С. ГАВРИЛОВ

Методы анализа логических корреляций для САПР цифровых КМОП СБИС

ТЕХНОСФЕРА

УДК 681.3
ББК 32.97
Г 12

Рецензент: д.т.н. А.Л. Глебов

Гаврилов С.
Г 12 Методы анализа логических корреляций для САПР цифровых КМОП СБИС
Москва:
Техносфера, 2011 – 136 с. ISBN 978-5-94836-280-9

В книге рассматриваются методы и алгоритмы анализа логических корреляций в цифровых КМОП-схемах. Показаны возможности использования логических корреляций для повышения качества результатов проектирования в анализе помехоустойчивости и быстродействия схем.

Книга основана на результатах, полученных в Учреждении Российской академии наук Институте проблем проектирования в микроэлектронике РАН (ИППМ РАН).

Материал, изложенный в книге, является основой лекционного курса для магистров факультета ЭКТ Московского института электронной техники, обучающихся по направлению «Электроника и микроэлектроника», а также предназначен для научных работников и инженеров, специализирующихся в области методов математического моделирования САПР СБИС.

УДК 681.3
ББК 32.97

ISBN 978-5-94836-280-9

Содержание

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕРМИНЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Булева алгебра

Булева алгебра оперирует некоторым множеством элементов B, включающим два различных элемента 0 и 1. В общем случае речь идет о произвольном количестве элементов — не менее двух. Операции над элементами этого множества определяются на основе списка аксиом.

Определение 1.1. Пусть задан упорядоченный набор $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$**,** в котором определены множество элементов B, две бинарных операции на B — логическое сложение $< + >$ и логическое умножение $< \cdot >$, унарная операция на B — отрицание (или дополнение) $< \overline{\ } >$ и два различных элемента 0 и 1 из множества B. Упорядоченный набор $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$ называется **булевой алгеброй,** если для любых $a, b, c \in B$ выполняются следующие аксиомы:

- коммутативные законы: $a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$;
- дистрибутивные законы: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$;
- законы поглощения 0 и 1: $a + 0 = a$ и $a \cdot 1 = a$;
- законы комплементарности: $a + \overline{a} = 1$ и $a \cdot \overline{a} = 0$.

На основе аксиом и применения правила суперпозиции (подстановки) в качестве правила вывода выводятся вычислительные законы булевой алгебры.

Пусть задана булева алгебра $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$. Тогда для любых $a, b, c \in$ A выполняются следующие законы:

- законы идемпотентности: $a + a = a$ и $a \cdot a = a$;
- свойства для 1 и 0: $a + 1 = 1$ и $a \cdot 0 = 0$;
- законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$ и $a + (a \cdot b) = a + b) \cdot (a + c)$;
- ассоциативные законы: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
- законы де Моргана (законы двойственности): $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ и $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$;
- закон двойного отрицания: $\overline{\overline{a}} = a$.

Доказательство этих законов можно найти в [2, 3]. Примерами булевых алгебр являются, в частности:

- подмножество всех множеств заданного множества;
- алгебра булевых функций;
- классическая булева алгебра двух элементов (алгебра логики);
- четырехзначная булева алгебра.

Пусть S — некоторое множество, состоящее из |S| элементов. Тогда можно выбрать $2^{|S|}$ различных подмножества данного множества. Множество всех $2^{|S|}$ подмножеств обозначается через 2^S и удовлетворяет всем аксиомам булевой алгебры относительно следующих операций:

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ — пересечение множеств;

$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ — объединение множеств;

$\overline{A} = S \setminus A$ — дополнение до полного множества S.

То есть алгебра $A = (2^S, \cup, \cap, S\setminus, \varnothing, S)$ является булевой алгеброй, в которой нулевой элемент — пустое множество $\varnothing$, а единичный элемент — полное множество S.

Другие варианты булевых алгебр рассматриваются ниже.

