

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

В.Н. Шинкин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА для металлургов

Учебник

Допущено учебно-методическим объединением
по образованию в области металлургии в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению Металлургия

Москва 2012

УДК 531
Ш62

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *Ю.И. Бурчаков* (зав. кафедрой сопротивления материалов Московского государственного горного университета);
д-р техн. наук, проф. *С.К. Карцов* (профессор кафедры строительной механики Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета)

Шинкин, В.Н.

Ш62 Теоретическая механика для металлургов : учеб. / В.Н. Шинкин. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2012. – 679 с.
ISBN 978-5-87623-578-7

В учебнике рассмотрены основные теоретические и практические вопросы статики металлоконструкций, кинематики металлургических механизмов, динамики материальной системы и аналитической механики. Подробно разобраны решения большого числа задач. Приведены многочисленные контрольные работы, домашние задания, тесты и элементы интернет-экзамена, закрепляющие материал. Все темы изложены с учетом специфики металлургических процессов.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 150100 «Металлургия».

УДК 531

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	9
Статика	12
1. Основные понятия статики.....	12
1.1. Главный вектор системы сил.....	12
1.2. Момент силы относительно точки и оси.....	13
1.3. Аксиомы статики.....	16
1.4. Опоры и их реакции.....	18
1.5. Теорема Вариньона.....	19
2. Основная теорема статики (теорема Пуансо).....	20
2.1. Теорема Пуансо.....	20
2.2. Приведение плоской системы сил к простейшему виду.....	22
2.3. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду.....	23
3. Равновесие системы сил, расположенных на плоскости.....	26
3.1. Примеры на равновесие твердого тела под действием плоской системы параллельных сил.....	26
3.2. Примеры на равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил.....	30
4. Равновесие системы твердых тел.....	37
4.1. Составные конструкции.....	37
4.2. Примеры на определение реакций опор системы двух тел под действием произвольной плоской системы сил.....	37
5. Равновесие твердых тел при наличии трения.....	47
5.1. Сцепление и сопротивление качению.....	47
5.2. Примеры на равновесие твердого тела при наличии сил сцепления.....	50
5.3. Примеры на равновесие твердого тела при наличии трения качения.....	55
6. Равновесие системы сил, произвольно расположенных в пространстве.....	57
7. Система сходящихся сил.....	67
7.1. Теоремы о сходящихся силах.....	67
7.2. Примеры расчета систем сходящихся сил.....	68
8. Расчет плоских ферм.....	77
8.1. Общие сведения о плоских фермах.....	77
8.2. Расчет плоских ферм методом вырезания узлов.....	78
8.3. Расчет плоских ферм методом сечений (методом Риттера).....	87

9. Центр параллельных сил и центр тяжести	94
9.1. Центр параллельных сил	94
9.2. Центр тяжести тела	95
9.3. Центр тяжести оболочки (поверхности)	96
9.4. Центр тяжести бруса (стержня)	97
9.5. Методы нахождения центра тяжести	98
9.6. Центры тяжести простейших фигур.....	99
9.7. Определение центра тяжести системы твердых тел, для каждого из которых известны вес и положение центра тяжести	103
9.8. Определение центра тяжести тела, составленного из однородных тонких стержней постоянного поперечного сечения.....	107
9.9. Определение центра тяжести площади плоской фигуры (однородной тонкой плоской пластинки)	111
9.10. Определение центра тяжести однородного объемного твердого тела	116
9.11. Определение центра тяжести неоднородного объемного твердого тела	124
10. Тест на знание реакций связей	129
11. Контрольное задание по статике плоских металлоконструкций	134
12. Контрольная работа по статике.....	140
13. Домашние задания по статике.....	158
13.1. Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы	158
13.2. Определение реакций опор жесткой рамы	163
13.3. Определение реакций опор системы двух тел.....	168
13.4. Определение реакций опор пространственной конструкции.....	174
13.5. Определение положения центра тяжести тела	179
Кинематика	185
14. Основные понятия кинематики.....	185
14.1. Декартова прямолинейная система координат. Абсолютная скорость и ускорение точки	185
14.2. Цилиндрическая система координат	186
14.3. Полярная система координат	187
14.4. Сферическая система координат	187

14.5. Естественные координатные оси. Проекция скорости и ускорения точки на естественные оси.....	188
14.6. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела.....	189
15. Способы задания движения точки	191
16. Сложное движение точки. Теорема Кориолиса.....	202
16.1. Проекция вектора угловой скорости на подвижные оси координат	202
16.2. Локальная производная вектора в подвижной системе координат	204
16.3. Сложное движение точки	206
16.4. Теорема Кориолиса	207
16.5. Примеры определения скорости и ускорения точки в сложном движении.....	208
17. Основные движения твердого тела	219
17.1. Поступательное движение твердого тела	219
17.2. Вращательное движение твердого тела.....	220
17.3. Примеры на поступательное и вращательное движения твердого тела.....	221
17.4. Примеры определения кинематических характеристик звеньев кулисного механизма	227
17.5. Примеры определения угловых скоростей звеньев планетарного механизма.....	232
17.6. Сферическое движение твердого тела.....	239
17.7. Примеры на сферическое движение твердого тела.....	241
17.8. Плоскопараллельное движение твердого тела	247
17.9. Мгновенные центры скоростей и ускорений при плоском движении твердого тела.....	248
17.10. Примеры определения кинематических характеристик твердого тела и его точек при плоском движении	250
18. Тест на знание уравнений движения точки и твердого тела	261
19. Тест на умение определять положение МЦС плоской фигуры	264
20. Контрольное задание по кинематике планетарных редукторов.....	272
21. Контрольная работа по кинематике	280
22. Домашние задания по кинематике.....	297
22.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения.....	297
22.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях	298

22.3. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае плоского переносного движения.....	304
22.4. Определение кинематических характеристик твердого тела и его точек при плоском движении	309
Динамика материальной системы и твердого тела	315
23. Геометрия масс	315
23.1. Момент инерции твердого тела	315
23.2. Моменты инерции простейших однородных фигур.....	317
23.3. Моменты инерции тела относительно двух осей.....	324
23.4. Примеры вычисления моментов инерции тела относительно произвольных осей.....	329
24. Динамика материальной системы.....	335
24.1. Основные законы и принципы динамики	335
24.2. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки.....	335
24.3. Центр масс материальной системы	346
24.4. Количество движения материальной системы	347
24.5. Примеры применения теоремы об изменении количества движения	349
24.6. Теорема о движении центра масс материальной системы....	357
24.7. Примеры применения теоремы о движении центра масс	358
24.8. Момент количества движения материальной системы	368
24.9. Примеры применения теоремы об изменении кинетического момента материальной системы	373
24.10. Примеры решения задач с использованием дифференциальных уравнений движения твердого тела	381
24.11. Кинетическая энергия материальной системы.....	389
24.12. Примеры вычисления кинетической энергии материальной системы.....	394
24.13. Элементарная работа силы.....	400
24.14. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы.....	401
24.15. Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии.....	402
24.16. Закон сохранения полной механической энергии материальной системы.....	411
25. Принцип Даламбера	414
25.1. Принцип Даламбера для материальной системы.....	414
25.2. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела	416
25.3. Примеры применения принципа Даламбера	419

26. Тест на определение динамических характеристик твердого тела.....	431
27. Контрольные работы по динамике материальной системы	437
27.1. Задачи на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения к исследованию движения материальной системы	437
27.2. Задачи на применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела.....	442
27.3. Задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения материальной системы	449
27.4. Задачи на применение принципа Даламбера к определению реакций опор при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси	455
28. Домашние задания по динамике материальной системы	462
28.1. Теорема о движении центра масс механической системы	462
28.2. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.....	467
28.3. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.....	473
28.4. Поступательное и вращательное движения твердого тела.....	478
28.5. Принцип Даламбера и реакции опор при вращательном движении тела.....	484
Аналитическая механика.....	490
29. Аналитическая статика	490
29.1. Удерживающие, стационарные и голономные связи.....	490
29.2. Виртуальные перемещения и идеальные связи	490
29.3. Принцип виртуальных перемещений Лагранжа.....	494
29.4. Примеры применения принципа виртуальных перемещений к исследованию равновесия механической системы	495
29.5. Примеры применения принципа виртуальных перемещений к определению реакций опор составной конструкции	504
29.6. Обобщенные координаты и обобщенные силы.....	516
29.7. Примеры применения условий равновесия в обобщенных силах	517
30. Общее уравнение динамики	524

