

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

М.А. Штремель

РАЗРУШЕНИЕ

Книга 1. Разрушение материала

Монография



Москва 2014

УДК 539.4:620.1

Ш93

Рецензент

зав. кафедрой физических проблем материаловедения Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, заслуженный деятель науки и техники России,
д-р физ.-мат наук, проф. *Б.А. Калин*

Штремель М.А.

Ш93 Разрушение. В 2 кн. Кн. 1. Разрушение материала : моногр. / М.А. Штремель. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2014. – 670 с.

ISBN 978-5-87623-763-7

Междисциплинарная монография «Разрушение» рассматривает разрушение сплавов, композитов, керамики, наноматериалов, покрытий как единую область физики прочности.

Монография издается в двух книгах. В книге 1 «Разрушение материала» рассмотрены макроскопические явления (с кратким изложением принципов механики разрушения и структурной мезомеханики), возможности методов испытаний материалов и наблюдения процессов разрушения в разнообразных условиях работы.

В книге 2 «Разрушение структур» дан систематический анализ явлений хрупкого и вязкого разрушения микроструктур, усталости и деградации во взаимодействиях со средой как основа для многокритериальной оптимизации материалов разных классов.

Как и в предыдущих книгах курса физики прочности («Дефекты решетки», МИСиС, 1999 и «Деформация», МИСиС, 1997) изложение идет «от начала», на базе только стандартных курсов технического вуза. Для первоначального изучения даны задачи, для практической деятельности приведена критически отобранная библиография.

Книга предназначена для специалистов по разработке и применению сплавов и композитов и по физике твердого тела, а также для подготовки в магистратуре по специальностям «Металловедение и термическая обработка», «Физика металлов», направлениям «Материаловедение», «Физика», «Наноматериалы».

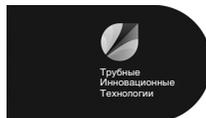
УДК 539.4:620.1

Издано при участии:

**Трубной металлургической
компании**



**АО «Трубные инновационные
технологии»**



Концерна ТВЭЛ



ISBN 978-5-87623-763-7

© М.А. Штремель, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	11
Введение.....	14
Глава 1. Макромеханика разрушения.....	20
§1.1. Концентраторы напряжений.....	20
Напряжения в однородной сплошной среде. Плосконапряженное и плоскодеформированное состояние. Главные напряжения. Концентрация напряжений. Сферическая полость под гидростатическим давлением. Сферическая полость при одноосном растяжении. Цилиндрическое отверстие. Эллиптическая прорезь. Произвольная прорезь. Глубокие вырезы. Сингулярные концентраторы. Коэффициент интенсивности напряжений. Порядок особенности. Конформное отображение полей. Уступ поверхности	
§1.2. Повреждения при больших деформациях.....	40
Модели среды. Инварианты в законах течения. Октаэдрическое напряжение. Поле скоростей течения. Принцип максимума. Инварианты деформации. Течение жесткопластической среды. Поверхности скольжения. Геометрические линии скольжения. Поля линий скольжения. «Глубина проработки». Пластический шарнир. «Ротационная мода». «Турбулентность пластического течения». Разрыхление материала. Разрыхление и уплотнение сдвигом. Деформация пористой среды до разрушения. Показатель напряженного состояния. Повреждаемость при больших деформациях. Неаддитивность повреждений. Дробление пор сдвигом. Управление повреждаемостью. Простой сдвиг. Разрушение при РКУ. Процессы с большим сдвигом. Залечивание пор. Компактирование	
§1.3. Разрушение от локализации пластического течения.....	66
Локализация пластической деформации. Стандартные характеристики прочности. Характеристики пластичности при растяжении. Равномерная деформация. Истинная диаграмма. Аппроксимации диаграммы деформации. Неустойчивость при одноосном растяжении. Показатель упрочнения. Оценки показателя упрочнения. Разупрочнение в шейке. Рубка. Вырубка. Стрижка. Срез при растяжении. Растяжение по нормали к плоскости среза. Траектории среза	
§1.4. Трещина в упругой среде.....	80
Описание форм трещины. Типовые представления. Отрыв и срез. Моды разрушения. Поле трещины отрыва. Гидростатическое давление. Фактор интенсивности напряжений. Смена моды. Выбор направления роста трещины. Наложение отрыва и сдвига. Наклонная трещина. Трещина сжатия. Трещины при изгибе. Трещины при кручении	

§1.5. Геометрия трещин	100
Трещина в структуре. Масштабы для сравнения. База сравнений. Плоская трещина в неоднородном поле. Факторы интенсивности напряжений. Разложение внешнего поля. Дальнодействие трещины в неоднородном поле. Трещина в убывающем поле. Криволинейные траектории. Случайно извилистые траектории. Поворот трещины на «слабую» поверхность. Зигзаг трещины. Тупик для трещины. Трехмерные задачи. Эллиптическая трещина. Плоский выпуклый контур трещины. «В среднем прямая» кромка плоской трещины. Неплоская трещина. Ветвление трещины	
§1.6. Критерий роста трещины	119
Энергетический критерий разрушения. Вязкость разрушения. Обнаружимость докритической трещины в конструкции. Двупараметрические критерии надежности конструкции. Критерии среза. Трещина сдвига в хрупком материале	
§1.7. Трещина в упругопластической среде	129
Квазихрупкое разрушение. Контур пластической зоны. Пластическая зона при плоской деформации. Пластическая зона при плоском напряженном состоянии. Трещина в среде с упрочнением. Упругое и пластическое раскрытие трещины. Раскрытие у кромки и перемещение берегов. Локализованный сдвиг. Полоса сдвига как вторичный концентратор напряжений. Смена моды. «Косой срез». Откосы среза	
§1.8. Разрушение под контактом	144
Контактные напряжения. Конфигурация контактов. Точечная сила на поверхности. Пятно упругого контакта. Вдавливание шара. Контакт шаров. Работа упругого вдавливания. Поле в полупространстве. Контакт цилиндров. Сингулярный контакт. Пластическое течение под контактом. Валик выдавливания. Измерение твердости. Удельная работа вытеснения. Корреляции с диаграммой растяжения. Трещины под упругим контактом. Множественное растрескивание под контактом. Трещина от пластической зоны. «Трещины разгрузки»	
§1.9. Внутренние напряжения	166
Макроскопические внутренние напряжения. Стесненная деформация. Конфигурации включения. Концентрация напряжений от неоднородности среды. Послойная неоднородность. Пластическая аккомодация. Напряжения от текстурных компонент. Поля температур. Импульсный нагрев. Теплообмен со средой. Неоднородное поле температур. Стационарное поле температур. Термические напряжения. Термический удар. Пластическое течение от термических	

напряжений. Термопрочность. Остаточные напряжения.
 Напряжения после правки. Внутренние напряжения после
 обработки давлением. Технологические термические напряжения.
 Нетепловые источники напряжения. Закалочные напряжения.
 Закалочные трещины. Снятие остаточных напряжений.
 Замедленное разрушение. Измерение внутренних напряжений.
 Микронапряжения

Глава 2. Наблюдение и измерение разрушения..... 197

§2.1. Средства измерения..... 197

Объекты измерения. Фотография. Разрешение. Наблюдение
 и измерение трещины. Каустики. Измерения трещины в объеме.
 Карта глубин. Конфокальная съемка. Стереоскопия. Томография.
 Контактная микроскопия высокого разрешения. Сканирующая
 электронная микроскопия. Трансмиссионная электронная
 микроскопия. Наложение химической карты. Рентгеновская
 микроскопия. Ультразвуковое изображение. Акустическая
 микроскопия. Фотоакустическая и фототепловая микроскопия.
 Эллипсометрия

§2.2. Наблюдение процесса 217

Измерение полей деформаций и напряжений. Сетка меток. Муар.
 Интерферометрия. Голография. Спеклы. Измерения в динамике.
 Стробоскопия. Термография. Тепловидение. Динамическая
 тепловая томография. Микроскопия трещины *in situ*. Магнитные
 поля. Электромагнитные шумы. Акустическая эмиссия. Задачи
 анализа эмиссии. Первичный сигнал. Реверберация. Измеримые
 процессы. Спектр эмиссии. Спектр низких частот. Триангуляция.
 Цепи сигналов. Агрегированный сигнал. Идентификация
 событий. Распределение амплитуд. Калибровки

§2.3. Разрушение при растяжении 242

Стандартные испытания. Анализ диаграммы растяжения. Шейка
 в круглом образце. Напряжения в шейке. Эволюция кривизны
 профиля. Аппроксимации профиля шейки. Динамика шейки.
 Поры в шейке. Чашка. Конус. Плоский срез шейки. «Внутренняя
 шейка». Два пути эволюции шейки. Хрупкий излом в шейке.
 Шейка в монокристалле. Форма сечения образца. Растяжение
 листа. Неустойчивость течения ленты. Ориентировка шейки.
 Сужение листа. Диффузная и резкая шейка в полосе. Срез листа.
Зоны в изломе листа. Изгиб при срезе

§2.4. Схемы разрушающих испытаний 268

Назначение испытаний. Диаграмма сжатия. Неустойчивость
 сжатия. Трение в опорах. Хрупкость при сжатии. Дробление.
 Большое сжатие. Упругий изгиб. Пластический изгиб.

