2.2.1}$$

Полученный результат представляет собой **правило произведения**.

Частный случай, если $X_1=X_2=\ldots=X_\mathrm{k}=X$ и $n_1=n_2=\ldots=n_k=m$, то правило произведения (2.3.4) запишется в следующем виде:

$$n=m^k \tag{2.2.2}$$

Пример 2. Определим возможное число n семизначных телефонных номеров.

Решение.

Искомое число семизначных телефонных номеров равно числу упорядоченных 7 - выборок из множества $X_1=\{1, 2, \ldots, 9\}$, $n_1=9$ и шести одинаковых множеств $X_2=X_3=\ldots=X_7=\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $n_2=10$. В соответствии с правилом произведения (2.3.4), (2.3.5) имеем:

$$n=n_1 n_2 \ldots n_7=9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=9\cdot10^6.$$

Правило суммы используется в том случае, когда множество всевозможных выборок может быть представлено в виде некоторого числа непересекающихся различных классов $X_{j,j}=1 \ldots n$ (рис.2.2.1).

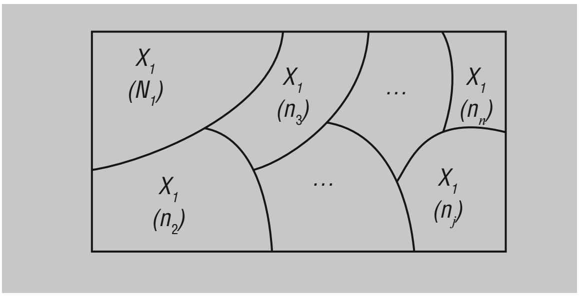

Рис. 2.2.1. Множество непересекающихся классов (подмножество) выборок

Общее число выборок в этом случае равно сумме чисел выборок в различных классах:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_n = \sum_{j=1}^{n} n_j. \qquad (2.2.3)$$

Это и есть формула, определяющая **правило суммы**. Числа n_1, n_2, ..., n_n выборок в различных классах определяются в соответствии с правилом произведения (2.2.1).

Пример 3. Определим, сколько различных сигналов можно составить из четырех различных сигнальных флагов на корабле.

Решение.

Множество вариантов составления различных сигналов можно разделить на 4 непересекающихся подмножества:

X_1 – множество сигналов из одного флага;
X_2 – множество сигналов из двух флагов;
X_3 – множество сигналов из трех флагов;
X_4 – множество сигналов из четырех флагов.

Общее число вариантов составления сигналов из 4-х флагов равно (2.2.3):

$$n=n_1+n_2+n_3+n_{4,}$$

где n_1= 4 варианта сигналов из одного флага;

n_2= 4·3 = 12 вариантов из двух флагов;

n_3= 4·3·2 = 24 варианта сигналов из трех флагов;

n_4= 4·3·2·1= 24 варианта сигналов из четырех флагов.

Таким образом, в результате получаем:

$$n= 4 + 12 + 24 + 24 = 64 \text{ (варианта сигналов).}$$

При подсчете чисел n_k использовалось правило произведения (2.2.1). Так, например, при подсчете n_3 в качестве первого флага для составления сигнала из 3-х флагов можно выбрать любой из 4-х флагов. Вторым флагом мог быть один из 3-х оставшихся, а третьим – один из двух оставшихся флагов. Отсюда и результат: n_3 = 4·3·2 = 24.

2.3. Размещения

Для вычисления суммы n – первых натуральных чисел существует очень удобная формула:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для вычисления произведения n – первых натуральных чисел такой формулы нет, но зато эта величина получила специальное обозначение $n!$.

Читается как «эн» – факториал.

Примеры: 5! = 1·2·3·4·5 = 120, ..., 7! =1·2·3·4·5·6·7 = 120 = 5040.

Отметим, что принято считать 0!=1. Основанием этому утверждению служит свойство факториала: $n! = n\,(n-1)!$.

Приведенное выражение справедливо при n >1. Тогда естественно определить 0! так, чтобы было верно и при n=1. Тогда должно выполняться соотношение: 1!=1, но для этого необходимо считать, что 0!=1.