31. Аналитическая динамика.....	534
31.1. Уравнения Лагранжа второго рода.....	534
31.2. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения системы с одной степенью свободы	536
31.3. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения системы с двумя степенями свободы	548
31.4. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы	557
31.5. Уравнения Гамильтона для консервативной системы.....	567
32. Тест на определение возможных перемещений механической системы.....	576
33. Контрольные работы по аналитической механике.....	583
33.1. Задачи на применение принципа возможных перемещений к определению условий равновесия механической системы.....	583
33.2. Задачи на применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы	589
33.3. Задачи на применение уравнения Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы	595
34. Домашние задания по аналитической механике	602
34.1. Принцип возможных перемещений и равновесие механической системы	602
34.2. Принцип возможных перемещений и реакции опор составной конструкции.....	607
34.3. Общее уравнение динамики для механической системы с одной степенью свободы	612
34.4. Уравнения Лагранжа II рода и программное движение манипулятора.....	618
34.5. Уравнения Лагранжа II рода для системы с двумя степенями свободы.....	624
35. Элементы интернет-экзамена	630
36. Опорный конспект лекций по теоретической механике для студентов-заочников	647
Библиографический список.....	678

Предисловие

Механика является одной из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлено потребностями практики. Так начала развития механики были тесно связаны с развитием земледелия (поднимание воды для орошения земельных участков в Египте), с ростом городов, возведением крупных построек, развитием ремесел и мореплаванием. Уже при постройке египетских пирамид применялись простейшие механические приспособления: рычаги, блоки и наклонная плоскость. Однако, хотя в древние времена человечество обладало некоторыми эмпирическими знаниями по механике, потребовался значительный многовековой период времени для того, чтобы установить основные законы механики и заложить фундамент этой науки.

Основоположителем механики как науки является знаменитый древнегреческий ученый **Архимед** (287–212 гг. до н.э.). Он дал точное решение задачи о равновесии сил, приложенных к рычагу, создал учение о центре тяжести тел, открыл и сформулировал закон о гидростатическом давлении жидкости на погруженное в нее тело (закон Архимеда).

На первой стадии развития механики, от древнего мира до эпохи XIV в., в результате изучения простейших машин создается учение о силах. Но быстрое и успешное развитие механики начинается лишь с эпохи Возрождения, когда были созданы благоприятные условия для развития науки и техники и заложены основы для мировой торговли и перехода ремесла в мануфактуру, которая послужила исходным пунктом для современной крупной промышленности. В этот период для решения практических задач требуются исследования движения тел и на основе накопленного за четыре столетия опыта к концу XVII в. создаются основы механики материальных тел.

Блестящим представителем эпохи Возрождения является гениальный итальянский художник, физик, механик и инженер **Леонардо да Винчи** (1451–1519). В области механики он изучил движение падающего тела, движение тела по наклонной плоскости, явление трения и ввел понятие момента силы.

Зарождение небесной механики (науки о движении небесных тел) связано с великим открытием **Николая Коперника** (1473–1543) – создателя гелиоцентрической системы мира, сменившей геоцентри-

ческую систему Птолемея. Это открытие произвело переворот в научном мировоззрении той эпохи и освободило естествознание от теологии. На основании учения Коперника и астрономических наблюдений **Кеплер** (1571–1630) сформулировал три закона движения планет.

Создание основ динамики принадлежит великим ученым – итальянскому **Галилео Галилею** (1564–1842) и англичанину **Исааку Ньютону** (1643–1727), открывшему всемирный закон тяготения. В знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) Ньютон в систематическом виде изложил основные законы классической механики.

XVIII в. характеризовался разработкой общих принципов классической механики и важнейшими исследованиями по механике твердого тела, гидродинамике и небесной механике. Наиболее крупными зарубежными учеными XVIII и XIX вв. в области механики являются **Иван Бернулли** (1667–1748), **Даниил Бернулли** (1700–1782), **Даламбер** (1717–1783), **Лагранж** (1736–1813). В работах французских ученых **Вариньона** (1654–1722) и **Пуансо** (1777–1859) наряду с динамикой дальнейшее развитие получила и статика. Вариньон решил задачи сложения сил, приложенных в точке, и параллельных сил. Он получил условия равновесия этих сил, доказал теорему о моменте равнодействующей и предложил создание основ графостатики (построение силового многоугольника).

Развитие науки в России связано с образованием по инициативе Петра I в 1725 г. в Петербурге Российской Академии наук. Большое влияние на развитие механики оказали труды гениального русского ученого, основателя Московского университета **Михаила Васильевича Ломоносова** (1711–1765) и знаменитого математика, астронома и физика **Леонарда Эйлера** (1707–1783). За 30 лет работы в Российской Академии наук Эйлер создал большое количество научных трудов по математике, механике твердого и упругого тела, гидромеханике и небесной механике.

Огромное значение для развития механики имеют работы выдающихся российских ученых: **М.В. Остроградского** (1801–1861), **П.Л. Чебышева** (1821–1894), **С.В. Ковалевской** (1850–1891), **А.М. Ляпунова** (1857–1918), **И.В. Мещерского** (1859–1935), **К.Э. Циолковского** (1857–1935), **А.Н. Крылова** (1863–1945), **Н.Е. Жуковского** (1847–1921), **С.А. Чаплыгина** (1869–1942) и мно-

гих других. Российскими механиками выполнены фундаментальные исследования по теории полета ракет, реактивных самолетов, искусственных спутников Земли и космических станций.

Теоретическая механика является научной основой важнейших отраслей современной техники. Она также является необходимой основой для дальнейшего изучения ряда учебных курсов: «Сопроотивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин», «Механика сплошных сред» и «Обработка металлов давлением».

СТАТИКА

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

1.1. Главный вектор системы сил

Сила – мера механического взаимодействия твердых тел, в результате которого тела могут приобретать ускорения или деформироваться. Сила – векторная величина, характеризующаяся модулем, точкой приложения и направлением (линией действия силы) (рис. 1.1):

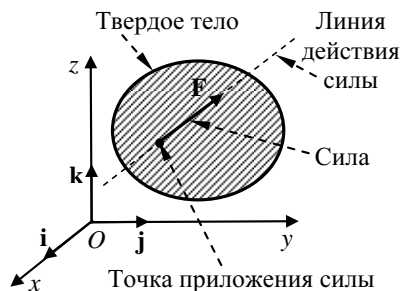


Рис. 1.1

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = (F_x, F_y, F_z), \quad [\mathbf{F}] = \text{Н (ньютон)},$$

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ – единичные орты, } |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1;$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \text{ – модуль силы.}$$

Главным вектором системы сил $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n\}$ называется их геометрическая сумма (рис. 1.2):

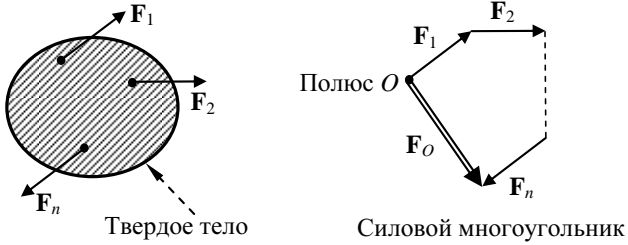


Рис. 1.2

$$\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{F}_O = (F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz}), \quad \mathbf{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}),$$

$$F_{Ox} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Oy} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_{Oz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Главный вектор не зависит от выбора полюса (точки).