Остаточные напряжения после изгиба. Остаточная кривизна. Угол загиба под нагрузкой. Угол при трехточечном изгибе. Остаточный угол загиба. Предел прочности при изгибе. Уширение при изгибе. Трещина из-под надреза. «Пластический шарнир». Меры пластичности при изгибе. Двухосное растяжение. Анизотропная пластичность. Измерения среза. Кручение. Вязкий и хрупкий излом кручения. Осевая сила. Пластичность при кручении. Локализация кручения	
§2.5. Трещиностойкость	296
Исходные концентраторы напряжений. Эволюция концентратора. Мера опасности концентратора. Масштабный эффект. «Сопrotивление отрыву». Вязкость разрушения. Условия измеримости. Острота исходной трещины. Растяжение листа с трещиной. Толщина и напряженное состояние. Смена моды. «Косой срез». Откосы среза. Вязкость разрушения тонких листов. R-кривые устойчивого роста. Переходные процессы старта. Полноценный образец. Полноценное испытание. Критическое раскрытие. Измерения вязкости разрушения хрупких материалов. Разрушение при вдавливании. Измерение вязкости разрушения при изгибе. Стабилизация роста трещины. Трещина при общем пластическом течении. Метод податливости. J-интеграл. Моды среза. Пределы трещиностойкости. Критерии высокопрочности	
§ 2.6. Ударная вязкость	323
Устройство и метод. «Инструментированный» изгиб. Стадии разрушения ударного образца. Варианты событий. Геометрия разрушенного образца. Взаимосвязи параметров геометрии. «Доля вязкой составляющей». Составляющие работы разрушения. Острота надреза. «Разделение работ». Масштабный фактор. Локальность. ИПГ – DWTT. Корреляции с вязкостью разрушения. Обоснование выбора метода испытания	
§2.7. Приемы фрактографии	341
Задачи фрактографии. Средства наблюдения. Микроскопия рельефов. Структура под изломом. Ориентировки под изломом. Разрез через кромку. «Фрактография под поверхностью». «Вид излома» Семантический анализ. Анализ текстуры изображения. Сегментация. Измерения структур. Значимость разницы в параметре. Препарирование изображений. Нечеткие структуры. Геометрические признаки. Статистика элементов. Различение распределений. Функция распределения. Обратные задачи фрактографии. Вид решения. Достаточность информации. Поиск зависимости. Достоверность решения. Сокращение размерности задачи. Выбор модели	

§2.8. Статистическая геометрия излома	368
Измерения изломов. Площадки наблюдения. Разделение зон. Достоверность отделения. «Привязка» двух рельефов. Однозначность функции. Разность микрорельефов. Инварианты траектории. Дискретное представление. Инварианты рельефа. Авторегрессия. Распределение высот рельефа. Масштабная инвариантность. Признаки дальнего действия. Самоподобие. Фракталы. Геометрические ограничения для фрактала. Измерения фрактальной размерности. Кусочный скейлинг. Фрактальность или нестационарность? Мультифракталы. Информативность. Фрактальность изломов. Вейвлеты. Сохранение информации. Многомасштабный анализ. Размерность процесса	
Глава 3. Динамика разрушения	397
§3.1. Система образец-машина	397
Спектр релаксации решетки. Скорости деформации. Жесткость образца и машины. Приведенная масса. Колебания системы. Автоколебания. Демонстратор автоколебаний. Автоколебательное разрушение. Устойчивость системы образец-машина. Предел устойчивости образца. Самоподдерживающееся разрушение. Скоростное плато диаграммы. Устойчивость образца с трещиной. Жесткость конструкции. Источники динамических сил. Нагружение жидкостью и газом. Нагружение взрывом. Кумулятивный эффект. Имплозия	
§3.2. Динамика трещин	424
Скорость трещины. Работа, поглощаемая трещиной. Трещина в упругой системе. Реверберация и автоколебания трещины. Кинетическая энергия трещины. Траектория трещины. Ветвление. Динамическое микроветвление. Дробление. Распределение осколков. Сплющивание. Безразмерные критерии течения. Трещины в гелях и жидкостях. Адиабатный разогрев. Время адиабатности. Неизотермическая вытяжка. Адиабатная локализация. Режим с обострением. Взрыв от нагрева изнутри. Взрыв от реакции на поверхности. Полосы адиабатного среза. Кинематика среза. Разогрев у кромки трещины. Степень адиабатности	
§3.3. Соударение	455
Упругое столкновение материальных точек. Столкновение плит. Отражение упругой волны. Пластическая волна. Ударная волна. Откол. Конкуренция структурных процессов откола. Повреждение импульсом излучения. Противодействие отколу. Косой удар. «Ротационная мода». «Точечный» удар. Кратер. Выброс. Пластическое проникание. Упругопластическое	

проникание. Нестационарное вдавливание. Глубина проникания. Сопротивление трения. Проникание с растрескиванием. Раскол канала. Имплантация частиц. Сверхглубокое проникание частиц. Моды скоростного проникания. Гидродинамическое проникание. Разогрев, плавление, испарение. Смена процессов динамического проникания. Соударения с космической скоростью. Пробивание. Воздействие на ударник. Упругая податливость преграды. Сила и глубина динамического прогиба. Равнопрочная гомогенная преграда. Неоднородные преграды. Композитная преграда. Динамический радиус преграды

Глава 4. Мезомеханика разрушения	502
§4.1. Взаимодействие трещин	502
Трещина в среде со структурой. Макро- и микротрещины. Взаимодействие трещин в плоскости. Взаимодействия двух параллельных трещин. Сценарии роста двух равных трещин. Неравные трещины. Экранирование. Разрушение перемычки. Конструктивные барьеры. Трещина в трех измерениях. Трехмерные системы трещин	
§4.2. Многосвязные трещины	514
Мосты. Равномерный «пунктир мостов». Эффективность мостов. Безопасный кластер трещин. Общая задача о мостах. Равновесие трещина – мосты. Хрупкие мосты. Условие старта. Свободная длина моста. Вытаскивание волокон. Вязкие мосты. Классы эффективности. Мосты расслоя. Направления оптимизации	
§4.3. Самоорганизация	534
Масштабы процессов. Структурные уровни. Флуктуации деформации. Анизотропия флуктуаций. Неустойчивость в мезомасштабах. Самоорганизация трещин. Сложные системы. Критические явления. Разрушение как критическое явление. Имитационное моделирование. Пучок волокон. Перколяция. Сетка упругих связей. Ренормгруппы. Вырождение размерности. Самоподобие и безмасштабность. Многмасштабность и структурные уровни. Самоорганизованная критичность. Траектории трещины. Депиннинг. Интерпретации скейлинга. Интегральное описание системы трещин. Критерий слияния пары трещин. Площадь тени. Условие неподвижности трещины. Условие устойчивости системы. Предел устойчивости системы многих трещин. Модуль упругости трещиноватой среды. Взрывное саморастрескивание. Самоподдерживающееся разрушение. Выбросы. Полоса саморастрескивания. Хрупкий срез. Прочность сыпучей среды. Полосы сдвига. Трещина в текучей двухфазной среде	

