ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Для студентов
учреждений высшего образования

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73
Т33

А в т о р ы: *В. Г. Кротов*, *Е. А. Ровба*, *А. П. Старовойтов*, *Е. А. Сетько*, *К. А. Смотрицкий*

Р е ц е н з е н т ы: кафедра математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (доцент кафедры кандидат физико-математических наук *Н. В. Гриб*; заведующий кафедрой доцент *И. Н. Гуло*); заведующий отделом нелинейного и стохастического анализа Института математики Национальной академии наук Беларуси, член корреспондент Национальной академии наук Беларуси доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Гороховик*

Т33 **Теория функций комплексного переменного** : учебное пособие / В. Г. Кротов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 431 с. : ил.
ISBN 978-985-06-3071-1.

В соответствии с действующими программами изложен материал по дисциплинам «Теория функций комплексного переменного» и «Дополнительные главы теории функций», изучаемым на математических специальностях учреждений высшего образования Республики Беларусь.

Содержится теоретический материал, излагаемый в лекциях, а также четырехуровневый набор заданий для практических и лабораторных занятий (задания для аудиторной работы, базовые индивидуальные задания, задания для самостоятельной работы и задания творческого характера).

Для студентов и преподавателей. Также может быть использовано магистрантами, аспирантами и научными работниками, интересующимися комплексным анализом и его приложениями.

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я73

ISBN 978-985-06-3071-1

Оглавление

Часть I. Теория

Часть II. Практика

Глава 1

Введение в комплексный анализ

1.1. Множество комплексных чисел

1.1.1. Операции с комплексными числами

Всюду ниже множество всех действительных чисел обозначается общепринятым символом $\mathbb{R}$.

Определение 1.1. *__Множество всех комплексных чисел (комплексная плоскость)__ $\mathbb{C}$ определяется как совокупность*

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на которой определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Равенство. Две пары $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение. Суммой элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Умножение. Произведением элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Как и в случае действительных чисел, мы чаще будем опускать знак операции умножения (точку) и писать просто $z_1 z_2$ вместо $z_1 \cdot z_2$.

Первый элемент пары $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ будем называть **действительной частью** z, а второй — **мнимой частью** z (основания для этого у нас скоро появятся). Для них используются следующие стандартные обозначения:

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y.$$

Как множество комплексная плоскость $\mathbb{C}$ совпадает с обычной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Отношение равенства и операция сложения определяются точно так же, как и для $\mathbb{R}^2$. Специфика множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ начинает проявляться тогда, когда мы вводим умножение. Напомним, что в $\mathbb{R}^2$ умножение вообще не вводится.

1.1.2. Поле комплексных чисел

Непосредственной проверкой легко убедиться (мы рекомендуем выполнить это самостоятельно), что сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность сложения),

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность сложения),

3) $z + (0, 0) = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$ (элемент $(0, 0)$ является нейтральным элементом для сложения),

4) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ существует противоположный элемент $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ со свойством $z + (-z) = (0, 0)$.

Свойства 1)–4) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции сложения.

Умножение комплексных чисел обладает такими свойствами:

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность умножения),

6) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность умножения),

7) $z \cdot (1, 0) = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$ (элемент $(1, 0)$ является нейтральным элементом для умножения),

8) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$, в $\mathbb{C}$ существует обратный элемент

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

со свойством $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$.

Свойства 5)–8) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции умножения.

Следующее свойство связывает операции сложения и умножения:

9) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (дистрибутивность).

Полный набор свойств 1)–9) говорит нам о том, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с указанными операциями сложения и умножения является полем. Оно называется **полем комплексных чисел** и обозначается тем же символом $\mathbb{C}$.

1.1.3. Алгебраическая форма записи

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{C}$. Это делается с помощью взаимно однозначного отображения

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

позволяющего отождествить действительное число $x \in \mathbb{R}$ с комплексным числом $(x, 0) \in \mathbb{C}$.

С точки зрения алгебры такое отождествление вполне правомерно, так как отображение (1.1) является алгебраическим изоморфизмом (биекция, сохраняющая операции) между подполем $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ поля $\mathbb{C}$ и полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Ниже мы будем систематически использовать такое представление действительных чисел как комплексных и часто вместо $(x, 0)$ будем писать просто x. Таким образом, пара $(0, 0)$ отождествляется нами с действительным числом 0, а пара $(1, 0)$ — с 1. В целесообразности этого мы скоро убедимся.