1.2. Момент силы относительно точки и оси

Моментом силы относительно точки называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы (рис. 1.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x) = \\ &= (M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор точки приложения силы,

$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ – вектор силы,

$M_{Ox} = yF_z - zF_y$, $M_{Oy} = zF_x - xF_z$, $M_{Oz} = xF_y - yF_x$ – **моменты силы относительно осей x , y и z .**

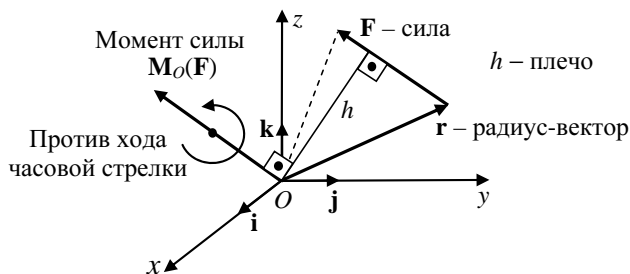


Рис. 1.3

Момент силы \mathbf{M}_O перпендикулярен к радиусу-вектору \mathbf{r} и вектору силы \mathbf{F} . Действительно, скалярные произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O \bullet \mathbf{r} &= M_O r \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{r}) = \\ &= (yF_z - zF_y)x + (zF_x - xF_z)y + (xF_y - yF_x)z = 0, \\ \mathbf{M}_O \bullet \mathbf{F} &= M_O F \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{F}) = \\ &= (yF_z - zF_y)F_x + (zF_x - xF_z)F_y + (xF_y - yF_x)F_z = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{r}) = 0$, $\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{F}) = 0$. Поэтому $\angle(\mathbf{M}_O, \mathbf{r}) = 90^\circ$, $\angle(\mathbf{M}_O, \mathbf{F}) = 90^\circ$.

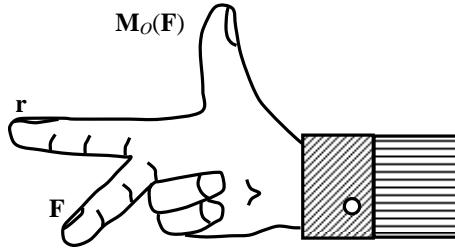
Положительным направлением момента силы считается то направление, откуда поворот силы виден происходящим против хода часовой стрелки.

В механике *плечом* называется кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы. По абсолютной величине момент силы относительно точки равен *произведению «силы на плечо»*:

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F}) = F(r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})) = Fh.$$

Для определения направления момента силы пользуются «*правилом правой руки*» (рис. 1.4).

Направляем указательный палец правой руки вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} , а средний палец правой руки – вдоль вектора силы \mathbf{F} . Тогда направление момента $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ будет совпадать с направлением большого пальца правой руки.



Правило правой руки

Рис. 1.4

Плоскостью действия момента $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ называется плоскость, образованная радиус-вектором \mathbf{r} и вектором силы \mathbf{F} . Момент силы перпендикулярен к плоскости его действия.

Главным моментом системы сил относительно выбранной точки называется геометрическая сумма моментов всех сил относительно этой точки:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Главный момент системы сил зависит от выбора полюса.

Действительно, относительно произвольных точек A и B он равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{BA} + \mathbf{r}_{Ai}) \times \mathbf{F}_i = \\ &= \mathbf{BA} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_O + \mathbf{M}_A, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_O + \mathbf{M}_A.$$

Отсюда следует, что если главный вектор и главный момент системы сил одновременно равны нулю относительно одной точки, то они равны нулю относительно любой другой точки.

1.3. Аксиомы статики

Материальной точкой называют материальное тело, размерами которого можно пренебречь. **Абсолютно твердым телом** называется тело, в котором расстояние между любыми двумя его точками всегда неизменно по времени.

Системой сил называется совокупность нескольких сил, действующих на твердое тело. Если одну систему сил можно заменить другой системой сил, не нарушая состояния тела, то такие системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то последняя называется **равнодействующей**. Две системы сил **эквивалентны** тогда и только тогда, когда у них относительно одного и того же полюса соответственно равны главные векторы и главные моменты:

$$\mathbf{F}_O^1 = \mathbf{F}_O^2, \quad \mathbf{M}_O^1 = \mathbf{M}_O^2.$$

Если абсолютно твердое тело находится в состоянии покоя под действием системы сил, то эта система сил называется **уравновешенной**.

1. **Аксиома инерции (принцип инерции Галилея)**. Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

2. **Аксиома равновесия двух сил**. Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются тогда и только тогда, когда их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.5).

3. **Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил**. Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

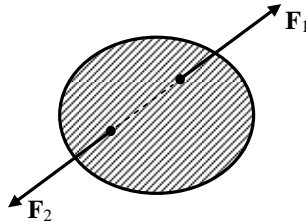


Рис. 1.5

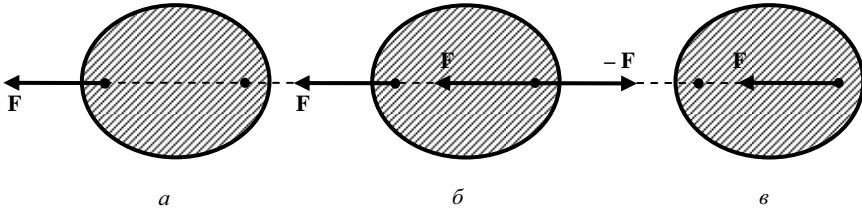


Рис. 1.6

Из вышеприведенной аксиомы следует, что не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменными ее модуль и направление (рис. 1.6).

Действительно, добавим к исходной силе (рис. 1.6, *a*) уравновешенную систему сил (рис. 1.6, *б*). Тогда по аксиоме присоединения и исключения уравновешивающихся сил состояние тела не изменится. Далее исключим уравновешенную систему сил, состоящую из исходной силы \mathbf{F} и силы $-\mathbf{F}$. Тогда получим утверждение аксиомы присоединения и исключения уравновешивающихся сил (рис. 1.6, *в*).

4. **Аксиома параллелограмма сил.** *Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке пересечения их линий действий и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах* (рис. 1.7).

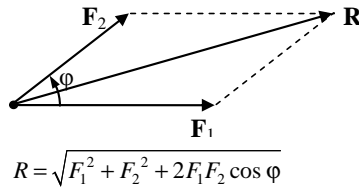


Рис. 1.7

5. **Аксиома равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона).** *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие* (рис. 1.8).

6. **Принцип отвердения.** *Равновесие деформируемого твердого тела не нарушится, если мысленно жестко связать его точки и считать тело абсолютно твердым* (рис. 1.8, *в*).

Тело называется **свободным**, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами,

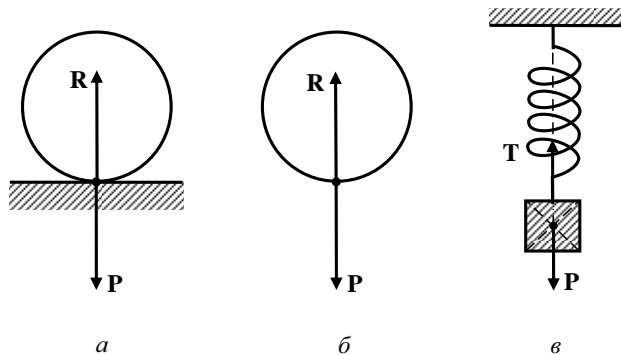


Рис. 1.8

называется *несвободным*, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, называются *связями*.

Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются *реакциями связей*. Силы, не зависящие от реакций связи, называются *активными силами*, а реакции связей называются *пассивными силами*. *Внутренние силы* – силы взаимодействия между точками данного тела. *Внешние силы* – силы, действующие на данное тело со стороны других тел.

7. **Принцип освобожденности от связей.** *Всякое несвободное тело (рис. 1.8, а) можно рассматривать как свободное тело, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу (рис. 1.8, б).*

1.4. Опоры и их реакции

1. **Твердое тело без трения на поверхности.** Реакция идеальной гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям (рис. 1.9, а). Если твердое тело имеет гладкую поверхность и опирается на острие, то реакция направлена по нормали к поверхности этого тела (рис. 1.9, б).

