

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Для студентов
учреждений высшего образования

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73
Т33

Авторы: *В. Г. Кротов, Е. А. Ровба, А. П. Старовойтов, Е. А. Сетько, К. А. Смотрицкий*

Рецензенты: кафедра математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (доцент кафедры кандидат физико-математических наук *Н. В. Гриб*; заведующий кафедрой доцент *И. Н. Гуло*); заведующий отделом нелинейного и стохастического анализа Института математики Национальной академии наук Беларуси, член корреспондент Национальной академии наук Беларуси доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Гороховик*

Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / В. Г. Кротов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 431 с. : ил.

ISBN 978-985-06-3071-1.

В соответствии с действующими программами изложен материал по дисциплинам «Теория функций комплексного переменного» и «Дополнительные главы теории функций», изучаемым на математических специальностях учреждений высшего образования Республики Беларусь.

Содержится теоретический материал, излагаемый в лекциях, а также четырех-уровневый набор заданий для практических и лабораторных занятий (задания для аудиторной работы, базовые индивидуальные задания, задания для самостоятельной работы и задания творческого характера).

Для студентов и преподавателей. Также может быть использовано магистрантами, аспирантами и научными работниками, интересующимися комплексным анализом и его приложениями.

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

ISBN 978-985-06-3071-1

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть I. ТЕОРИЯ

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ	16
1.1. Множество комплексных чисел	16
1.1.1. Операции с комплексными числами	16
1.1.2. Поле комплексных чисел	17
1.1.3. Алгебраическая форма записи	18
1.1.4. Тригонометрическая форма записи	19
1.2. Расширенная комплексная плоскость	21
1.2.1. Топология комплексной плоскости	21
1.2.2. Компактность	24
1.2.3. Связность	24
1.2.4. Стереографическая проекция	25
1.2.5. Сферическая метрика	27
1.3. Предел и непрерывность	27
1.3.1. Функции комплексного переменного	27
1.3.2. Непрерывность	28
1.3.3. Равномерная непрерывность	29
1.3.4. Теорема Арцела – Асколи	30
1.4. Кривые и области	30
1.4.1. Кривые и контуры	30
1.4.2. Области	36
1.4.3. Многосвязные области	37
Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ	39
2.1. Комплексное дифференцирование	39
2.1.1. Производная и дифференцируемость	39
2.1.2. Правила дифференцирования	40

2.1.3. Условия Коши – Римана	41
2.2. Аналитические функции и конформные отображения	42
2.2.1. Геометрический смысл аргумента производной	42
2.2.2. Геометрический смысл модуля производной	43
2.2.3. Понятие аналитической функции	44
2.3. Дробно-линейные отображения	45
2.3.1. Простейшие свойства	45
2.3.2. Групповое свойство	46
2.3.3. Круговое свойство	47
2.3.4. Свойство симметрии	48
2.3.5. Свойство трех точек	51
2.3.6. Примеры дробно-линейных отображений	52
2.3.7. Функция Жуковского	55
2.4. Элементарные аналитические функции	57
2.4.1. Экспоненциальная функция	57
2.4.2. Тригонометрические и гиперболические функции	58
2.4.3. Логарифмическая функция	60
2.4.4. Степенная функция	63
2.4.5. Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим	63
Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА И ФОРМУЛА КОШИ	65
3.1. Криволинейные интегралы	65
3.1.1. Комплексные криволинейные интегралы	65
3.1.2. Свойства криволинейных интегралов	67
3.2. Интегральная теорема Коши	70
3.2.1. Интегральная теорема	70
3.2.2. Обобщение интегральной теоремы Коши	72
3.2.3. Случай многосвязной области	75
3.2.4. Первообразная аналитической функции	76
3.3. Интегральная формула Коши	79
3.3.1. Интегральная формула	79
3.3.2. Формула среднего значения и принцип максимума	81
3.3.3. Формула Шварца	83
3.3.4. Интеграл типа Коши	85
3.3.5. Теорема Мореры	88
3.3.6. Сопряженные гармонические функции	89