§4.4. Низкоразмерные мезообъекты	574
Фактор размерности. Дискретный спектр прочности. Упругая потеря устойчивости. Гибкие стержни при закритической упругости. Упругое сжатие кольца. Неустойчивости кручения. Трубы и оболочки под давлением. Растяжение трубки. Трубка из анизотропного материала. Конкуренция растяжения – сжатия и изгиба. Изгибаемые поверхности. Сморщивание. Фокус. Складки. Оболочки двойкой кривизны. Сферическая оболочка. Устойчивость оболочек. Неустойчивость при локальной пластичности. Неустойчивости плоской трещины. Автоколебания рельефа и траектории. Раздир. Бегущая трещина в трубе. Прокол	
§4.5. Разрушение поверхности	600
Поверхностные силы. Силы растрескивания. Конфигурации поверхностных трещин. Взаимодействие поверхностных трещин. Пределы растрескивания. Сетка трещин. Иерархическое растрескивание. Контактное растрескивание. Покрытия. Сцепление. Внутренние напряжения. Моды разрушения покрытия. Скол в покрытии. Переход скола в отслоя. Отслоя при изгибе. Отслоя от сжатия. Защита поверхности. Мягкие покрытия. Измерения прочности покрытий	
Задачи	627
Библиографический список	636

Краткое оглавление книги 2. Разрушение структур

Глава 5. Макрокомпозиции

- §5.1. Вязкость при сочетании хрупких компонентов
- §5.2. Хрупкие кристаллы
- §5.3. Некристаллические материалы
- §5.4. Композиции из волокон
- §5.5. Слоистые композиции
- §5.6. Архитектура композиции

Глава 6. Возникновение трещины

- §6.1. Трещина в атомных масштабах
- §6.2. Масштабы деформации
- §6.3. Зарождение трещины

Глава 7. Процессы хрупкого разрушения.

- §7.1. Скол
- §7.2. Скол в структурах
- §7.3. Квазискол
- §7.4. Зернограничное разрушение
- §7.5. Хрупкость границ
- §7.6. Отпускная хрупкость

Глава 8. Вязкое разрушение.

- §8.1. Процессы вязкого разрушения
- §8.2. Рост вязкой трещины
- §8.3. Очаги в микроструктуре
- §8.4. Вязкость двухфазных структур
- §8.5. Приграничное разрушение
- §8.6. Разрушение при ползучести
- §8.7. Неоднородность структур
- §8.8. Анизотропия пластичности и вязкости

Глава 9. Хрупкость в эксплуатации

- §9.1. Хладноломкость
- §9.2. Водородная хрупкость
- §9.3. Тепловое охрупчивание
- §9.4. Радиационное охрупчивание

Глава 10. Влияние среды на разрушение

- §10.1. Поверхностные силы. Адсорбция
- §10.2. Взаимодействия с газом
- §10.3. Взаимодействия с жидкостью
- §10.4. Деградация в электролитах
- §10.5. Коррозионные трещины
- §10.6. Взаимодействия твердых тел

Глава 11. Усталость

- §11.1. Разрушение при циклической деформации
- §11.2. Структурные процессы усталости
- §11.3. Контактная усталость
- §11.4. Факторы усталости в конструкции

Задачи

Библиографический список

Предметный указатель

Предисловие

Это завершающий том «Курса физики прочности» (первые два тома – «Дефекты решетки» [1] и «Деформация» [2] – вышли в 1997–1999 гг. и перерабатываются для нового издания). Курс предназначен для подготовки специалистов в области разработки, исследования, выбора и применения материалов – сплавов, композитов, керамик.

Все разделы курса читались в разное время автором в Московском институте стали и сплавов по разным программам подготовки инженеров, магистров, аспирантов для специальностей «Физика металлов», «Металловедение и термическая обработка», «Материаловедение», «Наноматериалы».

Стиль изложения соответствует *an advanced course* (в отличие от *textbook*): «чтобы студенту было понятно, а специалисту полезно». Как в учебнике, изложение идет «от начала», с обоснованием и выводом исходных соотношений (без отсылок: «как показано там-то, это так»). Но – как в монографии – на основе системного отбора ключевых публикаций анализируется современное состояние области знания, границы которой демонстрирует система примеров.

Если, может быть, примеры для сталей и сплавов преобладают, то это вряд ли только от предпочтений автора. Опыт и диапазон применения сплавов настолько широк, что взаимообмен идеями асимметричный. Понимание явлений и приемы оптимизации чаще переносятся от сплавов на керамику, композиты и пластики, чем наоборот. Из связей фактов известных для отдельных классов материалов, просистекает и новизна некоторых приводимых результатов.

Часть выводов и примеров (набранных пегитом) при первом ознакомлении можно пропустить. Но для практического освоения они нужны, равно как и важные частные случаи, вынесенные в задачи (ответы сообщаются в основном тексте).

Известным считается только то, что входит в программы базовых дисциплин для материаловедов и физиков (в частности, начала *сопротивления материалов* – прикладной теории упругости). Методы испытаний (и условия, когда они адекватно характеризуют материал)

обосновывает *механика разрушения*. Для этого раздела физики прочности есть фундаментальные руководства [3–5], но его нет в типовых программах вузов. Поэтому в первых параграфах дается (с постановкой задач и выводом) краткая сводка необходимых сведений.

«Первоначальная книга» для специалиста должна показывать, где исходные подробности к его задаче (или почему бесполезны некоторые правдоподобные ответы). Первоисточники коренных фактов указаны в библиографическом списке использованных работ. Трудность отбора для него – баланс между давними обстоятельными исследованиями фактов и избытком «современных воззрений» (иногда игнорирующих большую часть фактов). В незаслуженно забытых книгах устарела, быть может, интерпретация результата. Но в системе фактов – достоверных и неопровержимых и сегодня – иногда уже есть ответ и на новый вопрос. «Давнишние твердые факты» сильно ограничивают полет фантазии при синтезе новых моделей.

Книги на русском языке о частных проблемах базовых технологий остаются в мировой литературе уникальными: в СССР публиковали то, что на Западе прятали как технологические ноу-хау фирм. А перевес русскоязычных книг последнего двадцатилетия – следствие кризиса: «простой» специалистов дал время обобщить то, что накапливалось в жестком темпе прикладных разработок.

Сегодня поток научных (и псевдонаучных) публикаций избыточен. «Грантоискательство» генерирует информационный шум: «тремя выводами по двум точкам» подтверждают «новейшие модели современной науки». Все актуальнее формула Ломоносова: «Ныне ученые люди мало взирают на родившиеся в одной голове вымыслы и пустые речи... Мысленные рассуждения произведены бывают из надежных и много раз повторенных опытов». Опубликованное отбиралось с проверкой на непротиворечивость.

Доступность компьютеров и программ сделали численное моделирование специфическим занятием – часто уже в отрыве от физики и от техники. Результат «машинист-модельера» почитают самоценным, не нуждающимся в сопоставлении с совокупностью экспериментальных фактов. В публикациях встречаются сочетания параметров и допущений, в природе невозможные. Нередки даже явные ошибки в вычислениях – по симметрии результата, предельным переходам, порядкам величин. Когда набор численных решений ведет

себя похоже на объект природы, важно еще – до каких границ? Деформация и разрушение – явления многомерные. Для них адекватная одномерная количественная модель – редкая удача. Результаты численного моделирования приняты во внимание, если выполнен и анализ границ применимости модели.

В атласах фрактографии [6–14] систематизированы тысячи макро- и микроизображений изломов. Чтобы не объявлять несколько из подобных снимков «типичными», в книге приведены только рисованные принципиальные схемы изломов.

Знак \approx означает «приблизительно равно», знак \sim использован в двух смыслах: «порядка величины» или же «пропорционально», если он стоит между величинами разной размерности. Формула (1.2.3) – это формула (3) в §1.2; при отсылках внутри параграфа указывается просто (3).

По ограничениям полиграфии том разделен на две книги: «Разрушение материала» (главы 1–4 – макроскопические явления и методы изучения) и «Разрушение структур» (главы 5–11 – события в структуре, включая взаимодействия со средой). Нумерация глав, параграфов, формул, рисунков в двух книгах единая, библиографических ссылок – раздельная. В каждой из книг повторено полностью оглавление. Общий предметный указатель помещен в книге 2.