Определение 1.2. Пусть $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$ — булева алгебра и задано n булевых переменных $x_1,..., x_n$, каждая из которых может принимать значения из множества B. Тогда **булевой формулой** называется выражение, получаемое на основе следующих рекурсивных правил:

1. Элемент множества B есть булева формула;
2. Переменные $x_1,..., x_n$ являются булевыми формулами;
3. Если F и F — булевы формулы, тогда $a + a = a$, $(F) + (G)$ и $\overline{(F)}$ также являются булевыми формулами.

В дальнейшем для обозначения переменных могут использоваться две формы записи, а именно математическая запись: $x_1,..., x_n$, или строка символов по стандартам языка программирования, например *x1, ..., xn* или *x[0], x[1], .., x[n–1],* как это принято в языке Си [4].

Для сокращения записи принято опускать лишние скобки, подразумевая следующий порядок приоритетности выполнения операций: $< ^{-} >, < \cdot >, .< + >$..

Следует отметить, что понятие булевых формул определено в терминах абстрактных цепочек символов. Для того чтобы интерпретировать булевы формулы как булевы функции, нужно символам в правиле (3) сопоставить булевы операции, а переменным сопоставить значения булевых переменных из множества B. Поэтому точное определение булевой функции основано на задании параллельного множества правил формирования.

Определение 1.3. Пусть $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$ — булева алгебра и задано n булевых переменных $x_1,..., x_n$, каждая из которых может принимать значения из множества B. Отображение $f : B^n \to B$ называется **булевой функцией** от n переменных $x_1,..., x_n$ в том и только в том случае, когда эта функция может быть выражена с помощью булевой формулы по следующим правилам:

(1) для любого элемента $b \in B$ константная функция есть булева функция от n переменных:

$$f(x_1,..., x_n) = b \quad \forall(x_1,..., x_n) \in B^n;$$

(2) для любой переменной $x_i \in \{x_1,..., x_n\}$ проекционная функция i-й переменной, $i \in \{1,..., n\}$ является булевой функцией n переменных:

$$f(x_1,..., x_n) = x_i \quad \forall(x_1,..., x_n) \in B^n;$$

(3) если f и g — булевы функции n переменных, тогда $f + g$, $f \cdot g$ и $\overline{f}$ также являются булевыми функциями от n переменных и определены следующим образом:

$$(f + g)(x_1,..., x_n) = f(x_1,..., x_n) + g(x_1,..., x_n) \quad \forall(x_1,..., x_n) \in B^n;$$

$$(f \cdot g)(x_1,..., x_n) = f(x_1,..., x_n) \cdot g(x_1,..., x_n) \quad \forall(x_1,..., x_n) \in B^n;$$

$$\overline{f}(x_1,\dots,x_n) = \overline{f(x_1,\dots,x_n)} \qquad \forall(x_1,\dots,x_n) \in B^n .$$

Несмотря на идентичность определений, отношение между булевыми функциями и булевыми формулами не является взаимнооднозначным. Эквивалентность булевых формул определяется в лексикографическом смысле. Эквивалентность же булевых функций определяется по эквивалентности отображений $f: B^n \to B$, а это означает, что одна и та же булева функция может быть выражена разными формулами.

Следует отметить, что для заданной булевой алгебры $A = (B,+,\cdot,^-,0,1)$ множество булевых функций $P_n(A)$ само порождает новую булеву алгебру $A_F = (B_F,+,\cdot,^-,F_0,F_1)$, в которой $B_F = P_n(A)$, а F_0, F_1 — константные функции:

$$F_0: \quad f(x_1,..., x_n) = 0 \quad \forall(x_1,..., x_n) \in B^n;$$

$$F_1: \quad f(x_1,..., x_n) = 1 \quad \forall(x_1,..., x_n) \in B^n.$$

Известно следующее [3]: если в булевой алгебре $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$ множество B содержит более двух элементов, то всегда можно построить функцию $f: B^n \to B$, которая не является булевой функцией. Однако для алгебры двух элементов любая функция $f: B^n \to B$ является булевой функцией.