2. **Реакция нити** направлена вдоль нити (рис. 1.9, в). **Реакции прямого стержня** равны по модулю и направлены вдоль оси стержня в стороны, противоположные задаваемым силам (рис. 1.9, г).

3. **Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора** (рис. 1.9, д). **Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора** (рис. 1.9, е). **Жесткая заделка (защемление)** (рис. 1.9, ж).

4. **Подпятник** (рис. 1.9, з). **Сферический шарнир** (рис. 1.9, и).

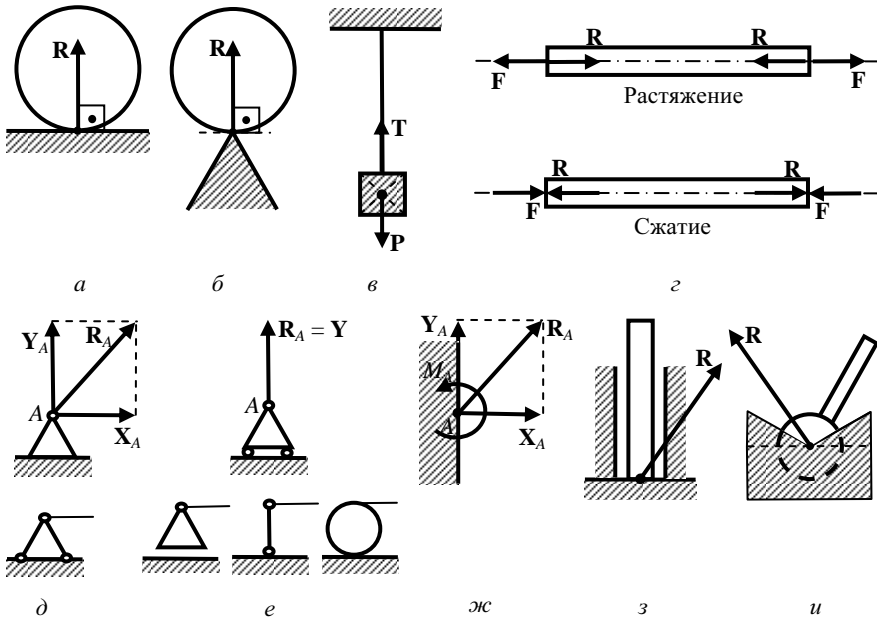


Рис. 1.9

1.5. Теорема Вариньона

Если система сил имеет равнодействующую, то момент системы сил относительно любой точки равен моменту равнодействующей относительно той же точки.

Действительно, пусть равнодействующая системы сил \mathbf{R} приложена в точке O . Тогда

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = \mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{0} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

Поэтому момент системы сил относительно произвольной точки O_1 равен

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_i) = \mathbf{M}_O + \mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{R} = \mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R}),$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_i) = \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R}).}$$

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ (ТЕОРЕМА ПУАНСО)

2.1. Теорема Пуансо

Пара сил (пара) – совокупность двух сил $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$, равных по модулю и противоположных по направлению (рис. 2.1). Главный вектор пары сил равен нулю, а момент пары сил не зависит от выбора полюса. Действительно, $\mathbf{F}_O = \mathbf{F} - \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M}_B = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_O + \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_A$.

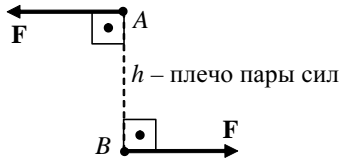


Рис. 2.1

Плоскость действия момента пары сил – плоскость действия пары сил.

Лемма 2.1. Сила, приложенная в какой-либо точке тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения (рис. 2.2).

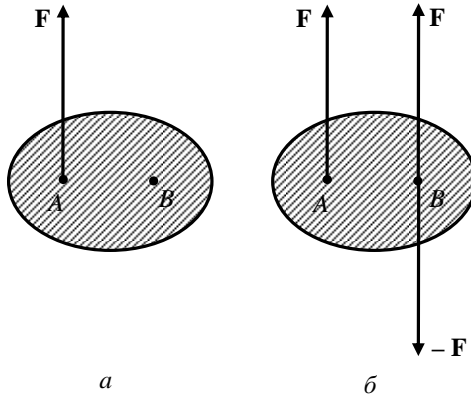


Рис. 2.2

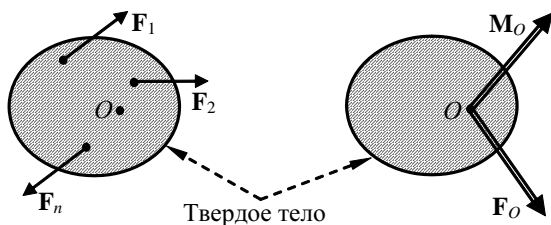


Рис. 2.3

Действительно, пусть сила \mathbf{F} приложена в точке A (рис. 2.2, *a*). Приложим в произвольной точке B уравновешенную систему сил \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$ (рис. 2.2, *б*). Получим систему из силы \mathbf{F} , приложенной в точке B , и пары сил \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$, в которой сила \mathbf{F} приложена в точке A , а сила $-\mathbf{F}$ приложена в точке B . Момент пары сил относительно точки B равен моменту силы \mathbf{F} , приложенной в точке A , относительно точки B .

Основная теорема статики (теорема Пуансо). *Любую систему сил, действующую на абсолютно твердое тело, можно привести относительно произвольно выбранного полюса к эквивалентной системе, состоящей из главного вектора \mathbf{F}_O , выходящего из этого полюса, и пары сил с моментом, равным главному моменту этой системы сил \mathbf{M}_O относительно того же полюса (рис. 2.3).*

Действительно, выберем в качестве центра приведения произвольную точку O . Заменим исходную систему сил такой же системой сил, приложенных в точке O , и системой пар сил, моменты которых равны соответствующим моментам исходных сил относительно центра приведения (лемма 2.1). Геометрически складывая все силы, приложенные в точке O , получим главный вектор исходных сил \mathbf{F}_O , а складывая все пары сил, получим пару сил с моментом, равным главному моменту исходных сил относительно центра приведения O (см. рис. 2.3).

Следствие из теоремы Пуансо. *Необходимое и достаточное условие равновесия системы сил – равенство нулю главного вектора и главного момента этой системы сил:*

$$\boxed{\mathbf{F}_O = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0.}$$

Эти два векторных равенства эквивалентны шести скалярным равенствам:

$$F_{Ox} = 0, \quad F_{Oy} = 0, \quad F_{Oz} = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0, \quad M_{Oz} = 0.$$

2.2. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Система сил называется *плоской*, если все силы лежат в одной плоскости.

Теорема 2.1. Если главный вектор плоской системы сил не равен нулю, то система сил эквивалентна равнодействующей.

Действительно, пусть силы лежат в плоскости xOy . Тогда главный момент системы сил направлен параллельно оси z (рис. 2.4, а). Выберем плечо пары сил главного момента, равное $h = M_O / F_O$ и повернем силы пары сил параллельно главному вектору \mathbf{F}_O (рис. 2.4, б). Исключим из системы сил две равные по модулю и противоположно направленные силы, проходящие через точку O . Тогда получим систему сил, состоящую только из одной силы (равнодействующей) – главного вектора \mathbf{F}_O , выходящего из точки O_1 (рис. 2.4, в).

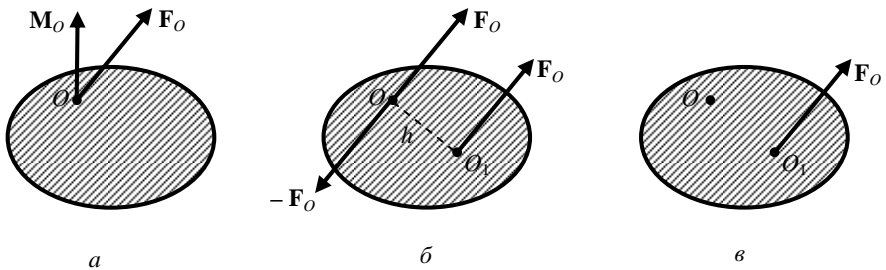


Рис. 2.4

Нуль-вектором называется сила, модуль которой равен нулю.