Необходимость написать «Курс физики прочности» (структура, стиль изложения и отбор материала трех его томов) проистекала из разносторонней деятельности и перспектив развития кафедры «Металловедения и физики прочности» Национального исследовательского технологического университета МИСиС.

Автор признателен коллегам С.А. Никулину, А.В. Кудре, А.Г. Глебову, за содействие в организации издания. Автор благодарит всех сотрудников кафедры за много лет незабываемого человеческого общения и совместной работы.

Автор благодарен проф. Б.А. Каливну и кафедре «Физических проблем материаловедения» НИЯУ МИФИ – рецензентам и Л.М. Цесарской – редактору всех томов.

Введение

Нет явления более обыденного и менее изученного, чем разрушение. Резать и ломать хлеб, точить нож, пилить и колоть дрова, молоть соль, отрывать нитку, косить траву, стричь волосы, забивать гвоздь, рвать бумагу, копать землю – все это разнообразные процессы разрушения в быту. Их аналоги в природе и в технике: растрескивание глины на высохшей луже и земной коры при землетрясениях; взламывание льда в ледоход на реке и ледоколом в океане; размыв берегов водой и резание стали струей воды; превращение камня в песок ветром и водой и помол угля до горючей пыли; расщепление дерева молнией и взрыв световода в лазерном пучке; сгорание метеоров и унос теплозащитного покрытия ракеты.

Общность этих процессов – в критериях и формах высвобождения упругой энергии. Их различия – в путях накопления упругой энергии и во внутренней структуре разрушаемых объектов. Она определяет место поглощения работы разрушения, ее величину и отсюда – способ, место, условия и время разрушения.

Помимо материаловедения разрушение разнообразных веществ и сред изучают геология и география, сейсмология и горное дело, технология материалов, сельскохозяйственная механика, биомеханика, строительная механика. В действительности это единый круг специфических задач физики конденсированных сред с многообразными приложениями.

Исторически первым был анализ разрушения конструкций Галилеем. Поведение конструкции описывают зависимостью $P(u)$, связывающей приложенную нагрузку P и перемещение u точки ее приложения. Разрушение конструкции – это потеря ее несущей способности: при некотором критическом перемещении u_c достигается максимум выдерживаемой нагрузки P_c , а далее $P(u)$ падает и некоторый элемент конструкции резко меняет форму. Причиной такой нелинейности диаграммы $P(u)$ может быть или упругая потеря устойчивости «по Эйлеру» (как при продольном сжатии стальной линейки), или упругопластическая неустойчивость (при переломе картонной трубки), или разрушение материала – нарушение его сплошности с распространением трещины.

Чтобы установить критерий разрушения элемента конструкции, первая задача: из его конфигурации и приложенных к нему сил найти

поле напряжений и деформаций в нем. Это задача *теории упругости* сплошной среды [15] (а с учетом и пластичности – *механики сплошных сред* [16]). Здесь есть единые уравнения и довольно универсальные методы их решения. Типовые решения задач упругости для важнейших конфигураций объектов техники рассматривает *сопротивление материалов*. Поля напряжений в конструкциях с трещиной исследует *механика разрушения* [4, 5], берущая начало от работ Гриффитса (1921) и Ирвина (1958). Теория упругости выясняет, может ли работать конструкция «как задумано», механика разрушения – сохранится ли работоспособность в том состоянии, «как оно есть».

Вторая задача: полученное описание поля напряжений сопоставить в его критических точках с макроскопическими характеристиками сопротивления материала деформации и разрушению. Эти *механические свойства* должны быть надежно измеримы стандартизованными методами (в адекватных внешних условиях), а их уровень гарантирован изготовителем материала (и конструкции). Механические свойства материалов впервые выделены как отдельный предмет исследования в книгах Н.Н. Давиденкова (1943) и Я.Б. Фридмана (1946) [17].

Но для материаловедения главная задача – третья: что предпринять, если уровень свойств нас не удовлетворяет. Различия материалов – в их структуре. Нужно знать процессы деформации и разрушения структур, чтобы создать структуру материала с требуемым комплексом механических свойств. *Физика прочности* соединяет анализ, с одной стороны, процессов деформации и разрушения макро- и микроструктур, с другой – многообразия внешних условий нагружения материала. Ее прикладная цель – синтез материала для данных условий работы на основе предсказания свойств.

Ежегодно человечество производит и расходует миллиард тонн материалов. Из них 99% – материалы конструкционные, назначение которых выдерживать некоторые нагрузки, не разрушаясь. Прочность материалов нельзя выразить одной цифрой. Пока нагрузки малые, запасы прочности металла огромные и выход из строя определяется текучестью. Разрушение рассматривали как неприятную аномалию.

Позднее столкнулись с многообразием разрушений при малой пластической деформации: от хладноломкости, усталости, ползучести и от различных макро- и микродефектов. Поняли, что и при

малости деформаций в конструкции запас пластичности для нее не безразличен (от местной перегрузки в малых объемах деформации опасно большие). Без пластичности металл вообще не нужен – одну лишь прочность обеспечит и камень. В сравнении с модулем Юнга E практический предел прочности используемых объемных материалов $\sigma_b \approx E/100$. Получали микрообразцы «материала с теоретической прочностью» $\sigma_b \sim E/10$. Но в них от малейшей царапины бежит трещина (с очень малой работой распространения). Так же разрушаются и наноструктуры любого назначения. Если у наноматериала нет прочности, это «порошок в кулечке».

Механика разрушения не интересуется происхождением базовой константы – работы разрушения. Ее цель – указать способ испытания материала и вычислить, что выдержит конструкция. Она предсказывает, «насколько плохо будет». От физики прочности ждут ответа на вопрос: «так что же делать?».

На атомном уровне разрушение однородной кристаллической решетки единообразно описывается через прочность межатомной связи, и порядок величины известен наперед. Разница – в предшествующей и сопутствующей разрыву местной пластической деформации. Многообразие классов материалов с качественно разным сопротивлением разрушению закладывается на уровне их микроструктур.

Для объемных процессов пластической деформации часто достаточно полагать микроструктуру однородной, наблюдать и измерять ее «в среднем». Разрушение – процесс образования поверхности – зависит от неоднородности часто решающим образом. Измерить неоднородность чего-либо всегда труднее уже просто по объему наблюдений. Но главное – не всегда легко установить: неоднородность чего и где связана с наблюдаемым разрушением и какова ее мера.

Физика деформации приобретает сегодня законченные очертания, и на ее базе развивается физика разрушения микроструктур. Она рассматривает следующий уровень явлений: причины и следствия поэтапного перехода от однородного объемного явления к локализованному поверхностному. Разнообразие неоднородных структур проявляется в физической картине разрушения иногда и прямо (при неизменной картине пластического течения).

Структура материала дискретна, каждый ее элемент имеет в пространстве четкие границы. Теория упругости – аппарат континуальной

теории сплошной среды. В приложениях его к средам с микроструктурой есть ограничения. Уже упругая энергия поликристалла нелокальная: она зависит не только от свойств зерен, но и от их взаимного размещения и размеров (через градиентные члены) [2]. Но для большинства масштабов осреднение корректно: множество элементов одного уровня в следующем масштабе можно рассматривать как однородную среду.

Аппарат механики разрушения предполагает среду однородной и изотропной. В приложениях его к микроструктурам аналогичные ограничения задаются явно: как характерные масштабы для элементарных механизмов пластической деформации (§1.7).

Физика разрушения определяет возможности и перспективы новых точек роста прикладных исследований. Азарт «компьютерного конструирования» композитов и сплавов охлаждается тем, что качество материала определяется комплексом свойств. Повышение любой одной характеристики качества обычно никому не нужно. Чем меньше в многокритериальной задаче размерность пространства, тем легче найти оптимум и тем меньше от этого пользы.

Конструктор задает некоторые стандартно определяемые свойства при недостатке понимания, что именно эти числа характеризуют и о чем они заведомо говорить не могут. Условия работы одного и того же материала в разных изделиях различаются – это дополнительные размерности «пространства требований», и их диапазон должна анализировать физика явлений. В его пределах может изменяться и сам набор необходимых свойств.