Размещением без повторений из *n* элементов по *m* элементов ($m<n$) называется упорядоченная m –выборка, элементы которой являются элементами одного и того же множества

$$X=\{x_1, x_2, \dots , x_n\}$$

и все различны.

Две такие выборки различны, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком (расстановкой) одних и тех же элементов, то есть либо составом, либо порядком расположения, либо и тем, и другим.

Число размещений без повторений обозначается[4] A_n^m и определяется в соответствии с правилом произведения (2.2.1) при $n_1=n$, $n_2=n$-1, $n_3=n$-2, ... , $n_m=n-m+1$:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \qquad (2.3.1)$$

Для получения компактной формулы для A_n^m умножим и разделим выражение (2.3.1) на дополнение его до $n!$ – на величину $(n-m)!$:

$$(n-m)!=(n-m)(n-m-1)\ \ldots\ 3\cdot2\cdot1. \qquad (2.3.2)$$

Тогда окончательно получим:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2.3.3)$$

Рассмотрим примеры определения числа размещений без повторений.

Пример 4. Состав и число размещений без повторений.

Из элементов множества $X=\{a, b, c, d, e\}$, $n=5$ составим размещения без повторений из 5 по 3 элемента и определим их число.

Решение. Из 5-элементного множества X можно образовать по формуле (2.3.3)

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{2!\cdot3\cdot4\cdot5}{2!} = 3\cdot4\cdot5 = 60$$

размещений без повторений элементов, содержащих по 3 элемента.

Эти выборки могут отличаться друг от друга либо составом элементов, либо их порядком, но при этом повторение элементов в различных выборках не допускается. Перечислим их:

$$A=\{(a, b, c), (a, b, d), (a, b, e), (b, a, c), (b, c, a), \ldots, (e, d, c)\}.$$

Пример 5. Составление чисел.

Определим, сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если повторения цифр в этих числах не допускается?

Решение. Количество четырехзначных чисел равно числу размещений без повторений из 5 элементов по 4 элемента:

$$A_5^4 = \frac{5!}{1!} = \frac{1!\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1!} = 2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120 \text{ чисел}$$

Пример 6. Призеры хоккейного турнира.

Определим, сколько существует способов распределения золотых, серебряных и бронзовых медалей между призерами хоккейного турнира,

[4] буква А – начальная от arrangement с французского – размещение.

если предположить, что все 16 играющих команд потенциально равны по уровню игры и составу игроков?

Решение. Задача сводится к определению числа троек команд – 3 выборок из 16 элементов, отличающихся друг от друга либо составом команд, либо порядком распределения мест. Это – число размещений без повторений, которое равно

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360 \text{ способов}.$$

Размещения с повторениями

Размещением с повторениями из *n* элементов по *m* элементов называется упорядоченная m – выборка, составленная из элементов одного и того же n – множества

$$X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Элементы этой выборки могут совпадать. Две таких выборки различны, если они отличаются порядком неравных элементов или их составом.

Число размещений с повторениями обозначается $\hat{A}_n^m$ и определяется

по правилу произведения (2.2.1), (2.2.2) при:

$$\hat{A}_n^m = n^m. \tag{2.3.4}$$

Рассмотрим примеры определения числа размещений с повторениями.

Пример 7. Состав и число размещений с повторениями.

Из элементов множества $X=\{a, b, c, d, e\}$, $n=5$ составим размещения с повторениями (упорядоченные выборки) по 3 элемента в каждой и определим их число.

Решение. Из пяти элементов множества X можно образовать (2.3.4)

$$\hat{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

размещений с повторениями по 3 элемента.

Эти выборки могут отличаться друг от друга либо составом элементов, либо их порядком:

$$\hat{A} = \{(a,\ a,\ a),\ \ (a,\ a,\ b),\ \ (a,\ a,\ c),\ \ (a,\ a,\ d),\ \ (a,\ a,\ e),$$
$$(a,\ b,\ a),\ \ (a,\ b,\ b),\ \ (b,\ b,\ b),\ \ \ldots,\ \ (e,\ e,\ e)\}$$

Пример 8. Составление числа.