Случай приведения плоской системы сил

1. Если $\mathbf{F}_O \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$, $h \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей.
2. Если $\mathbf{F}_O \neq 0$, $\mathbf{M}_O = 0$, $h = 0$, то система сил приводится к равнодействующей.
3. Если $\mathbf{F}_O = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$, то система сил приводится к паре сил.
4. Если $\mathbf{F}_O = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$, то система сил приводится к нуль-вектору.

2.3. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду

Динамическим винтом (динамо) называется совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе (рис. 2.5).

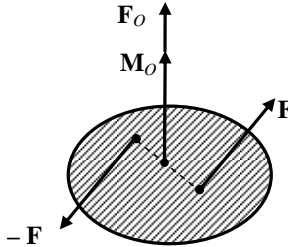


Рис. 2.5

Пусть $\mathbf{F}_O = (F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz})$ и $\mathbf{M}_O = (M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz})$ – соответственно главный вектор и главный момент пространственной системы сил.

Первым статическим инвариантом называется скалярная величина, равная

$$I_1 = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{F}_O = F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2.$$

Вторым статическим инвариантом называется скалярная величина, равная

$$I_2 = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O = F_{Ox}M_{Ox} + F_{Oy}M_{Oy} + F_{Oz}M_{Oz}.$$

Действительно, второй инвариант не зависит от выбора точки O :

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{F}_O,$$

$$\mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{F}_O \bullet (\mathbf{M}_O + \mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{F}_O) = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O + \mathbf{F}_O \bullet (\mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{F}_O) = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O,$$

$$\mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O.$$

Модуль проекции главного момента системы сил \mathbf{M}_O на направление главного вектора \mathbf{F}_O равен

$$M_O^* = \mathbf{M}_O \bullet \frac{\mathbf{F}_O}{F_O} = \frac{\mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O}{F_O} = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}}.$$

Теорема 2.2. Если второй статический инвариант не равен нулю, то систему можно привести к динамическому винту (рис. 2.6).

Действительно, спроектируем главный момент системы сил на два взаимно перпендикулярных направления, одно из которых направлено вдоль линии действия главного вектора (рис. 2.6, а): $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O^*} + \mathbf{M}_1$. По условию теоремы 2.2, $\mathbf{M}_{O^*} \neq 0$. Выберем плечо h пары сил проекции главного момента \mathbf{M}_1 равным $h = M_1 / F_O$. Исключим из системы сил две равные по модулю и противоположные по направлению силы \mathbf{F}_O и $-\mathbf{F}_O$, проходящие через точку O (рис. 2.6, б, в). Перенесем момент пары сил \mathbf{M}_{O^*} в точку O_1 . Тогда получим динамический винт в точке O_1 (рис. 2.6, г).

Теорема 2.3. Если главный вектор не равен нулю, а второй статический инвариант равен нулю, то систему можно привести к равнодействующей.

Действительно, из условия теоремы 2.3 следует, что $\mathbf{F}_O \neq 0$, $I_2 = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O = 0$, $\mathbf{M}_{O^*} = 0$. Поэтому из теоремы 2.2 следует, что систему можно привести к равнодействующей, равной главному вектору системы сил \mathbf{F}_O (см. рис. 2.6, в при $\mathbf{M}_{O^*} = 0$).

Следствие из теоремы 2.3. Систему параллельных сил в пространстве можно привести к равнодействующей.

Действительно, пусть все силы параллельны оси z . Тогда $\mathbf{F}_O = (0, 0, F_{Oz})$ и $\mathbf{M}_O = (M_{Ox}, M_{Oy}, 0)$, так как момент силы перпендикулярен вектору силы. Поэтому второй статический инвариант

$$I_2 = \mathbf{F}_O \bullet \mathbf{M}_O = F_{Oz}M_{Ox} + F_{Oz}M_{Oy} + F_{Oz}M_{Oz} = 0 \cdot M_{Ox} + 0 \cdot M_{Oy} + F_{Oz} \cdot 0 = 0.$$

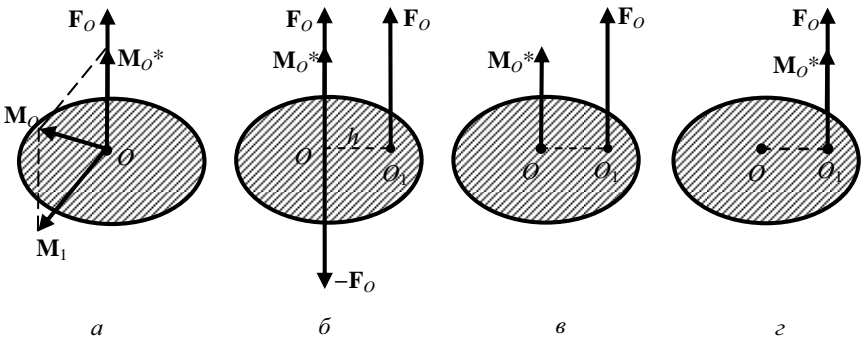


Рис. 2.6

Из теоремы 2.3 следует, что такая система сил приводится к равнодействующей.

**Случай приведения пространственной системы сил
(простейшие системы сил)**

1. Если $I_2 \neq 0$, $\mathbf{F}_O \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$, то система сил приводится к динамическому винту.
2. Если $I_2 = 0$, $\mathbf{F}_O \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей.
3. Если $I_2 = 0$, $\mathbf{F}_O = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$, то система сил приводится к паре сил.
4. Если $I_2 = 0$, $\mathbf{F}_O = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$, то система сил приводится к нуль-вектору.

3. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Примеры на равновесие твердого тела под действием плоской системы параллельных сил

Пример 3.1. Дано: $P = 6$ кН, $M_1 = 15$ кН·м, $M_2 = 5$ кН·м, $q = 4$ кН/м. Найти реакции опор двухопорной балки (рис. 3.1). Собственным весом балки пренебречь.

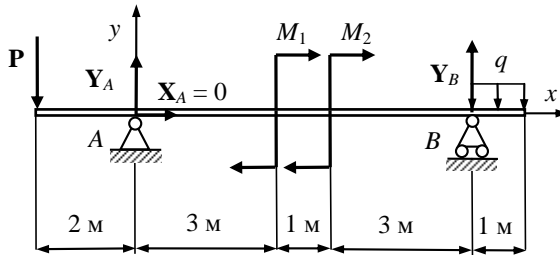


Рис. 3.1

Решение. Уравнения равновесия балки имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: X_A = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: -P + Y_A + Y_B - q \cdot 1 = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: P \cdot 2 - M_1 - M_2 + Y_B(3+1+3) - q \cdot 1 \cdot (3+1+3+0,5) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$Y_B = \frac{-P \cdot 2 + M_1 + M_2 + q \cdot 7,5}{7},$$

$$Y_A = P - Y_B + q \cdot 1.$$

После вычислений получим

$$Y_B = 5,429 \text{ кН}, \quad Y_A = 4,571 \text{ кН}.$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки B имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iB} &= P(2+3+1+3) - Y_A(3+1+3) - M_1 - M_2 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = \\ &= 6 \cdot 9 - 4,571 \cdot 7 - 15 - 5 - 4 \cdot 0,5 = 54 - 53,997 = 0,003 \approx 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакции в точках A и B :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{0^2 + 4,571^2} = 4,571 \text{ кН}, \quad R_B = Y_B = 5,429 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 4,571$ кН; $R_B = 5,429$ кН.

Пример 3.2. Дано: $P = 5$ кН, $M = 1$ кН·м, $q_1 = 1$ кН/м, $q_2 = 2$ кН/м. Найти реакции опор двухопорной балки (рис. 3.2). Собственным весом балки пренебречь.