Рост энергонапряженности конструкций меняет, хотя и с запозданием, психологию конструктора. Он смирился с тем, что и по способу изготовления, и по условиям эксплуатации не бывает конструкций абсолютно без дефектов. Рост трещины составляет значительную «долю жизни» многих конструкций, и он должен быть заложен в расчеты регламента дефектоскопии, профилактики и ремонтов. Важно знать, при каких размерах дефекта пора прекратить эксплуатацию конструкции.

Экологическая безопасность техники, уникальной по габаритам, энергонапряженности и последствиям разрушения, заставляет вести проектные расчеты допустимого риска и классификации возможных аварий по месту, способу и темпу развития трещины. Для транспорт-

ных средств и больших сосудов давления и трубопроводов (в энергетике, химии, газо- и нефтепереработке) приемочный и регламентный периодический контроль становится недостаточным. Его дополняют непрерывным мониторингом конструкции в целом. Беспроводные сети цифровых датчиков акустической или электромагнитной эмиссии накапливают «историю роста» каждой малой трещины.

Проблемой физики прочности становится распознавание размеров и мест повреждения по совокупности накопленных сигналов, прогноз риска и обоснование остаточного ресурса. Для ответственного решения «да – нет» приемы статистики имеют предсказующую силу только вместе с априорной информацией: о механизмах разрушения и «слабых местах» в структурах,

Разрушение – типичный объект для мультидисциплинарного исследования. В макроскопических и в микроскопических процессах разрушения металлов, пластиков, тканей, бумаги, дерева и камня – и как конструкционных материалов, и как предмета технологии – много общего не только между собой, но и с объектами геологии, биологии и медицины. Между смежными областями происходит обмен идеями и методами.

Однако перенос моделей и приемов из одной сферы в другую иногда приводит и к нелепостям. Даже в пределах только технологии металлов одни и те же явления, очевидные для специалистов, например, по обработке давлением, остаются загадкой для технологов по резанию (и наоборот). События многомерны и многомасштабны. Сопоставление краевых условий, управляющих безразмерных параметров, диапазона их значений и областей существования явлений выясняет, что «правы все» – каждый в своем круге событий, где доминируют разные (известные) законы.

Из анализа одного процесса переход к другому непредсказуем. Качественный скачок при монотонном изменении условий – *кроссовер*, место пересечения двух зависимостей. Чтобы его найти, надо сопоставить два механизма. Для синтеза надо знать: где и как стыкуются корни далеко разошедшихся ветвей? Какие подходы, приемы и решения переносимы через границу – на более широкий круг явлений? Как опознать тупиковый путь, где – как знает другая ветвь – решения нет в принципе? Где тот минимум сведений, который позволяет «не искать под фонарем»?

Явления разрушения на уровне микроструктур утвердились как новая область исследований после международной конференции 1959 г. (Ее труды в русском переводе – «Атомный механизм разрушения» [18]). Следующим обобщением стала в 1968–1972 г. семитомная энциклопедия «Разрушение» [19]. Сегодня о разрушении есть сотни монографий. На одном краю – книги для конструктора: о поведении трещины в предположительно однородном материале. На другом – незаменимые для производства атласы макро- и микродефектов материала, которые следует исключать.

Гораздо меньше представлена середина – переход от описания разрушения микроструктур к прогнозу и синтезу материала. Здесь анализ выделяет доминирующую цепь событий разрушения в данных обстоятельствах. Выбираются способы измерения критических процессов и неоднородностей структуры. И после этого намечаются технологии, ведущие к желаемой структуре.

Книга представляет попытку свертки информации о разрушении для материаловеда: выделения минимума необходимого – в сопоставимом и непротиворечивом виде, «состыкованном» со смежными областями знания.

ГЛАВА 1. МАКРОМЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

§1.1. Концентраторы напряжений

Напряжения в однородной сплошной среде. Плосконапряженное и плоскодеформированное состояние. Главные напряжения. Концентрация напряжений. Сферическая полость под гидростатическим давлением. Сферическая полость при одноосном растяжении. Цилиндрическое отверстие. Эллиптическая прорезь. Произвольная прорезь. Глубокие вырезы. Сингулярные концентраторы. Коэффициент интенсивности напряжений. Порядок особенности. Конформное отображение полей. Уступ поверхности.

Напряжения в однородной сплошной среде. Во всяком твердом теле есть упругое дальноедействие: сила, приложенная к одной его точке, создает напряжения $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ во всем объеме, убывающие с расстоянием \mathbf{r} от точки приложения.

Дальноедействие упругое и в тех случаях, когда твердое тело деформируется пластически или от теплового расширения, фазовых превращений, магнитных и сегнетоэлектрических эффектов. И если есть, например, кулоновское дальноедействие зарядов в диэлектриках или магнитное – доменов в ферромагнетиках, то оно неизменно уравновешено упругим полем. При учете обратного действия упругого поля на поле – источник сил возникают *связанные задачи упругости*: термоупругости [20], пьезоупругости, магнитоупругости [21], термодинамики фазовых превращений [22, 23].

Упругое дальноедействие имеет место во всех масштабах. Поэтому физика прочности широко использует приемы и соотношения механики разрушения однородной упругой среды и для микроструктур (при аккуратном учете ограничений, обусловленных структурой материала).

Для описания твердого тела под нагрузкой простейшее приближение – однородная изотропная линейно упругая среда. В ней зависимость перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ от координаты \mathbf{r} следует из основного уравнения теории упругости [15]

$$(1 - 2\nu)\nabla^2\mathbf{u} + \nabla(\nabla\mathbf{u}) = 0, \quad (1.1.1)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Дифференцирование компонент перемещения u_i по координатам x_j дает деформации

$$e_{ij}(\mathbf{r}) = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2 \quad (1.1.2)$$

– компоненты тензора деформации $e_{ij}(\mathbf{r})$.

Линейный закон Гука связывает напряжения с деформациями [15]: на плоскости с нормалью \mathbf{i} касательные напряжения в направлении \mathbf{j} составляют

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad (1.1.3a)$$

а нормальные

$$\sigma_{ii} = 2G[e_{ii} + \nu e_{\ell\ell}/(1 - 2\nu)], \quad (1.1.3b)$$

где G – модуль сдвига.

Модуль Юнга

$$E = 2(1 + \nu)G; \quad (1.1.4)$$

Дилатация (относительное изменение объема)

$$e_{\ell\ell} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

и *гидростатическое давление*

$$p = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 \quad (1.1.5)$$

не зависят от выбора осей.

Касательную плоскость к поверхности тела в точке \mathbf{r} задают два ортогональных единичных вектора \mathbf{t} и \mathbf{b} , лежащих в этой плоскости. Нормаль к поверхности $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}$. Краевыми условиями для уравнения (1) служат нормальные напряжения на поверхности $\sigma_{nn}(\mathbf{r})$ и касательные $\sigma_{nt}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{nb}(\mathbf{r})$. Там, где поверхность свободная, они обращаются в нуль. Если в некотором измерении тело бесконечное, то на бесконечности напряжения предполагают однородными (в частности, они могут быть равными нулю).

Общий способ решения уравнения (1) для трехмерного векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ предложил В. Томсон (лорд Кельвин) в 1848 г. Он нашел поле смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ в неограниченной упругой среде от сосредоточенной силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$, приложенной в точке \mathbf{r}_0 . (Позднее $\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ назвали тензором Грина для уравнения упругости; само понятие «тензор» появилось только в 1899 г.) Тогда любая задача приводится [15] к интегралам от заданных сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$, распределенных по объему (или по некоторой поверхности). Но эти интегралы редко вычислимы в замкнутом виде, и для типовых случаев нашли ряд частных решений и приемов.

Для двумерного поля, если деформация плоская (по оси z смещения $u_z \equiv 0$, деформация $e_{zz} \equiv 0$, а также $e_{xz} \equiv 0$ и $e_{yz} \equiv 0$), уравнение (1) после учета равновесия, непрерывности смещений \mathbf{u} и совместности деформаций сводится [15] к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 (\nabla^2 \chi) = 0 \quad (1.1.6)$$

для скалярной функции напряжений $\chi(x, y)$ на плоскости x, y (функция Эйри). Когда $\chi(x, y)$ найдена, напряжения определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -(\partial^2 \chi / \partial x \partial y); \\ \sigma_{xx} &= \partial^2 \chi / \partial y^2; \\ \sigma_{yy} &= \partial^2 \chi / \partial x^2; \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

а деформации

$$\begin{aligned} e_{xx} &= [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]/E; \\ e_{yy} &= [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]/E. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Плосконапряженное и плоскодеформированное состояние.