Глава 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ	91
4.1. Ряды Тейлора	91
4.1.1. Основные понятия теории рядов	91
4.1.2. Степенные ряды	93
4.1.3. Радиус сходимости и формула Коши — Адамара	94
4.1.4. Разложение в степенной ряд	97
4.1.5. Эквивалентные описания аналитичности	98
4.2. Теоремы единственности	99
4.2.1. Локальная форма единственности	99
4.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса	100
4.3. Последовательности аналитических функций	100
4.3.1. Сходимость внутри области	100
4.3.2. Принцип счетной компактности	101
4.3.3. Теорема Витали	103
4.3.4. Теорема Вейерштрасса	104
Глава 5. Ряды ЛОРАНА	106
5.1. Разложение в ряд Лорана	106
5.1.1. Ряд Лорана	106
5.1.2. Формулы для коэффициентов разложения	107
5.1.3. Неравенства Коши	110
5.2. Классификация изолированных особых точек	110
5.2.1. Правильные точки функции	110
5.2.2. Полюсы	112
5.2.3. Существенно особые точки	114
5.2.4. Случай бесконечно удаленной точки	115
5.2.5. Теорема Сохоцкого	116
5.2.6. Целые и мероморфные функции	117
Глава 6. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ	119
6.1. Вычеты и основная теорема о вычетах	119
6.1.1. Вычеты	119
6.1.2. Формулы для вычисления вычетов	120
6.1.3. Теорема Коши о вычетах	122
6.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке	123
6.1.5. Теорема о полной сумме вычетов	124

6.2. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения	125
6.2.1. Логарифмический вычет	125
6.2.2. Принцип аргумента	127
6.2.3. Теорема Руше	129
6.2.4. Принцип сохранения области	131
Глава 7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА	133
7.1. Аналитическое продолжение	133
7.1.1. Элемент аналитической функции и его продолжение	133
7.1.2. Принцип симметрии Римана – Шварца	138
7.2. Однолистные функции	141
7.2.1. Теорема о числе прообразов	141
7.2.2. Критерий локальной однолистности	142
7.2.3. Особые точки однолистных функций	145
7.2.4. Последовательности однолистных функций	146
7.3. Конформное отображение областей	146
7.3.1. Автоморфизмы основных областей	146
7.3.2. Теорема Римана	149
7.4. Конформные отображения многоугольников	152
7.4.1. Эллиптические интегралы первого рода	152
7.4.2. Эллиптический синус	156
7.4.3. Формула Кристоффеля – Шварца	157

Часть II. ПРАКТИКА

Глава 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА и действия над ними	160
1.1. Задания для аудиторной работы	160
1.2. Базовые индивидуальные задания	166
1.3. Задания для самостоятельной работы	169
1.4. Задания творческого характера	171
Глава 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ	173
2.1. Задания для аудиторной работы	173
2.2. Базовые индивидуальные задания	178
2.3. Задания для самостоятельной работы	180
2.4. Задания творческого характера	181

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	183
3.1. Задания для аудиторной работы	183
3.2. Базовые индивидуальные задания	190
3.3. Задания для самостоятельной работы	194
3.4. Задания творческого характера	196
Глава 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ	199
4.1. Задания для аудиторной работы	199
4.2. Базовые индивидуальные задания	202
4.3. Задания для самостоятельной работы	204
4.4. Задания творческого характера	205
Глава 5. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ	207
5.1. Задания для аудиторной работы	207
5.2. Базовые индивидуальные задания	212
5.3. Задания для самостоятельной работы	218
5.4. Задания творческого характера	220
Глава 6. ДРОВО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ	221
6.1. Задания для аудиторной работы	221
6.2. Базовые индивидуальные задания	225
6.3. Задания для самостоятельной работы	229
6.4. Задания творческого характера	232
Глава 7. ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО	235
7.1. Задания для аудиторной работы	235
7.2. Базовые индивидуальные задания	238
7.3. Задания для самостоятельной работы	240
7.4. Задания творческого характера	241

Глава 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА и ФОРМУЛА КОШИ	244
8.1. Задания для аудиторной работы	244
8.2. Базовые индивидуальные задания	253
8.3. Задания для самостоятельной работы	260
8.4. Задания творческого характера	267
Глава 9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ	269
9.1. Задания для аудиторной работы	269
9.2. Базовые индивидуальные задания	273
9.3. Задания для самостоятельной работы	278
9.4. Задания творческого характера	281
Глава 10. РЯДЫ ТЕЙЛОРА	283
10.1. Задания для аудиторной работы	283
10.2. Базовые индивидуальные задания	286
10.3. Задания для самостоятельной работы	289
10.4. Задания творческого характера	291
Глава 11. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА ЕДИН- СТВЕННОСТИ	294
11.1. Задания для аудиторной работы	294
11.2. Базовые индивидуальные задания	297
11.3. Задания для самостоятельной работы	299
11.4. Задания творческого характера	301
Глава 12. РЯД ЛОРАНА	303
12.1. Задания для аудиторной работы	303
12.2. Базовые индивидуальные задания	309
12.3. Задания для самостоятельной работы	314
12.4. Задания творческого характера	317