Рассмотрим еще одно специальное комплексное число $i := (0, 1)$, которое в дальнейшем будет называться **мнимой единицей**. По определению умножения комплексных чисел легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что

$$i^2 = -1.$$

Используя мнимую единицу и наше соглашение об обозначениях для действительных чисел, мы приходим к так называемой **алгебраической (декартовой) форме** записи комплексных чисел

$$x + iy := (x, y). \tag{1.2}$$

В самом деле,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Если $\operatorname{Re} z = 0$, то комплексное число z называется мнимым или, для большей выразительности, **чисто мнимым**. Кроме того, комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется **комплексно-сопряженным** числом для $z = x + iy$.

1.1.4. Тригонометрическая форма записи

Используя полярные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, можно получить другое представление для комплексных чисел. Действительно, для $z = (x, y) \neq 0$ рассмотрим полярные координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0, \tag{1.4}$$

а φ — угол, определяемый системой уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Число (1.4) называется **модулем** комплексного числа z и обозначается $|z|$. Оно определяется по комплексному числу z вполне однозначно.

Угол φ в (1.3) называется **аргументом** комплексного числа $z \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Он определен не однозначно, а лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — любое целое число. Однако множество $\operatorname{Arg} z$ содержит единственное число, принадлежащее промежутку

$(-\pi, \pi]$, которое называется **главным значением аргумента** и обозначается $\arg z$ [1]. Таким образом,

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

В терминах координат (1.3) можно записать **тригонометрическую форму** комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.5}$$

Из формулы (1.5) нетрудно вывести следующие равенства для натуральных степеней комплексных чисел:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

которые называются **формулами Муавра**. Докажите это самостоятельно, используя индукцию по n.

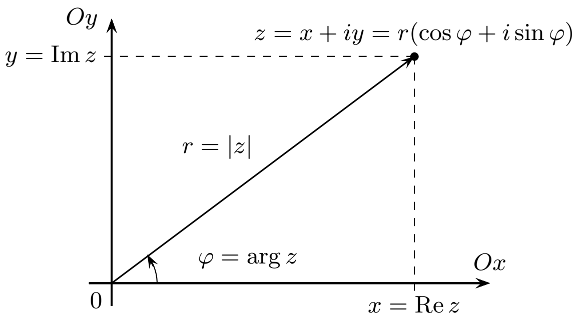

Рис. 1.1

Комплексное число изображается на плоскости точкой или радиусом-вектором, проведенным в эту точку (рис. 1.1).

[1] Иногда для выделения главного значения аргумента вместо промежутка $(-\pi, \pi]$ берется $[0, 2\pi)$.

1.2. Расширенная комплексная плоскость

1.2.1. Топология комплексной плоскости

На комплексной плоскости имеется естественное (евклидово) расстояние, определяемое с помощью модуля комплексного числа

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}, \quad z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0, 1).$$

Оно порождает открытые

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

и замкнутые

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$$

круги с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$.

Относительно введенного расстояния $\mathbb{C}$ является полным метрическим пространством, т.е. любая последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ со свойством[2]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N_\varepsilon \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$$

является сходящейся, т.е. существует такое $z \in \mathbb{C}$, что

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0.$$

Введем еще обозначения для «проколотых» открытого

$$B^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

и замкнутого

$$\overline{B}^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leqslant r\}$$

кругов с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$, а также

$$C_r(z_0) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r\}$$

[2]Напомним, что последовательности с таким свойством называют фундаментальными или последовательностями Коши.

для окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ — границы кругов $B(z_0, r)$ и $\overline{B}(z_0, r)$ (рис. 1.2).

Ниже также используются обозначения

$$\operatorname{dist}(z, A) = \inf\{|z - w| : w \in A\}$$

для расстояния между $z \in \mathbb{C}$ и множеством $A \subset \mathbb{C}$, а также

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in A\}$$

для диаметра множества $A \subset \mathbb{C}$.

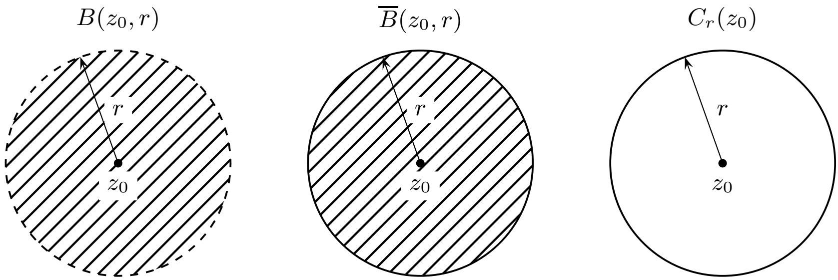

Рис. 1.2

Евклидова метрика порождает естественную топологию на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующим образом.