В двумерной задаче заданы силы, зависящие только от координат (x, y) . Но из-за соотношений (8) напряжение σ_{zz} и деформация e_{zz} «вдоль третьей оси» не могут обращаться в нуль одновременно. Если вдоль оси z напряжение $\sigma_{zz} = 0$ (*плосконапряженное состояние*), то в среде есть *пуассоново сжатие* $e_{zz} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/E$ и соответствующие ему смещения u_z вдоль этой оси, а потому из (8) получаются также деформации сдвига e_{xz} и e_{yz} по нормали к плоскости (x, y) .

Когда же краевые условия запрещают пуассоново сжатие, то $e_{zz} = 0$, но появляется растягивающее напряжение

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}); \quad (1.1.9)$$

сохраняющее размеры тела вдоль оси z . Это *плоскодеформированное состояние* («плоская деформация»). И тогда сдвиги $e_{xz} = 0$ и $e_{yz} = 0$.

Плосконапряженное состояние – некоторое приближение для тонкого листа. Если его толщина $h \ll R$ много меньше характерного масштаба R в плоскости листа (радиуса концентратора, длины трещины и т.п.), то можно принять $\sigma_{zz}(z) \equiv 0$. Тем самым пренебрегают изменением по толщине листа всех напряжений $\sigma_{ij}(z)$ и разрешают смещения u_z по нормали к листу.

Плоскодеформированное состояние – реальная ситуация для бесконечной среды, корректно описываемая теорией упругости. Действительно, если бы деформация $e_{zz}(z) = \text{const} \neq 0$, то $u_z(\infty) = \int_R^\infty e_{zz}(z) dz \rightarrow \infty$; на бесконечности $z \rightarrow \infty$ смещения $u_z \rightarrow \infty$. Но любые возмущения в конечном объеме среды не могут вызывать бесконечные смещения на бесконечности. Поэтому $e_{zz}(z) \equiv 0$ и $u_z \equiv 0$.

Деформацию микрообъектов механики материалов обычно можно описывать как плоскую: по сравнению с элементом микроструктуры образец настолько больше, что его можно полагать бесконечной средой (с осторожностью – для событий в микроструктуре у поверхности образца).

Главные напряжения. Если в ортогональных координатах $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ задан тензор напряжений σ_{ij} , то на площадке, заданной единичным вектором нормали \mathbf{n} , в направлении \mathbf{b} действует напряжение

$$\sigma_{nb} = \alpha_{ni} \alpha_{bj} \sigma_{ij}. \quad (1.1.10)$$

В этом преобразовании тензора σ_{ij} к новым осям [15] произведения вида $\alpha_{ni} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$ – направляющие косинусы соответствующих осей (\mathbf{n} или \mathbf{b}) по отношению к исходным $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В каждой точке \mathbf{r} любого поля напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ можно преобразованием (10) найти три таких взаимно перпендикулярных оси 1, 2, 3 (*главные оси*), что в обозначенных ими координатных плоскостях касательные напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$. При этом в числе *главных нормальных напряжений* $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$ есть наибольшее (σ_{11}) и наименьшее (σ_{33}) по сравнению с любым σ_{nn} при ином выборе осей.

При плоской деформации отыскание главных осей и главных напряжений поля σ_{ij} , заданного в некоторой системе прямоугольных координат x, y , сводится к повороту этих осей на угол ψ около оси \mathbf{k} . В некоторой плоскости $\mathbf{n}(\psi)$ нормальное напряжение составит

$$\sigma_{nn}(\psi) = \sigma_{xx} \cos^2 \psi + \sigma_{yy} \sin^2 \psi - 2 \sigma_{xy} \sin \psi \cos \psi.$$

Условие максимума $d\sigma_{nn}/d\psi = 0$ дает для искомого угла ψ_0 между главной осью и осью x соотношение

$$\text{tg } 2\psi_0 = 2\sigma_{xy} / (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \quad (1.1.11)$$

(задача 1).

Главные напряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{nn}(\psi_0) = \sigma_{xx} \sin^2 \psi_0 + \sigma_{yy} \cos^2 \psi_0 - 2 \sigma_{xy} \sin \psi_0 \cos \psi_0; \quad (1.1.12a)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{nn}(\psi_0 + \pi/2) = \sigma_{xx} \cos^2 \psi_0 + \sigma_{yy} \sin^2 \psi_0 + 2 \sigma_{xy} \sin \psi_0 \cos \psi_0$$

а наибольшее касательное напряжение $\tau_{\max} = |\sigma_{11} - \sigma_{22}|/2$ будет

$$\tau_{\max} = |(\cos 2\psi_0)(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/2 - (\sin 2\psi_0)\sigma_{xy}|; \quad (1.1.12б)$$

Общий случай $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33} \neq 0$ – это *трехосное напряженное состояние*. Если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – главные оси, а плоскость \mathbf{n} параллельна оси \mathbf{k} и наклонена на угол θ к плоскости \mathbf{j} , то для направления \mathbf{b} в ней $\alpha_{bi} = \cos \theta$; $\alpha_{ni} = -\sin \theta$; $\alpha_{bj} = \sin \theta$; $\alpha_{nj} = \cos \theta$. Из (10) касательное напряжение в такой плоскости $\sigma_{nb}(\theta) = (\sigma_{jj} - \sigma_{ii})(\sin 2\theta)/2$. Его абсолютная величина $\tau = |\sigma_{nb}(\theta)|$ наибольшая, когда \mathbf{n} – плоскость биссектрисы для координатных плоскостей \mathbf{i} и \mathbf{j} ($\theta = \pm 45^\circ$). Она составляет

$$\tau_3 = |\sigma_{11} - \sigma_{22}|/2;$$

Аналогично

$$\tau_1 = |\sigma_{33} - \sigma_{22}|/2; \quad (1.1.13)$$

$$\tau_2 = |\sigma_{33} - \sigma_{11}|/2$$

– всего есть три пары *плоскостей наибольших касательных напряжений* (наклоненных «крест-накрест» на $\pm 45^\circ$ к каждой паре главных осей). В частности, при $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ напряжения гидростатические: из (13) наибольшие касательные $\tau_k = 0$, а значит и в любой плоскости касательные $\tau = 0$.

Концентрация напряжений. Постулаты сопротивления материалов – «теории прочности»: разрушение конструкции наступит по достижении где-то некоторого критического напряжения (или деформации). Сравнением с действующим напряжением оценивают «кратность запаса».

Но к самому событию разрушения «теории прочности» неприменимы. Если «на бесконечности» действуют однородные напряжения $\sigma_{ij}(\infty)$, то в бесконечной однородной среде и все поле однородное: $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(\infty)$. Но разрушение не бывает однородным «рассыпанием на атомы». Трехмерное 3D-поле порождает единственную двумерную 2D-поверхность трещины. Для такого «вырождения размерности» [24] исходное поле должно быть неоднородным, и существенно не только наибольшее напряжение «в точке старта» трещины, но и закон

его убывания с расстоянием. Поэтому в основе механики разрушения лежат задачи о *концентрации напряжений* – их перераспределении, обусловленном геометрией тела или сосредоточением внешних или внутренних сил.

Концентратор напряжений – местное возмущение конфигурации, где радиус кривизны R много меньше, чем у остальной поверхности тела. Если в однородной среде силовые линии поля напряжений прямые, то у концентратора они сгущаются (рис. 1.1.1). Там, где радиус кривизны R наименьший, достигается наибольшее растягивающее напряжение вдоль поверхности σ_{\max} . Местную перегрузку измеряет отношение σ_{\max} на контуре концентратора к приложенному однородному напряжению σ_{∞} – *коэффициент концентрации напряжений* $K = \sigma_{\max} / \sigma_{\infty}$. Известны решения задач теории упругости о поле сотен различных концентраторов напряжений [25], но принципиально интересны несколько типовых случаев.