Глава 13. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ	319
13.1. Задания для аудиторной работы	319
13.2. Базовые индивидуальные задания	322
13.3. Задания для самостоятельной работы	325
13.4. Задания творческого характера	327
Глава 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ	331
14.1. Задания для аудиторной работы	331
14.2. Базовые индивидуальные задания	336
14.3. Задания для самостоятельной работы	338
14.4. Задания творческого характера	342
Глава 15. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ	344
15.1. Задания для аудиторной работы	344
15.2. Базовые индивидуальные задания	350
15.3. Задания для самостоятельной работы	355
15.4. Задания творческого характера	358
Глава 16. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ	360
16.1. Задания для аудиторной работы	360
16.2. Базовые индивидуальные задания	363
16.3. Задания для самостоятельной работы	366
16.4. Задания творческого характера	367
Глава 17. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА	369
17.1. Задания для аудиторной работы	369
17.2. Базовые индивидуальные задания	372
17.3. Задания для самостоятельной работы	374
17.4. Задания творческого характера	376

Глава 18. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ, ПРИНЦИП АРГУМЕНТА	378
18.1. Задания для аудиторной работы	378
18.2. Базовые индивидуальные задания	381
18.3. Задания для самостоятельной работы	384
18.4. Задания творческого характера	388
Глава 19. ОТОБРАЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА	390
19.1. Задания для аудиторной работы	390
19.2. Базовые индивидуальные задания	395
19.3. Задания для самостоятельной работы	400
19.4. Задания творческого характера	401
ОТВЕТЫ	403
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	425
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	426
СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	430

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. Множество комплексных чисел

1.1.1. Операции с комплексными числами

Всюду ниже множество всех действительных чисел обозначается общепринятым символом \mathbb{R} .

Определение 1.1. *Множество всех комплексных чисел (комплексная плоскость) \mathbb{C} определяется как совокупность*

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на которой определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Равенство. Две пары $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение. Суммой элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Умножение. Произведением элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Как и в случае действительных чисел, мы чаще будем опускать знак операции умножения (точку) и писать просто $z_1 z_2$ вместо $z_1 \cdot z_2$.

Первый элемент пары $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ будем называть **действительной частью** z , а второй — **мнимой частью** z (основания для этого у нас скоро появятся). Для них используются следующие стандартные обозначения:

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y.$$

Как множество комплексная плоскость \mathbb{C} совпадает с обычной плоскостью \mathbb{R}^2 . Отношение равенства и операция сложения определяются точно так же, как и для \mathbb{R}^2 . Специфика множества комплексных чисел \mathbb{C} начинает проявляться тогда, когда мы вводим умножение. Напомним, что в \mathbb{R}^2 умножение вообще не вводится.

1.1.2. Поле комплексных чисел

Непосредственной проверкой легко убедиться (мы рекомендуем выполнить это самостоятельно), что сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность сложения),

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность сложения),

3) $z + (0, 0) = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$ (элемент $(0, 0)$ является нейтральным элементом для сложения),

4) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ существует противоположный элемент $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ со свойством $z + (-z) = (0, 0)$.

Свойства 1)–4) означают, что \mathbb{C} является коммутативной группой относительно введенной операции сложения.

Умножение комплексных чисел обладает такими свойствами:

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность умножения),

6) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность умножения),

7) $z \cdot (1, 0) = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$ (элемент $(1, 0)$ является нейтральным элементом для умножения),

8) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$, в \mathbb{C} существует обратный элемент

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

со свойством $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$.

Свойства 5)–8) означают, что \mathbb{C} является коммутативной группой относительно введенной операции умножения.

Следующее свойство связывает операции сложения и умножения:

9) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (дистрибутивность).

Полный набор свойств 1)–9) говорит нам о том, что множество комплексных чисел \mathbb{C} с указанными операциями сложения и умножения является полем. Оно называется **полем комплексных чисел** и обозначается тем же символом \mathbb{C} .

1.1.3. Алгебраическая форма записи

Множество действительных чисел \mathbb{R} естественным образом вкладывается в \mathbb{C} . Это делается с помощью взаимно однозначного отображения

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

позволяющего отождествить действительное число $x \in \mathbb{R}$ с комплексным числом $(x, 0) \in \mathbb{C}$.

С точки зрения алгебры такое отождествление вполне правомерно, так как отображение (1.1) является алгебраическим изоморфизмом (биекция, сохраняющая операции) между подполем $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ поля \mathbb{C} и полем действительных чисел \mathbb{R} .

Ниже мы будем систематически использовать такое представление действительных чисел как комплексных и часто вместо $(x, 0)$ будем писать просто x . Таким образом, пара $(0, 0)$ отождествляется нами с действительным числом 0, а пара $(1, 0)$ — с 1. В целесообразности этого мы скоро убедимся.