1.2. Формирование графа булевых функций

Булева формула (а значит и булева функция) может быть представлена графически в виде дерева синтаксического разбора [5—7]. Примеры такого дерева изображены на (рис. 1.1). Листовые терминальные вершины такого дерева соответствуют константам (пункт (1) — Определение 1.3) или переменным $x_1,..., x_n$ (пункт (2) — Определение 1.3), а все остальные вершины соответствуют операциям $a + a = a$, $(F) + (G)$ и $\overline{(F)}$ (пункт (3) — Определение 1.3). Корневая вершина соответствует полной формуле. Ребра в этом дереве связывают операции с операндами.

Рекурсивное определение булевых формул допускает неоднократное использование одних и тех же компонент в выражениях. Поэтому, в общем случае целесообразно представлять систему булевых формул и булевых функций в виде ориентированного ациклического графа (DAG — Directed Acyclic Graph) [8—9], в котором общим выражениям соответствуют общие вершины. Для установления соответствия между булевыми функциями и их графическим представлением дадим формальное определение графа булевых функций. Вершины будем метить строками из следующего алфавита:

$$M(V) = B \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\} \cup \{+, \cdot, ^{-}\}.$$

Ребра будем индексировать целыми числами $M(E) = \{e_0, e_1\}$ для обозначения порядка вхождения операндов в выражение.

Определение 1.4. Пусть $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$ — булева алгебра и задано n булевых переменных $x_1,..., x_n$, каждая из которых может принимать значения из множества B. Тогда **графом булевых функций** (сокращенно **B-граф**) будем называть ориентированный а $x_1 \Leftarrow x_2$ циклический граф $G = (V, E)$, в котором каждая вершина помечена символом из множества $M(V) = B \cup \{x_1, ..., x_n\} \cup \{\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}\} \cup \{+, \cdot, ^{-}\}$ и определяет булеву функцию $f_{G,v}$ согласно следующим правилам:

1. Если вершина v помечена символом $b \in B$, то она не имеет ни одной входящей дуги и определяет функцию $f_{G,v}(x_1,..., x_n) = b$.
2. Если вершина v помечена символом x_i, то она не имеет ни одной входящей дуги и определяет функцию $f_{G,v}(x_1,..., x_n) = x_i$.
3. Еесли вершина v помечена символом $\overline{x_i}$, то она не имеет ни одной входящей дуги и определяет функцию $f_{G,v}(x_1, ..., x_n) = \overline{x_i}$.
4. Если вершина v помечена символом $<^{-}>$, то она имеет ровно одну входящую дугу $e_0 = (x, v) \in E$ и определяет функцию $f_{G,v}(x_1, ..., x_n) = \overline{f_{G,x}}$.
5. Если вершина v помечена символом $<\cdot>$, то она имеет ровно две входящие дуги $e_0 = (x, v) \in E$, $e_1 = (y, v) \in E$ и определяет функцию $f_{G,v}(x_1,..., x_n) = f_{G,x} \cdot f_{G,y}$.

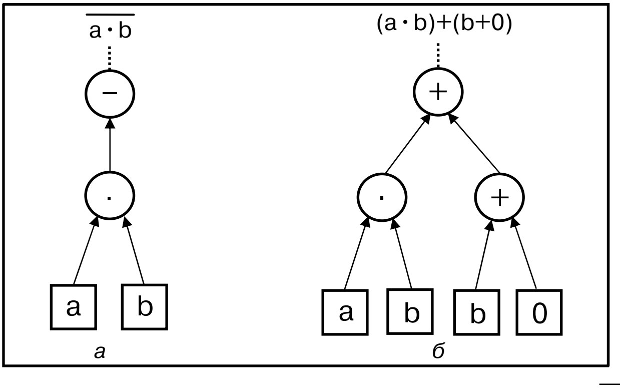

Рис. 1.1. B-граф — дерево разбора для формул (*а*) $\overline{a \cdot b}$ и (*б*) $(a \cdot b) + (b + 0)$