Сферическая полость под гидростатическим давлением. Когда сферическая полость радиусом R в однородной неограниченной среде (рис. 1.1.2) нагружена изнутри давлением газа p , оно всюду одинаково и направлено по нормали к поверхности полости. На бесконечности напряжений нет.

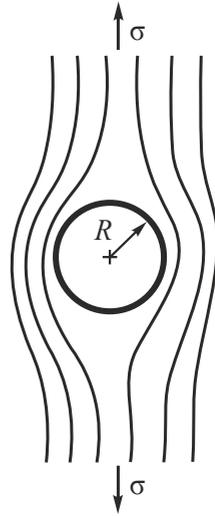


Рис. 1.1.1. Концентрация напряжений при одноосном растяжении – силовые линии поля напряжений около отверстия в бесконечной плоскости

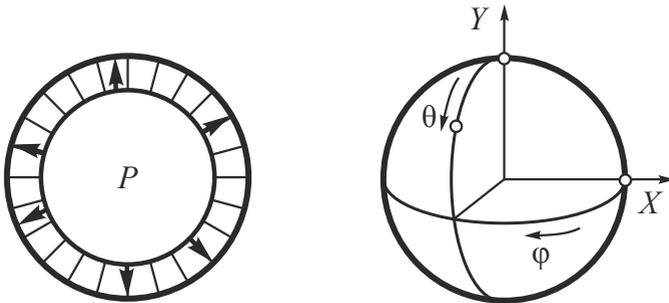


Рис. 1.1.2. Сферическая полость в однородной неограниченной среде; нагружение изнутри давлением p

По симметрии перемещения в среде $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ только радиальные. В полярных координатах r, θ, φ главные деформации $e_{rr} = du/dr$, а удлиненные любого экватора $e_{\theta\theta}(r) = e_{\varphi\varphi}(r) = u(r)/r$. Тогда условие сохранения объема

$$e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\varphi\varphi} = 0 \quad (1.1.14)$$

дает для определения $u(r)$ уравнение

$$du/dr = -2u/r.$$

Его решение $u = C/r^2$, и тогда деформации $e_{rr} = -2C/r^3$. Напряжения $\sigma_{rr} = Ee_{rr}$ на поверхности полости уравновешены давлением: $\sigma_{rr}(R) = -p$. Этим определяется постоянная C , так что

$$\sigma_{rr} = -p/\rho^3; \quad (1.1.15)$$

где $\rho = r/R$ – безразмерное расстояние от центра сферы.

Наибольшие напряжения на поверхности полости ($\rho = 1$): радиальные сжимающие $\sigma_{rr}(1) = -p$; тангенциальные растягивающие

$$\sigma_{\theta\theta}(1) = p/2, \quad (1.1.16a)$$

а тогда из (13) касательные

$$\tau = 3p/4. \quad (1.1.16б)$$

Эти напряжения только меняют знак, если вся среда нагружена гидростатическим давлением p , а у полости поверхность свободна.

Сферическая полость при одноосном растяжении. Если в бесконечной среде вдоль оси z действует напряжение $\sigma_{zz}(\infty) = \sigma_\infty$, то в записи через безразмерные расстояния от центра сферы $\rho = r/R$ и безразмерные напряжения $s_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_\infty$ наибольшие растягивающие напряжения (в экваториальной плоскости $z = 0, \theta = 0$) составляют [15]

$$s_{\theta\theta}(\rho, 0) = 1 + [(4 - 5\nu)/\rho^3 + 9/\rho^5]/[2(7 - 5\nu)]. \quad (1.1.17a)$$

Независимо от размера полости на ее экваторе $\rho = 1$ достигается напряжение

$$s_{\theta\theta}(1;0) = (27 - 15\nu)/[2(7 - 5\nu)]. \quad (1.1.17б)$$

Это коэффициент концентрации напряжений $K = s_{\theta\theta}(1;0)$ – отношение наибольшего растягивающего напряжения на контуре полости ($\rho = 1$) к приложенному однородному напряжению σ_∞ . При коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$ он составит $K = 33/16 \approx 2,06$ (двукратная перегрузка).

Хотя силовые линии поля вблизи полости сгущаются, сумма сил неизменна. До образования полости на единичный круг $\rho \leq 1$ площадью π действовало напряжение

$s_{\theta\theta} = 1$ и сила $P_0 = \pi s_{\theta\theta} = \pi$. После удаления вещества из сферы на всей остальной экваториальной плоскости добавилось напряжение $[s_{\theta\theta}(\rho, 0) - 1]$. Суммарная сила от него

$$P = \int_1^{\infty} 2\pi\rho[s_{\theta\theta}(\rho, 0) - 1]d\rho = P_0.$$

В различных задачах о концентраторах подобное соотношение используют как контрольное.

Для полости в виде трехмерного эллипсоида известно поле напряжений (в эллиптических интегралах) при однородном напряжении $\sigma_{ij}^{(\infty)}$ в среде на бесконечности [26]. Отсюда, устремив к бесконечности один из диаметров эллипсоида, можно получить решение двумерной задачи – об эллиптической прорези в плоскости. Но оно представимо в элементарных функциях и ищется проще.

Цилиндрическое отверстие. Простейший концентратор в плоскости – цилиндрическое отверстие радиусом R в однородной неограниченной среде (см. рис. 1.1.1), растягиваемой вдоль оси y однородным на бесконечности напряжением σ_{∞} (*задача Кирши*, 1898). В основном уравнении теории упругости для плоской деформации (6)

$$\nabla^4 \chi(r, \theta) = 0 \quad (1.1.18a)$$

в цилиндрических координатах r, θ оператор

$$\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial r^2 + r^{-1} \partial/\partial r + r^{-2} \partial^2/\partial \theta^2 \quad (1.1.19a)$$

и компоненты напряжения [15]

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \partial^2 \chi / \partial r^2; \\ \sigma_{rr} &= r^{-1} \partial \chi / \partial r + r^{-2} \partial^2 \chi / \partial \theta^2; \\ \sigma_{r\theta} &= r^{-2} \partial \chi / \partial \theta - r^{-1} \partial^2 \chi / \partial r \partial \theta. \end{aligned} \quad (1.1.20a)$$

Переходя к безразмерным напряжениям $s_{ij} = \sigma_{ij} / \sigma_{\infty}$ и расстояниям от центра отверстия $\rho = r/R$, перепишем уравнение (18a) в виде

$$\nabla^4 \chi(\rho, \theta) = 0, \quad (1.1.18b)$$

где оператор

$$\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial \rho^2 + \rho^{-1} \partial/\partial \rho + \rho^{-2} \partial^2/\partial \theta^2. \quad (1.1.19b)$$

Тогда напряжения

$$s_{\theta\theta} = \partial^2 \chi / \partial \rho^2;$$

$$s_{\rho\rho} = \rho^{-1}\partial\chi/\partial\rho + \rho^{-2}\partial^2\chi/\partial\theta^2; \quad (1.1.20б)$$

$$s_{\rho\theta} = \rho^{-2}\partial\chi/\partial\theta - \rho^{-1}\partial^2\chi/\partial\rho\partial\theta.$$

Если угол θ отсчитывается от оси x , то при $\theta = \pi/2$ напряжения вдоль оси растяжения $s_{yy}(\rho) = s_{\rho\rho}(\rho, \pi/2)$, а поперек $s_{xx}(\rho) = s_{\theta\theta}(\rho, \pi/2)$.

В задаче четыре краевых условия. На бесконечности (при $\rho \rightarrow \infty$) приложенные напряжения $s_{yy} = 1$, $s_{xx} = 0$ от образования отверстия не меняются:

$$s_{\rho\rho}(\infty, \pi/2) = 1; \quad (1.1.21а)$$

$$s_{\theta\theta}(\infty, \pi/2) = 0.$$

На свободной поверхности отверстия (при $\rho = 1$) обращаются в нуль радиальное напряжение $s_{\rho\rho}$ и касательное $s_{\rho\theta}$:

$$s_{\rho\rho}(1, \theta) = 0; \quad (1.1.21б)$$

$$s_{\rho\theta}(1, \theta) = 0.$$

Общий вид решения $\chi(\rho, \theta)$ сконструируем из следующих соображений. В задаче две оси симметрии ($x = 0$ и $y = 0$), так что напряжения не меняются от замены ρ на $-\rho$. Поэтому $\chi(\rho, \theta)$ может содержать только некоторые четные степени ρ^{2m} с целым m , а кроме них $\ln \rho$, так как вторая производная $\partial^2(\ln \rho)/\partial\rho^2 = -\rho^{-2}$; то же есть четная степень ρ . Все $m \leq 1$ [иначе по (20б) при $\rho \rightarrow \infty$ некоторые $s_{ij} \rightarrow \infty$] отверстие создаст на бесконечности бесконечные напряжения.