Рассмотрим еще одно специальное комплексное число $i := (0, 1)$, которое в дальнейшем будет называться **мнимой единицей**. По определению умножения комплексных чисел легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что

$$i^2 = -1.$$

Используя мнимую единицу и наше соглашение об обозначениях для действительных чисел, мы приходим к так называемой **алгебраической (декартовой) форме** записи комплексных чисел

$$x + iy := (x, y). \quad (1.2)$$

В самом деле,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Если $\operatorname{Re} z = 0$, то комплексное число z называется мнимым или, для большей выразительности, **чисто мнимым**. Кроме того, комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется **комплексно-сопряженным** числом для $z = x + iy$.

1.1.4. Тригонометрическая форма записи

Используя полярные координаты на плоскости \mathbb{R}^2 , можно получить другое представление для комплексных чисел. Действительно, для $z = (x, y) \neq 0$ рассмотрим полярные координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.3)$$

где

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0, \quad (1.4)$$

а φ — угол, определяемый системой уравнений

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Число (1.4) называется **модулем** комплексного числа z и обозначается $|z|$. Оно определяется по комплексному числу z вполне однозначно.

Угол φ в (1.3) называется **аргументом** комплексного числа $z \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Он определен не однозначно, а лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — любое целое число. Однако множество $\operatorname{Arg} z$ содержит единственное число, принадлежащее промежутку

$(-\pi, \pi]$, которое называется **главным значением аргумента** и обозначается $\arg z$ ¹. Таким образом,

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

В терминах координат (1.3) можно записать **тригонометрическую форму** комплексного числа:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.5)$$

Из формулы (1.5) нетрудно вывести следующие равенства для натуральных степеней комплексных чисел:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

которые называются **формулами Муавра**. Докажите это самостоятельно, используя индукцию по n .

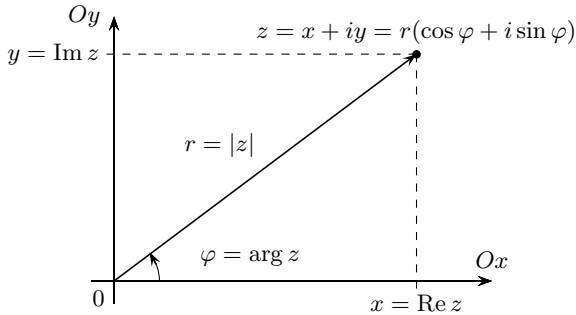


Рис. 1.1

Комплексное число изображается на плоскости точкой или радиусом-вектором, проведенным в эту точку (рис. 1.1).

¹Иногда для выделения главного значения аргумента вместо промежутка $(-\pi, \pi]$ берется $[0, 2\pi)$.

1.2. Расширенная комплексная плоскость

1.2.1. Топология комплексной плоскости

На комплексной плоскости имеется естественное (евклидово) расстояние, определяемое с помощью модуля комплексного числа

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}, \quad z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0, 1).$$

Оно порождает открытые

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

и замкнутые

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

круги с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$.

Относительно введенного расстояния \mathbb{C} является полным метрическим пространством, т.е. любая последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ со свойством²

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N_\varepsilon \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$$

является сходящейся, т.е. существует такое $z \in \mathbb{C}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0.$$

Введем еще обозначения для «проколотых» открытого

$$B^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

и замкнутого

$$\overline{B}^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leq r\}$$

кругов с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$, а также

$$C_r(z_0) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r\}$$

²Напомним, что последовательности с таким свойством называют фундаментальными или последовательностями Коши.

для окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ — границы кругов $B(z_0, r)$ и $\bar{B}(z_0, r)$ (рис. 1.2).

Ниже также используются обозначения

$$\text{dist}(z, A) = \inf\{|z - w| : w \in A\}$$

для расстояния между $z \in \mathbb{C}$ и множеством $A \subset \mathbb{C}$, а также

$$\text{diam}(A) = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in A\}$$

для диаметра множества $A \subset \mathbb{C}$.

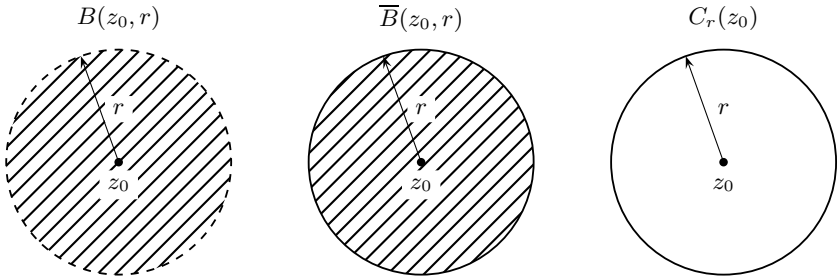


Рис. 1.2

Евклидова метрика порождает естественную топологию на комплексной плоскости \mathbb{C} следующим образом.