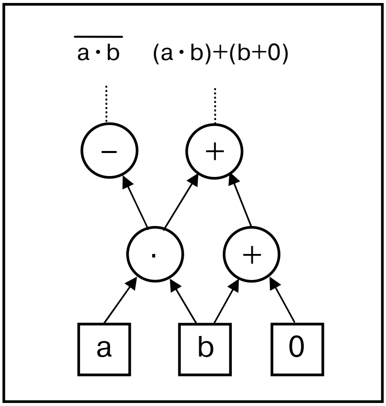

Рис. 1.2. Совместный B-граф для формул $\overline{a \cdot b}$ и (a · b) + (b+0)

6. Если вершина v помечена символом < + >, то она имеет ровно две входящие дуги $e_0 = (x, v) \in E$, $e_1 = (y, v) \in E$ и определяет функцию $f_{G,v}(x_1,..., x_n) = f_{G,x} + f_{G,y}$.

Каждой вершине v в B-графе можно поставить в соответствие подграф, состоящий из всех ее последователей и ее самой. Такой подграф также является B-графом и полностью определяет функцию, заданную в этой вершине. В общем случае может быть несколько корневых вершин, на которые не ссылается ни одна другая вершина, а также несколько B-графов, реализующих одну и ту же булеву формулу. Пример совместного графа для двух булевых функций изображен на (рис. 1.2).

1.3. Двузначная булева алгебра (алгебра логики)

Наиболее важной разновидностью булевой алгебры является алгебра двух элементов или алгебра логики.

Определение 1.5. Пусть задана булева алгебра A = ({0,1},+,·,‾,0,1), в которой B={0,1}, а операции заданы следующими соотношениями:

$$\bar{0} = 1, \qquad \bar{1} = 0,$$
$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 1 + 1 = 1,$$
$$0 \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot 1 = 0, \qquad 1 \cdot 0 = 0, \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

Тогда $A = (\{0,1\},+,\cdot,^{-},0,1)$ называется **двузначной булевой алгеброй (**или **алгеброй логики)**, в этом случае множество B=$\{0,1\}$ будем обозначать как B_2.

Определение 1.6. Функция f: $B_2^n \to B_2$ называется **двузначной булевой функцией** (или **логической функцией**).

Множество всех двузначных булевых (логических) функций n переменных будем обозначать через P_n. Общее количество функций $\#P_n$ от n переменных для такой алгебры определяется формулой:

$$\# P_n = 2^{2^n} .$$

В частности, $\#P_2 = 2^4 = 16$, $\#P_3 = 2^8 = 256$, $\#P_4 = 2^{16} = 65536$.

В табл. 1.1 приведен полный набор двузначных булевых функций двух переменных, а также принятая система обозначений и разложение функций в соответствии с определением булевых функций (Определение 1.3).

Каждая строка табл. 1.1 определяет функцию двух переменных $f_i(x_1,x_2)$: $B_2 \times B_2 \to B_2$, поэтому символы столбца 2 могут быть использованы для обозначения бинарных операций на B_2. Будем обозначать через $*_w$ любой из символов бинарных операций табл. 1.1:

$$*_w \in \Omega, \qquad \Omega = \{\cdot, \quad \overline{\Rightarrow}, \quad \overline{\Leftarrow}, \quad \oplus, \quad +, \quad \downarrow, \quad =, \quad \Leftarrow, \quad \Rightarrow, \quad \uparrow\}.$$

Введем понятие обобщенной булевой формулы, в котором допускается использование любой из перечисленных операций из множества Ω.