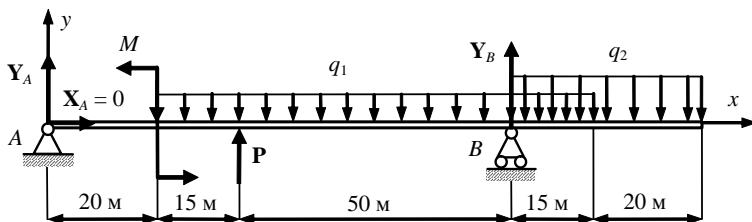


Рис. 3.2

Решение. Уравнения равновесия балки имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0: \quad X_A = 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0: \quad Y_A + P - q_1 \cdot 80 + Y_B - q_2 \cdot 35 = 0, \\ \sum_i M_{iA} &= 0: \quad M + P(20+15) - q_1 \cdot 80(20+15+25) + \\ &+ Y_B(20+15+50) - q_2 \cdot 35(20+15+50+15+20-17,5) = 0, \end{aligned} \right.$$

откуда

$$Y_B = \frac{-M - P \cdot 35 + q_1 \cdot 4800 + q_2 \cdot 3587,5}{85},$$

$$Y_A = -P + q_1 \cdot 80 - Y_B + q_2 \cdot 35.$$

После вычислений получим

$$Y_B = 138,812 \text{ кН}, \quad Y_A = 6,188 \text{ кН}.$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки B имеет вид

$$\sum_i M_{iB} = -Y_A(20+15+50) + M - P \cdot 50 + q_1 \cdot 80 \cdot 25 - \\ -q_2 \cdot 35(15+20-17,5) = -525,98 + 1 - 250 + 2000 - 1225 \approx 0.$$

По найденным составляющим определяем реакции в точках A и B :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{0^2 + 6,188^2} = 6,188 \text{ кН}, \quad R_B = Y_B = 138,812 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 6,188 \text{ кН}$; $R_B = 138,812 \text{ кН}$.

Пример 3.3. Дано: $P_1 = 1 \text{ кН}$, $P_2 = 3 \text{ кН}$, $M = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$.
Найти реакции опор балки (рис. 3.3). Собственным весом балки пренебречь.

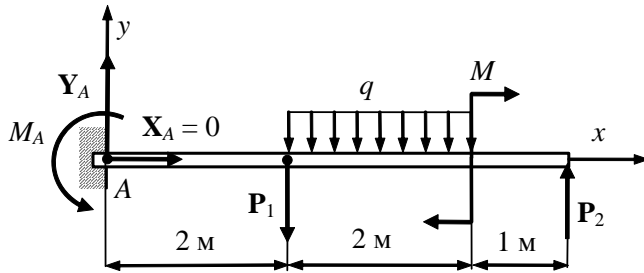


Рис. 3.3

Решение. Уравнения равновесия балки имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & X_A = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & Y_A - P_1 - q \cdot 2 + P_2 = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: & M_A - P_1 \cdot 2 - q \cdot 2(2+1) - M + P_2(2+2+1) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$Y_A = P_1 + q \cdot 2 - P_2, \quad M_A = P_1 \cdot 2 + q \cdot 6 + M - P_2 \cdot 5.$$

После вычислений получим

$$Y_A = 2 \text{ кН}, \quad M_A = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки B имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iB} &= M_A - Y_A(2 + 2 + 1) + P_1(2 + 1) + q \cdot 2(1 + 1) - M = \\ &= 0 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 1 = 11 - 11 = 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакцию в точке A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 2 \text{ кН}$; $M_A = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Пример 3.4. Дано: $P_1 = 1 \text{ кН}$, $P_2 = 3 \text{ кН}$, $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$.
Найти реакции опор балки (рис. 3.4). Собственным весом балки пренебречь.

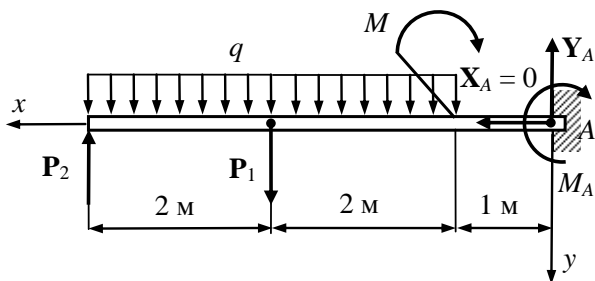


Рис. 3.4

Решение. Уравнения равновесия балки имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & X_A = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & -P_2 + P_1 + q \cdot 4 - Y_A = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: & -M_A - M + P_1(2 + 1) + q \cdot 4(2 + 1) - P_2(2 + 2 + 1) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$Y_A = -P_2 + P_1 + q \cdot 4, \quad M_A = -M + P_1 \cdot 3 + q \cdot 12 - P_2 \cdot 5.$$

После вычислений получим

$$Y_A = 6 \text{ кН}, \quad M_A = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки B имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iB} &= -M_A - M - P_1 \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + Y_A(2 + 2 + 1) = \\ &= -11 - 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 8 + 6 \cdot 5 = 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакцию в точке A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 6 \text{ кН}$; $M_A = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

3.2. Примеры на равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил

Пример 3.5. Дано: $P = 6 \text{ кН}$, $F = 8 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$. Для жесткой рамы (рис. 3.5) определить реакции в опорах A и D , пренебрегая собственным весом рамы.

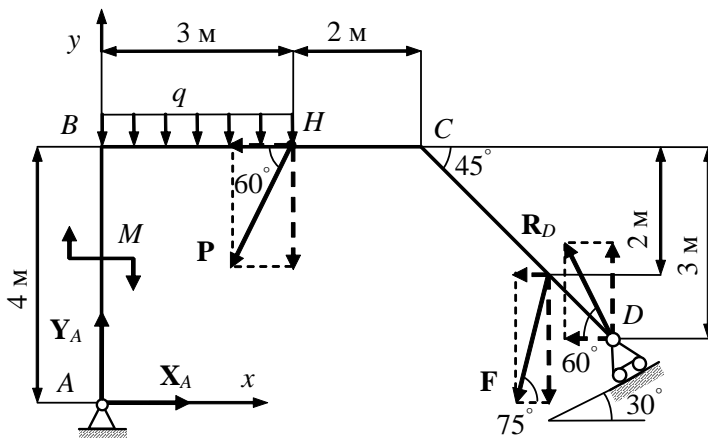


Рис. 3.5

Решение. Уравнения равновесия рамы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0: \quad X_A - P \cos 60^\circ - F \cos 75^\circ - R_D \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: \quad Y_A - 3q - P \sin 60^\circ - F \sin 75^\circ + R_D \sin 60^\circ = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: \quad -M - 3q \cdot 1,5 + P \cos 60^\circ \cdot 4 - P \sin 60^\circ \cdot 3 + \\ + F \cos 75^\circ \cdot 2 - F \sin 75^\circ \cdot 7 + R_D \cos 60^\circ \cdot 1 + R_D \sin 60^\circ \cdot 8 = 0. \end{array} \right.$$

Решая систему уравнений, находим

$$R_D = \frac{M + 4,5q + P(-4 \cos 60^\circ + 3 \sin 60^\circ) + F(-2 \cos 75^\circ + 7 \sin 75^\circ)}{\sin 60^\circ \cdot 8 + \cos 60^\circ},$$

$$X_A = P \cos 60^\circ + F \cos 75^\circ + R_D \cos 60^\circ,$$

$$Y_A = 3q + P \sin 60^\circ + F \sin 75^\circ - R_D \sin 60^\circ.$$

Вычисления дают

$$R_D = 8,96 \text{ кН}, \quad X_A = 9,55 \text{ кН}, \quad Y_A = 11,16 \text{ кН}.$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки H имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iH} &= -M - Y_A \cdot 3 + X_A \cdot 4 + 3q \cdot 1,5 - \\ &- F \cos 75^\circ \cdot 2 - F \sin 75^\circ \cdot 4 - R_D \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 + R_D \sin 60^\circ \cdot 5 = \\ &= -4 - 11,6 \cdot 3 + 9,55 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1,5 - 8 \cdot 0,259 \cdot 2 - \\ &- 8 \cdot 0,966 \cdot 4 - 8,96 \cdot 0,5 \cdot 3 + 8,96 \cdot 0,866 \cdot 5 = 0,027 \approx 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакцию в точке A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{9,55^2 + 11,16^2} \approx 14,69 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 14,69 \text{ кН}$; $R_D = 8,96 \text{ кН}$.

