

№ 831

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ СТАЛИ и СПЛАВОВ  
Технологический университет



Кафедра теоретической физики

**Ю.Х. Векилов, С.И. Мухин, Ю.М. Кузьмин**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

*Классическая механика*

**Учебное пособие**

для студентов специальностей 110500, 070900

Рекомендовано редакционно-издательским  
советом института

МОСКВА 2002

УДК 531.01

B26

B26 *Векилов Ю.Х., Мухин С.И., Кузьмин Ю.М.* Теоретическая физика: Классическая механика: Учеб. пособие – М.: МИСиС, 2002. – 59 с.

В пособии изложены основные положения классической механики и методы решения типовых задач. Пособие должно помочь студентам в усвоении лекционной программы и в приобретении навыков решения задач.

Предназначено для изучения курса «Теоретическая физика», раздел «Классическая механика» студентами физико-химического факультета специальностей 110500 и 070900. Пособие будет также полезно студентам факультета полупроводниковых материалов и приборов и вечернего факультета при изучении курса «Классическая механика».

© Московский государственный  
институт стали и сплавов  
(Технологический университет)  
(МИСиС), 2002

# ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Общие принципы классической механики .....	4
2. Уравнение Лагранжа. Принцип относительности Галилея. Интегралы движения .....	6
Задачи .....	9
3. Интегрирование уравнений движения лагранжа .....	11
3.1. Движение частицы в одномерном потенциальном поле .....	11
3.2. Движение частицы в центральном поле. Задача Кеплера .....	15
Задачи .....	16
3.3. Рассеяние частиц. Формула Резерфорда .....	20
Задачи .....	22
4. Малые колебания .....	24
4.1. Свободные одномерные колебания. Колебания систем со многими степенями свободы. Вынужденные колебания. Резонанс .....	24
Задачи .....	27
4.2. Затухающие колебания .....	46
Задачи .....	48
5. Метод гамильтона в классической механике .....	50
5.1. Уравнения движения Гамильтона. Скобки Пуассона .....	50
5.2. Канонические преобразования .....	51
Задачи .....	52
5.3. Уравнение движения Гамильтона – Якоби .....	53
Задачи .....	54
5.4. Адиабатические инварианты .....	54
Задачи .....	55
Библиографический список .....	58

# 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Траектории частиц механической системы описываются набором обобщенных координат  $z_1(t), \dots, z_N(t)$ .

Лагранжиан механической системы  $L(z_i(t), \dot{z}_i(t), t)$  зависит от координат  $z_1(t), \dots, z_N(t)$  и связанных с ними скоростей  $\dot{z}_1(t), \dots, \dot{z}_N(t)$  и определяет динамику системы. Точки над символами обозначают производную по времени,  $d/dt$ . Лагранжиан  $L(z_i(t), \dot{z}_i(t), t)$  является функцией от скоростей  $\dot{z}_i(t)$ , степень которой не выше второй.

Интеграл по времени от лагранжиана вдоль произвольной траектории системы, определяемой некоторой совокупностью функций координат частиц  $z_1(t), \dots, z_N(t)$ , задает функционал  $S[z_i]$ , называемый *действием* на заданной траектории системы между моментами времени  $t_a$  и  $t_b$ :

$$S[z_i] = \int_{t_a}^{t_b} L(z_i(t), \dot{z}_i(t), t) dt \quad (1.1)$$

Согласно *принципу наименьшего действия Гамильтона* механическая система реально движется по траектории с координатами  $z_1(t), \dots, z_N(t)$ , на которой действие  $S[z_i]$  минимально.

Непосредственная (прямая) минимизация действия производится на определенном классе пробных траекторий, согласно описанному ниже способу в **задаче 1.1**. Непрямая минимизация действия производится методом Эйлера, с помощью которого получаем в данном случае дифференциальные уравнения Лагранжа, как описано в разд. 2.1.

**Задача 1.1.** Частица в поле  $U(z) = -Fz$  за время  $\tau$  перемещается из точки  $z = 0$  в точку  $z = a$ . Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид  $z(t) = At^2 + Bt + C$ , и подбирая коэффициенты  $A$ ,  $B$ , и  $C$  такие, чтобы действие имело наименьшее значение.

### **Решение**

Полагая  $z = 0$  при  $t = 0$ , находим  $C = 0$ , и из условия  $z = A$  при  $t = \tau$  находим

$$B = A/\tau - A\tau.$$

Используя функцию  $z(t) = At^2 + (a/\tau - A\tau)t$ , вычисляем действие:

$$S = \int_0^\tau L(z, \dot{z}) dt = \int_0^\tau \left[ \frac{m\dot{z}^2}{2} - U(z) \right] dt = mA^2\tau^3/6 + ma^2/(2\tau) - FA\tau^3/6 + Fa\tau/2. \quad (1.2)$$

Из условия  $\delta S / \delta A = 0$ , определяющего минимум действия, находим  $A = F / \sqrt{2m}$ . Очевидно, что закон движения:

$$z(t) = Ft^2/\sqrt{2m} + (a/\tau - F\tau/\sqrt{2m})t \quad (1.3)$$

в данном случае является точным. Однако приведенное решение задачи позволяет утверждать лишь то, что при найденном законе движения действие принимает наименьшее значение по сравнению с таковым при движении по любой другой траектории предложенного вида.