Пусть $A = (B,+,\cdot,^{-},0,1)$ — двузначная булева алгебра и задано n булевых переменных $x_1,\dots, x_n$, каждая из которых может принимать значения из множества B. Тогда **обобщенной булевой формулой** бу-

Таблица 1.1. Система обозначений двузначных булевых функций двух переменных

f	Обозначение	Название	Разложение	f (0,0)	f (0,1)	f (1,0)	f (1,1)
f_0	0	0 Нуль	0	0	0	0	0
f_1	$x_1 \cdot x_2$ $x_1 \,\&\, x_2$	and Коньюнкция	$x_1 \cdot x_2$	0	0	0	1
f_2	$x_1 \overline{\Rightarrow} x_2$	not-imply Отрицание импликации	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	0	0	1	0
f_3	x_1	x_1	x_1	0	0	1	1
f_4	$x_1 \overline{\Leftarrow} x_2$	not-implied-by Отрицание обратной импликации	$\overline{x_1} \cdot x_2$	0	1	0	0
f_5	x_2	x_2	x_2	0	1	0	1
f_6	$x_1 \oplus x_2$	exor Сложение по модулю 2	$\overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$	0	1	1	0
f_7	$x_1 + x_2$ $x_1 \vee x_2$	or Дизъюнкция	$x_1 + x_2$	0	1	1	1
f_8	$x_1 \downarrow x_2$	nor Стрелка Пирса(*)	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ $\overline{x_1 + x_2}$	1	0	0	0
f_9	$x_1 = x_2$	equivalence Эквивалентность	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$	1	0	0	1
f_{10}	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	1	0	1	0
f_{11}		implied-by Обратная импликация	$\overline{\overline{x_1} \cdot x_2}$ $x_1 + \overline{x_2}$	1	0	1	1
f_{12}	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$	1	1	0	0
f_{13}	$x_1 \Rightarrow x_2$	imply Импликация	$\overline{x_1 \cdot \overline{x_2}}$ $\overline{x_1} + x_2$	1	1	0	1
f_{14}	$x_1 \uparrow x_2$	nand Штрих Шеффера(**)	$\overline{x_1 \cdot x_2}$ $\overline{x_1} + \overline{x_2}$	1	1	1	0
f_{15}	1	1 Единица	1	1	1	1	1

(*) Стрелка Пирса — двуместная логическая операция, введенная в рассмотрение Чарльзом Пирсом (1839—1914).

(**) Штрих Шеффера — двуместная логическая операция, введенная в рассмотрение Генри Шеффером (1882—1964).

дем называть выражение, получаемое на основе следующих рекурсивных правил:

1. Элемент множества B есть обобщенная булева формула.
2. Переменные $x_1,..., x_n$ являются обобщенными булевыми формулами.
3. Если F — обобщенная булева формула, тогда $\overline{(F)}$ также является обобщенной булевой формулой.
4. Если F и F — обобщенные булевы формулы, тогда $\forall *_w \in \Omega$: $((F)*_w(G))$ также является обобщенной булевой формулой.

В случае двузначной булевой алгебры любая из перечисленных операций может быть выражена в терминах базовых операций булевой алгебры: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (табл. 1.1, столбец 4). А это означает, что любая обобщенная булева формула выражает некоторую булеву функцию $f : B^n \to B$ (Определение 1.3).

Отметим следующее: любая функция $f_i(x_1,x_2)$, $i = 0,...,15$ из табл. 1.1 определяет бинарное отношение, как подмножество упорядоченных пар значений переменных (x_1, x_2), для которых $f_i(x_1, x_2) = 1$:

$$\{(x_1, x_2): \quad (x_1, x_2) \in B_2 \times B_2, \quad f_i(x_1, x_2) = 1\}.$$

Заметим, что, в частности, таким образом, определяется отношение эквивалентности $(x_1 = x_2)$ (табл. 1.1, строка 9), поскольку оно обладает следующими свойствами:

- рефлексивность $a = a$;
- симметричность: если $a = b$, то $b = a$;
- транзитивность: если. $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

При этом функция $(x_1 = x_2)$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда аргументы равны. Это дает основание трактовать формулу $f_1(x_1,..., x_n) = f_2(x_1,..., x_n)$ как логическое уравнение, т. е. использовать один и тот же символ для уравнения и операции эквивалентности.