Определение 1.2. Точка $z \in A$ множества $A \subset \mathbb{C}$ называется *внутренней* для A , если существует открытый круг $B(z, r)$ положительного радиуса $r > 0$ с центром в этой точке, содержащийся в A .

Определение 1.3. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними для него.

ТЕОРЕМА 1.1 (свойства открытых множеств). Семейство открытых множеств в \mathbb{C} обладает следующими свойствами:

- 1) множества \mathbb{C} и \emptyset открыты,
- 2) для любого семейства открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ их объединение $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ открыто,

3) любое пересечение $\bigcap_{k=1}^n G_k$ конечного числа открытых множеств G_k ($k = 1, 2, \dots, n$) открыто.

Определение 1.4. *Окрестностью точки $z \in \mathbb{C}$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Если $G \subset X$ — окрестность точки $x \in X$, то $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется **проколотой** окрестностью этой точки.*

Ясно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки.

Определение 1.5. *Точка $z \in \mathbb{C}$ называется **предельной** для множества $A \subset \mathbb{C}$, если в любой проколотой окрестности x есть точки из A .*

Другими словами, это означает, что в любой окрестности точки z есть точки из A , отличные от z . Подчеркнем, что здесь не требуется принадлежности точки z множеству A . Множество всех предельных точек для A обозначается A' .

Точка $z \in \mathbb{C}$ является предельной для множества $A \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность различных точек $\{z_n\} \subset A$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0,$$

а также тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки z бесконечно много точек из A .

Точки множества, не являющиеся предельными для него, называются **изолированными** точками множества.

Определение 1.6. *Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.*

ТЕОРЕМА 1.2 (принцип двойственности). *Множество $A \subset \mathbb{C}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ открыто.*

Определение 1.7. *Замыканием множества A называется множество $\bar{A} = A \cup A'$.*

Границей множества A в метрическом пространстве называется множество

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}. \quad (1.7)$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются **граничными** для него.

Точка x является граничной тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из A и из A^c .

Определение 1.8. *Непустое множество в \mathbb{C} называется **ограниченным**, если оно содержится в некотором круге.*

1.2.2. Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется **открытым покрытием** множества A , если все множества G_α , $\alpha \in I$, открыты и

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Другими словами, это означает, что каждая точка z множества A принадлежит по крайней мере одному из множеств G_α .

Определение 1.9. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется **компактным** или **компактом**, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие.*

ТЕОРЕМА 1.3. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

1.2.3. Связность

Определение 1.10. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется **связным**, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset \mathbb{C}$ и $G_2 \subset \mathbb{C}$, что*

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad A \cap G_1 \neq \emptyset, \quad A \cap G_2 \neq \emptyset, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

Другими словами, связность означает, что множество нельзя разбить на непустые части, содержащиеся в непересекающихся открытых множествах.

1.2.4. Стереографическая проекция

Потребности теории функций комплексного переменного обуславливают необходимость расширения комплексной плоскости \mathbb{C} , получающегося из последней добавлением нового элемента — бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Для наглядного представления расширенной комплексной плоскости Риман предложил использовать способ (компактификация Римана), который сейчас будет описан.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, \omega) : x, y, \omega \in \mathbb{R}\}$$

и будем отождествлять комплексную плоскость \mathbb{C} с подмножеством в \mathbb{R}^3 с помощью взаимно однозначного отображения

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Введем так называемую **сферу Римана** (рис. 1.3)

$$S = \left\{ (x, y, \omega) : x^2 + y^2 + \left(\omega - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Соединим «северный полюс» сферы Римана — точку $P(0, 0, 1)$ — с точкой z отрезком

$$\Gamma_z = \{(tx, ty, 1 - t) : t \in [0, 1]\}.$$

Если $z \neq 0$, то этот отрезок имеет единственную общую точку с S и соответствующее значение $t = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что эта точка есть

$$z' = \left(\frac{x}{|z|^2 + 1}, \frac{y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Будем называть ее **стереографической проекцией** z . Стереографической проекцией точки $z = 0$ является «южный полюс» сферы Римана $(0, 0, 0)$.

Таким образом, $S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ взаимно однозначно отображается на комплексную плоскость \mathbb{C} . «Северный полюс» сферы Римана $(0, 0, 1)$ оказался при этом незадействованным. Сопоставим точке