Пример 3.6. Дано: $P = 20 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$. Для конструкции, показанной на рис. 3.6, определить реакции в опоре A , пренебрегая собственным весом конструкции.

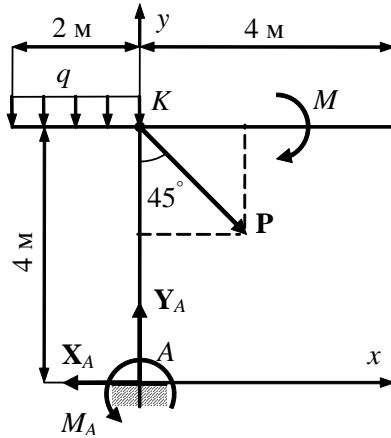


Рис. 3.6

Решение. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & -X_A + P \sin 45^\circ = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & -2q + Y_A - P \cos 45^\circ = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: & 2q \cdot 1 + M_A - P \sin 45^\circ \cdot 4 - M = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} X_A &= P \sin 45^\circ = 14,14 \text{ кН}, \\ Y_A &= 2q + P \cos 45^\circ = 18,14 \text{ кН}, \\ M_A &= -2q + P \sin 45^\circ \cdot 4 + M = 57,56 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки K имеет вид

$$\sum_i M_{iK} = 2q \cdot 1 - M + M_A - X_A \cdot 4 = 2 \cdot 2 - 5 + 57,56 - 14,14 \cdot 4 = 0.$$

По найденным составляющим определяем реакцию в точке A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{14,14^2 + 18,14^2} \approx 23 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 23 \text{ кН}$; $M_A = 57,56 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Пример 3.7. Дано: $P = 20$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 2$ кН/м. Для конструкции, показанной на рис. 3.7, определить реакции в опорах A и B , пренебрегая собственным весом конструкции.

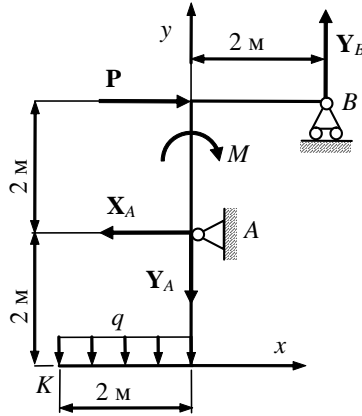


Рис. 3.7

Решение. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & -X_A + P = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & -2q - Y_A + Y_B = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: & 2q \cdot 1 - P \cdot 2 - M + Y_B \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} X_A &= P = 20 \text{ кН}, \\ Y_B &= \frac{1}{2}(-2q + 2P + M) = 23 \text{ кН}, \\ Y_A &= -2q + Y_B = 19 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки K имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iK} &= -2q \cdot 1 + X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 2 - P \cdot 4 - M + Y_B \cdot 4 = \\ &= -2 \cdot 2 + 20 \cdot 2 - 19 \cdot 2 - 20 \cdot 4 - 10 + 23 \cdot 4 = 132 - 132 = 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакции в точках A, B :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{20^2 + 19^2} \approx 27,59 \text{ кН}, \quad R_B = Y_B = 23 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 27,59 \text{ кН}$; $R_B = 23 \text{ кН}$.

Пример 3.8. Дано: $P = 20 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$. Для конструкции, показанной на рис. 3.8, определить реакции в опорах A и B , пренебрегая собственным весом конструкции.

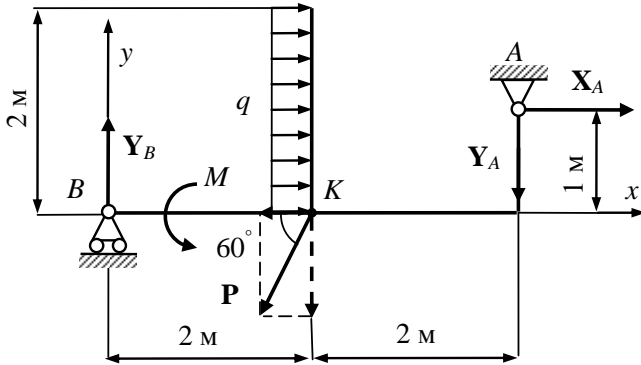


Рис. 3.8

Решение. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & X_A + 2q - P \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & Y_B - P \sin 60^\circ - Y_A = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: & -Y_B \cdot 4 + M - P \cos 60^\circ \cdot 1 + P \sin 60^\circ \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} X_A &= P \cos 60^\circ - 2q, \\ Y_B &= 0,25(M - P \cos 60^\circ + P \sin 60^\circ \cdot 2), \\ Y_A &= Y_B - P \sin 60^\circ. \end{aligned}$$

Вычисления дают

$$X_A = 6 \text{ кН}, \quad Y_B = 8,66 \text{ кН}, \quad Y_A = -8,66 \text{ кН}.$$

Проверка. Уравнение равновесия относительно точки K имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iK} &= -Y_B \cdot 2 - 2q \cdot 1 + M - Y_A \cdot 2 - X_A \cdot 1 = \\ &= -8,66 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 10 - (-8,66) \cdot 2 - 6 = 27,32 - 27,32 = 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакции в точках A, B :

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{6^2 + (-8,66)^2} \approx 10,54 \text{ кН}, \\ R_B &= Y_B = 8,66 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Ответ: $R_A = 10,54$ кН; $R_B = 8,66$ кН.

Пример 3.9. Дано: $G = 15$ кН, $P = 10$ кН, $M = 14$ кН·м, $\alpha = 30^\circ$.
Найти реакции опор балки, показанной на рис. 3.9, пренебрегая собственным весом балки.

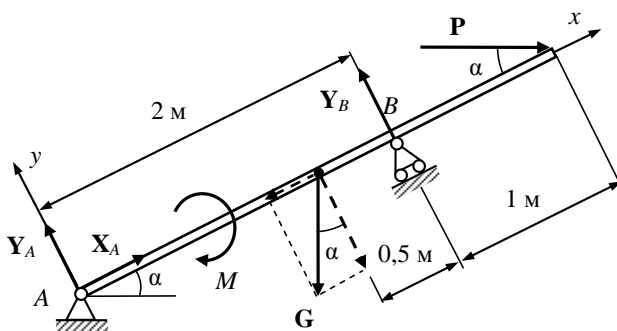


Рис. 3.9

Решение. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & X_A - G \sin \alpha + P \cos \alpha = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & Y_A - G \cos \alpha + Y_B - P \sin \alpha = 0, \\ \sum_i M_{iA} = 0: & -M - G \cos \alpha \cdot 1,5 + Y_B \cdot 2 - P \sin \alpha \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим

$$\begin{aligned}
 X_A &= G \sin \alpha - P \cos \alpha, \\
 Y_B &= \frac{M + G \cos \alpha \cdot 1,5 + P \sin \alpha \cdot 3}{2}, \\
 Y_A &= G \cos \alpha - Y_B + P \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

После вычислений

$$X_A = -1,160 \text{ кН}, \quad Y_B = 24,243 \text{ кН}, \quad Y_A = -6,253 \text{ кН}.$$

Проверка: Уравнение равновесия относительно точки B имеет вид

$$\begin{aligned}
 \sum_i M_{iB} &= -Y_A \cdot 2 - M + G \cos \alpha \cdot 0,5 - P \sin \alpha \cdot 1 = \\
 &= -(-6,253) \cdot 2 - 14 + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,5 - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \approx 19,001 - 19 \approx 0.
 \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем реакции в точках A, B :

$$\begin{aligned}
 R_A &= \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-1,160)^2 + (-6,253)^2} \approx 6,360 \text{ кН}, \\
 R_B &= Y_B = 24,243 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $R_A = 6,360 \text{ кН}; R_B = 24,243 \text{ кН}.$

4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

4.1. Составные конструкции

Составные конструкции (сочлененные системы твердых тел) – совокупности твердых тел, соединенных между собой какими-либо связями или касающихся друг друга своими поверхностями.

