№ 831

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ
Технологический университет
МИСиС

Кафедра теоретической физики

Ю.Х. Векилов, С.И. Мухин, Ю.М. Кузьмин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Классическая механика

Учебное пособие

для студентов специальностей 110500, 070900

Рекомендовано редакционно-издательским
советом института

МОСКВА 2002

УДК 531.01
В26

В26 *Векилов Ю.Х., Мухин С.И., Кузьмин Ю.М.* Теоретическая физика: Классическая механика: Учеб. пособие – М.: МИСиС, 2002. – 59 с.

В пособии изложены основные положения классической механики и методы решения типовых задач. Пособие должно помочь студентам в усвоении лекционной программы и в приобретении навыков решения задач.

Предназначено для изучения курса «Теоретическая физика», раздел «Классическая механика» студентами физико-химического факультета специальностей 110500 и 070900. Пособие будет также полезно студентам факультета полупроводниковых материалов и приборов и вечернего факультета при изучении курса «Классическая механика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Траектории частиц механической системы описываются набором обобщенных координат $z_1(t)$, ..., $z_N(t)$.

Лагранжиан механической системы $L(z_i(t),\ \dot{z}_i(t),\ t)$ зависит от координат $z_1(t)$, ..., $z_N(t)$ и связанных с ними скоростей $\dot{z}_1(t)$, ..., $\dot{z}_N(t)$ и определяет динамику системы. Точки над символами обозначают производную по времени, d/dt. Лагранжиан $L(z_i(t),\ \dot{z}_i(t),\ t)$ является функцией от скоростей $\dot{z}_i(t)$, степень которой не выше второй.

Интеграл по времени от лагранжиана вдоль произвольной траектории системы, определяемой некоторой совокупностью функций координат частиц $z_1(t)$, ..., $z_N(t)$, задает функционал $S[z_i]$, называемый *действием* на заданной траектории системы между моментами времени t_a и t_b:

$$S\,[z_i] = \int_{t_a}^{t_b} L(z_i(t), \dot{z}_i(t), t)dt \tag{1.1}$$

Согласно *принципу наименьшего действия Гамильтона* механическая система реально движется по траектории с координатами $z_1(t)$, ..., $z_N(t)$, на которой действие $S[z_i]$ минимально.

Непосредственная (прямая) минимизация действия производится на определенном классе пробных траекторий, согласно описанному ниже способу в **задаче 1.1.** Непрямая минимизация действия производится методом Эйлера, с помощью которого получаем в данном случае дифференциальные уравнения Лагранжа, как описано в разде. 2.1.

Задача 1.1. Частица в поле $U(z)= -Fz$ за время τ перемещается из точки $z = 0$ в точку $z = a$. Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид
$z(t) = At^2 + Bt + C$, и подбирая коэффициенты A, B, и C такие, чтобы действие имело наименьшее значение.

Решение

Полагая $z = 0$ при $t = 0$, находим $C = 0$, и из условия $z = A$ при $t = \tau$ находим
$B = A/\tau - A\tau$.

Используя функцию $z(t)=At^2 + (a/\tau - A\tau)t$, вычисляем действие:

$$S = \int_0^\tau L(z,\ \dot z\,)dt = \int_0^\tau \left[\frac{m\dot z^2}{2} - U(z)\right]dt = mA^2\tau^3/6 + ma^2/(2\tau) -$$
$$- FA\tau^3/6 + Fa\tau/2. \qquad (1.2)$$

Из условия $\delta S / \delta A = 0$, определяющего минимум действия, находим $A = F/\sqrt{2m}$. Очевидно, что закон движения:

$$z(t) = Ft^2/\sqrt{2m} + (a/\tau - F\tau/\sqrt{2m}\,)t \qquad (1.3)$$

в данном случае является точным. Однако приведенное решение задачи позволяет утверждать лишь то, что при найденном законе движения действие принимает наименьшее значение по сравнению с таковым при движении по любой другой траектории предложенного вида.