Определение 1.2. *Точка $z \in A$ множества $A \subset \mathbb{C}$ называется* ***внутренней*** *для A, если существует открытый круг $B(z, r)$ положительного радиуса $r > 0$ с центром в этой точке, содержащийся в A.*

Определение 1.3. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется* ***открытым****, если все его точки являются внутренними для него.*

Теорема 1.1 (свойства открытых множеств). *Семейство открытых множеств в $\mathbb{C}$ обладает следующими свойствами:*

1) *множества $\mathbb{C}$ и $\varnothing$ открыты,*

2) *для любого семейства открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ их объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ открыто,*

3) *любое пересечение* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ *конечного числа открытых множеств* G_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *открыто.*

Определение 1.4. ***Окрестностью точки*** $z \in \mathbb{C}$ *называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Если* $G \subset X$ *— окрестность точки* $x \in X$*, то* $G^\circ = G \setminus \{x\}$ *называется* ***проколотой*** *окрестностью этой точки.*

Ясно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки.

Определение 1.5. *Точка* $z \in \mathbb{C}$ *называется* ***предельной*** *для множества* $A \subset \mathbb{C}$*, если в любой проколотой окрестности* x *есть точки из* A*.*

Другими словами, это означает, что в любой окрестности точки z есть точки из A, отличные от z. Подчеркнем, что здесь не требуется принадлежности точки z множеству A. Множество всех предельных точек для A обозначается A'.

Точка $z \in \mathbb{C}$ является предельной для множества $A \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность различных точек $\{z_n\} \subset A$, что

$$\lim_{n \to \infty} |z - z_n| = 0,$$

а также тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки z бесконечно много точек из A.

Точки множества, не являющиеся предельными для него, называются **изолированными** точками множества.

Определение 1.6. *Множество называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои предельные точки.*

Теорема 1.2 (принцип двойственности). *Множество* $A \subset \mathbb{C}$ *замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение* $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ *открыто.*

Определение 1.7. ***Замыканием*** *множества* A *называется множество* $\overline{A} = A \cup A'$*.*

Границей *множества* A *в метрическом пространстве называется множество*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}. \qquad (1.7)$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются ***граничными*** *для него.*

Точка x является граничной тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из A и из A^c.

Определение 1.8. *Непустое множество в $\mathbb{C}$ называется* ***ограниченным****, если оно содержится в некотором круге.*

1.2.2. Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется **открытым покрытием** множества A, если все множества G_α, $\alpha \in I$, открыты и

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha.$$

Другими словами, это означает, что каждая точка z множества A принадлежит по крайней мере одному из множеств G_α.

Определение 1.9. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется* ***компактным*** *или* ***компактом****, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие.*

Теорема 1.3. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

1.2.3. Связность

Определение 1.10. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется* ***связным****, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset \mathbb{C}$ и $G_2 \subset \mathbb{C}$, что*

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

Другими словами, связность означает, что множество нельзя разбить на непустые части, содержащиеся в непересекающихся открытых множествах.

1.2.4. Стереографическая проекция

Потребности теории функций комплексного переменного обуславливают необходимость расширения комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающегося из последней добавлением нового элемента — бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Для наглядного представления расширенной комплексной плоскости Риман предложил использовать способ (компактификация Римана), который сейчас будет описан.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, \omega) : x, y, \omega \in \mathbb{R}\}$$

и будем отождествлять комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с подмножеством в $\mathbb{R}^3$ с помощью взаимно однозначного отображения

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Введем так называемую **сферу Римана** (рис. 1.3)

$$S = \left\{(x, y, \omega) : x^2 + y^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Соединим «северный полюс» сферы Римана — точку $P(0, 0, 1)$ — с точкой z отрезком

$$\Gamma_z = \{(tx, ty, 1 - t) : t \in [0, 1]\}.$$

Если $z \neq 0$, то этот отрезок имеет единственную общую точку с S и соответствующее значение $t = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что эта точка есть

$$z' = \left(\frac{x}{|z|^2 + 1}, \frac{y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}\right).$$

Будем называть ее **стереографической проекцией** z. Стереографической проекцией точки $z = 0$ является «южный полюс» сферы Римана $(0, 0, 0)$.

Таким образом, $S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ взаимно однозначно отображается на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. «Северный полюс» сферы Римана $(0, 0, 1)$ оказался при этом незадействованным. Сопоставим точке