Силы, действующие на такую систему тел, подразделяются на внешние и внутренние. **Внешние силы** – силы, с которыми тела, не входящие в данную систему, действуют на тела рассматриваемой системы. **Внутренние силы** – силы взаимодействия между телами, входящими в рассматриваемую систему.

Внутренние связи – связи, соединяющие части данной конструкции. **Внешние связи** – связи, скрепляющие конструкцию с телами, в нее не входящими.

При решении задач на определение реакций опор составной конструкции уравнения равновесия статики записывают для каждого тела конструкции. При нахождении реакций внутренних связей между телами конструкции пользуются третьим законом Ньютона.

4.2. Примеры на определение реакций опор системы двух тел под действием произвольной плоской системы сил

Пример 4.1. Дано: $P_1 = 60$ Н – вес балки AB , $P_2 = 40$ Н – вес балки BC . Для составной конструкции (рис. 4.1) определить реакции в опорах A и C , а также реакцию в шарнире B .

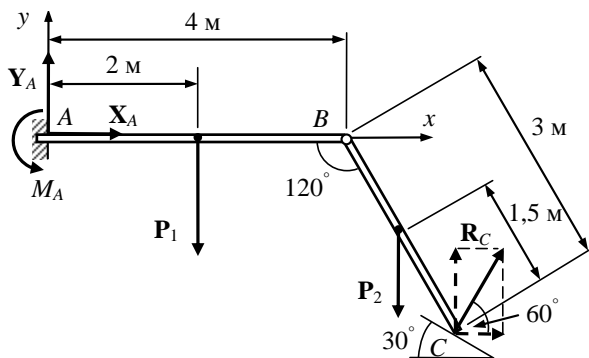


Рис. 4.1

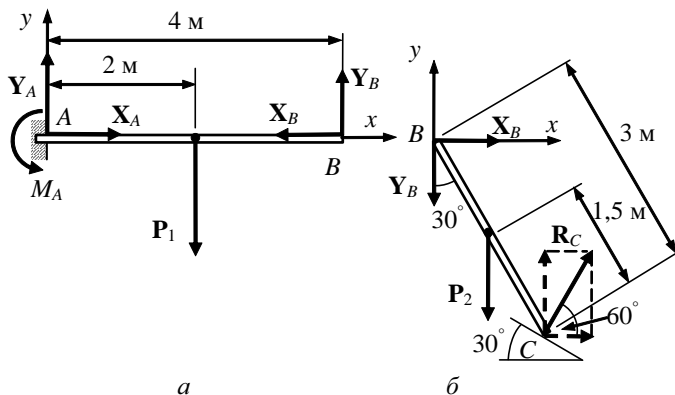


Рис. 4.2

Решение. Разделяем составную конструкцию на два твердых тела, заменяя внутреннюю связь (шарнир B) реакцией \mathbf{R}_B . (рис. 4.2). Для каждого из твердых тел составляем по три уравнения равновесия. Уравнения равновесия тела AB имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: X_A - X_B = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: Y_A - P_1 + Y_B = 0, \\ \sum_i M_{iB} = 0: -Y_A \cdot 4 + M_A + P_1 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия тела BC имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: X_B + R_C \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: -Y_B - P_2 + R_C \sin 60^\circ = 0, \\ \sum_i M_{iB} = 0: R_C \cos 60^\circ \cdot 3 \cos 30^\circ + R_C \sin 60^\circ \cdot 3 \sin 30^\circ - \\ - P_2 \cdot 3 \cdot 0,5 \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим

$$R_C = \frac{P_2 \cdot 0,5 \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ} = 11,547 \text{ Н},$$

$$X_B = -R_C \cos 60^\circ = -5,774 \text{ Н}, \quad X_A = X_B = -5,774 \text{ Н},$$

$$Y_B = -P_2 + R_C \sin 60^\circ = -30,000 \text{ Н}, \quad Y_A = P_1 - Y_B = 90 \text{ Н},$$

$$M_A = 4Y_A - 2P_1 = 240 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверка: Уравнение равновесия всей конструкции относительно точки C имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iC} &= M_A - Y_A(4 + 3 \sin 30^\circ) - X_A \cdot 3 \cos 30^\circ + \\ &+ P_1(2 + 3 \sin 30^\circ) + P_2 \cdot 0,5 \cdot 3 \sin 30^\circ = \\ &= 240 - 90(4 + 3 \cdot 0,5) - (-5,774) \cdot 3 \cos 30^\circ + \\ &+ 60(2 + 3 \cdot 0,5) + 40 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 = 0. \end{aligned}$$

По найденным составляющим определяем опорную реакцию в точке A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,774^2 + 90^2} \approx 90,185 \text{ Н}.$$

Определяем реакцию в шарнире B :

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{(-5,774)^2 + (-30)^2} \approx 30,551 \text{ Н}.$$

Ответ: $R_A = 90,185 \text{ Н}$; $M_A = 240 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $R_C = 11,547 \text{ Н}$; $R_B = 30,551 \text{ Н}$.

Пример 4.2. Дано: $P_1 = 7 \text{ кН}$, $P_2 = 9 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 1,2 \text{ кН/м}$. Для составной конструкции (рис. 4.3) определить реакции в опорах A и B , а также реакцию в шарнире C . Вес твердых тел не учитывать.

Решение. Разделяем рассматриваемую составную конструкцию на два твердых тела, заменяя внутреннюю связь (шарнир C) реакцией R_C (рис. 4.4). Для каждого из твердых тел составляем по три уравнения равновесия. Уравнения равновесия тела AC имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0: \quad X_A + 3q - X_C = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: \quad Y_A - P_1 + Y_C = 0, \\ \sum_i M_{iC} = 0: \quad -Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 3 + 3q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M = 0. \end{array} \right.$$

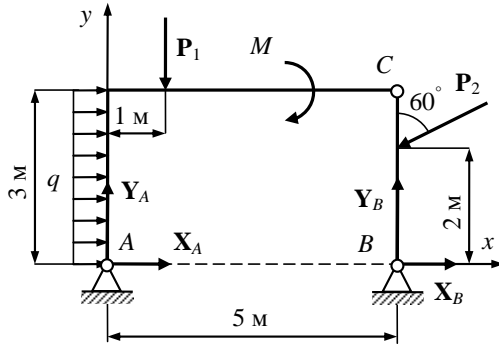


Рис. 4.3

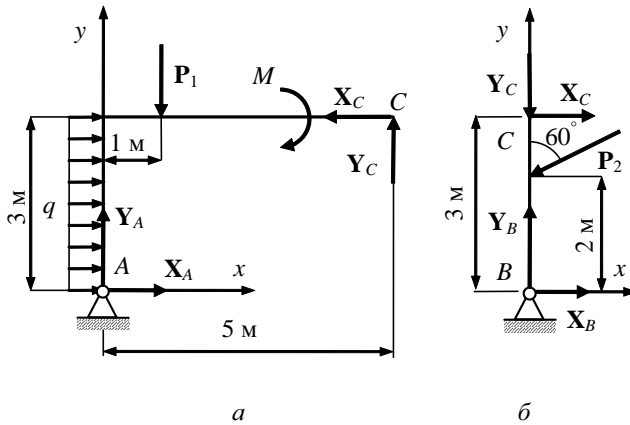


Рис. 4.4

Уравнения равновесия тела CB имеют вид

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0: & X_C - P_2 \sin 60^\circ + X_B = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0: & -Y_C + Y_B - P_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_i M_{iC} = 0: & X_B \cdot 3 - P_2 \sin 60^\circ \cdot 1 = 0. \end{cases}$$