Определим, сколько четырехзначных чисел можно составить из множества цифр X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, если повторения цифр допустимы?

Решение. Количество четырехзначных чисел равно числу размещений с повторениями из 9-ти элементов по 4 элемента:

$$\hat{A}_9^4 = 9^4 = 6561.$$

2.4. Перестановки

Перестановками без повторений (или просто **перестановками**) называются размещения без повторений из всех элементов X, то есть из n элементов по n.

Их число обозначается P_n и определяется выражением (2.4.1):

$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$, то есть

$$P_n = n!. \qquad (2.4.1)$$

Две перестановки различны, если отличаются только порядком своих элементов, так как в их состав входит все n элементов исходного множества X. Рассмотрим примеры составления перестановок из n элементов множества X.

Пример 9. Состав и число перестановок. Из элементов множества $X=\{a, b, c, d, e\}$, n=5 составим всевозможные перестановки (размещения без повторений из пяти элементов по пять) и определим их число.

Решение. Число перестановок из пяти элементов a, b, c, d, e равно:

$$P_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120.$$

Соответствующие перестановки представляются в виде:

$$\{P_5\} = \{(a,\ b,\ c,\ d,\ e),\ \ (b,\ a,\ c,\ d,\ e),\ \ (b,\ c,\ a,\ d,\ e),$$
$$(b,\ c,\ a,\ e,\ d),\ \ (c,\ a,\ b,\ d,\ e),\ \ \ldots,\ \ (e,\ d,\ c,\ b,\ a)\}\ .$$

Пример 10. Расстановка книг на полке.

Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

Решение. Число расстановок 4-х книг равно числу перестановок из 4-х элементов:

$$P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24 \text{ (способа).}$$

Перестановки с повторениями

Перестановками с повторениями называются такие перестановки, в которых хотя бы два элемента одинаковы.

Пусть перестановка P_n состоит из *n* элементов множества $\hat{X}$, среди которых имеются одинаковые элементы, например, n_1 элементов *A*, n_2 элементов *B*, n_3 элементов *C, ...,* n_m элементов *L*, так что сумма чисел элементов равна:

$$n_1+n_2+n_3+...+n_m=n.$$

Одна из возможных перестановок из этих *n* элементов множества *X*, общее число которых равно *n*!, может иметь, например, следующий вид:

$$(P_n)_1 = \left(\overbrace{\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n_1}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n_2}, \underbrace{c, c, \ldots, c}_{n_3}, \ldots, \underbrace{z, z, \ldots, z}_{n_m}}^{n}\right). \qquad (2.4.2)$$

Перестановка $(P_n)_1$ – перестановка с повторениями. Число перестановок с повторениями обозначается символом:

$$\hat{P}(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m).$$

При его определении будем иметь в виду, что, переставляя n_1 одинаковых элементов *a*, *a*, ..., *a*, n_1! способами, мы не получим новых перестановок, следовательно, общее число перестановок *n*! следует уменьшить в n_1! раз. Аналогично, переставляя n_2 одинаковых элементов *b*, *b*, ..., *b* n_2! способами, мы вновь не получим новых перестановок, следовательно, опять общее число перестановок *n*! следует уменьшить в n_2! раз. Рассуждая и дальше подобным образом, получим следующий результат:

$$\hat{P}(n_1,\ \ n_2,\ \ldots,\ n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!}. \qquad (2.4.3)$$

Пример 11. Сколько различных “слов” можно составить из букв, образующих слово АВИАЦИЯ?

Решение. Слово АВИАЦИЯ содержит две буквы “А” (n_1=2), две буквы “И” (n_2=2), по одной “В”, “Ц”, “Я” ($n_3 = n_4 = n_5 = 1$). Общее число букв *n*=7. Общее число перестановок из семи букв равно

$P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040.$

Однако, учитывая то обстоятельство, что перестановки одинаковых букв “А” и “И” не дают новых “слов”, получим

$$\hat{P}(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1) = \frac{7!}{2!\ \ 2!\ \ 1!\ \ 1!\ \ 1!} = \frac{5040}{4} = 1260.$$