Угол θ может входить в коэффициенты при ρ^{2m} только в виде $\cos(2q\theta)$ с целыми q , чтобы выполнялись условия симметрии $\chi(\theta) = \chi(-\theta) = \chi(\pi + \theta) = \chi(\pi - \theta)$. Коэффициент при $\ln \rho$ не содержит θ (иначе $\ln \rho$ сохранится в $s_{\rho\rho}$ и будет важен знак ρ).

Чтобы удовлетворять уравнению $\nabla^4\chi = 0$ и краевым условиям (21), в $\chi(\rho, \theta)$ потребуются шесть констант. Выберем поэтому

$$\chi(\rho, \theta) = (A_1\rho^2 + A_2\ln\rho + A_3\rho^{-2}) + (B_1\rho^2 + B_2 + B_3\rho^{-2})\cos 2\theta; \quad (1.1.22)$$

Иные степени ρ^m или же $\cos q\theta$, $\sin q\theta$ появляются только при некруговом отверстии [27] или при анизотропии материала. (Например, для кругового отверстия в ортотропной среде, где вдоль и поперек направления растяжения модули Юнга разные, к (22) добавятся слагаемые с ρ^{-6} и ρ^{-8} , умноженные на показатель анизотропии).

Дифференцируя (22), получим

$$\begin{aligned} s_{\theta\theta} &= (2A_1 - A_2\rho^{-2} + 6A_3\rho^{-4}) + (2B_1 + 6B_3\rho^{-4})\cos 2\theta; \\ s_{\rho\rho} &= (2A_1 + A_2\rho^{-2} - 2A_3\rho^{-4}) - (2B_1 + 4B_2\rho^{-2} + 6B_3\rho^{-4})\cos 2\theta; \\ s_{\rho\theta} &= 2(B_1 - B_2\rho^{-2} - 3B_3\rho^{-4})\sin 2\theta. \end{aligned} \quad (1.1.23а)$$

Сравнив (23) и (19), увидим, что $(s_{\theta\theta} + s_{\rho\rho}) = \nabla^2\chi$. Тогда из уравнения $\nabla^4\chi = 0$ следует $\nabla^2(s_{\theta\theta} + s_{\rho\rho}) = 0$, для чего нужно $A_3 = 0$.

При $\rho \rightarrow \infty$ от (23а) остается

$$s_{\theta\theta}(\infty) = 2A_1 + 2B_1 \cos 2\theta;$$

$$s_{\rho\rho}(\infty) = 2A_1 - 2B_1 \cos 2\theta;$$

и из условий (21) получим $(2A_1 + 2B_1) = 1$ и $(2A_1 - 2B_1) = 0$, так что $A_1 = B_1 = 1/4$. Переписав теперь (23а) в виде

$$\begin{aligned} s_{\theta\theta} &= (1/2 - A_2\rho^{-2}) + (1/2 + 6B_3\rho^{-4})\cos 2\theta; \\ s_{\rho\rho} &= (1/2 + A_2\rho^{-2}) - (1/2 + 4B_2\rho^{-2} + 6B_3\rho^{-4})\cos 2\theta; \\ s_{\rho\theta} &= (1/2 - 2B_2\rho^{-2} - 6B_3\rho^{-4})\sin 2\theta, \end{aligned} \quad (1.1.23б)$$

найдем оставшиеся три постоянные. Чтобы на свободной поверхности отверстия отсутствовали и нормальные напряжения $s_{\rho\rho}(1, \theta) = 0$, и касательные $s_{\rho\theta}(1, \theta) = 0$ при всех θ одновременно, надо в (23) положить

$$\begin{aligned} (1/2 + A_2) &= 0; \\ (1/2 + 4B_2 + 6B_3) &= 0; \\ (1/2 - 2B_2 - 6B_3) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $A_2 = B_2 = -1/2$; $B_3 = 1/4$, и тогда поле напряжений около кругового отверстия

$$\begin{aligned} s_{\theta\theta} &= [1 + 1/\rho^2 + (1 + 3/\rho^4)\cos 2\theta]/2; \\ s_{\rho\rho} &= [1 - 1/\rho^2 - (1 + 4/\rho^2 - 3/\rho^4)\cos 2\theta]/2; \\ s_{\rho\theta} &= [(1 + 2/\rho^2 - 3/\rho^4)\sin 2\theta]/2. \end{aligned} \quad (1.1.23в)$$

Выполняется условие сохранения сил

$$\int_1^\infty [s_{\theta\theta}(\rho, 0) - 1] \rho \, d\rho = 1.$$

Растягивающие напряжения – наибольшие на «горизонтальной» оси x (на луче $\theta = 0$). Здесь они составляют

$$s_{\theta\theta}(\rho, 0) = 1 + 1/(2\rho^2) + 3/(2\rho^4). \quad (1.1.23г)$$

Коэффициент концентрации напряжений $K = s_{\theta\theta}(1;0) = 3$ не зависит от размеров кругового отверстия.

Касательные напряжения наибольшие в той же точке $\rho = 1, \theta = 0$, но в плоскости, наклоненной к оси x на $\pm 45^\circ$, и коэффициент их концентрации – также 3 (*задача 2*).

По сравнению со сферической полостью (17) напряжения от кругового отверстия в плоскости убывают с расстоянием медленнее (как $1/\rho^2$ вместо $1/\rho^3$), а концентрация напряжений сильнее (трехкратная против двукратной). Но уже на расстоянии от кромки, равном диаметру отверстия (когда $\rho = 3$), наибольшее напряжение $s_{\theta\theta}(3;0) = 29/27$ превышает приложенное меньше чем на 8%.

Эллиптическая прорезь. Более сильный концентратор – щель, перпендикулярная оси растяжения y (рис. 1.1.3). При длине $2L$ и наибольшей (в точке $x = 0$) ширине $2H$ щель тонкая: $H \ll L$. Выписав направление нормали к контуру щели \mathbf{n} и касательной \mathbf{t} , надо в каждой точке контура выполнить аналогичные (21) краевые условия $s_{nt} = 0$ и $s_{nn} = 0$. Наименьший радиус кривизны контура $R - y$ ее «острых кромок» $x = L$. Здесь концентрация напряжений наибольшая, и ее описывает компонента поля $\sigma_{yy}(x, 0)$ на продолжении длинной оси щели ($x > L$).

Известно точное решение для щели, очерченной эллипсом $(x/L)^2 + (y/H)^2 = 1$ с полуосями L и H и отношением осей $k = H/L \leq 1$. Наименьший (в точке $x = L$) радиус кривизны эллипса $R = k^2L$. В безразмерных координатах $\xi = x/L$; $\eta = y/L$ этот эллипс $\xi^2 + (\eta/k)^2 = 1$, захватывает отрезок $-1 \leq \xi \leq 1$ оси ξ .

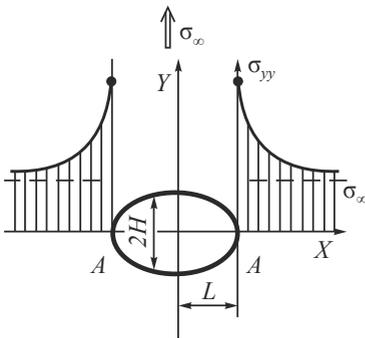


Рис. 1.1.3. Эллиптическая щель, перпендикулярная оси растяжения y ; A – точка наибольшего растяжения σ_{\max} вдоль поверхности

Для вычисления поля $s_{ij}(\xi, \eta)$ используют конформное отображение внешности эллипса на внешность круга (Колосов, 1909) [26–29], или же само уравнение (18) переписывают [5] в эллиптических координатах (Инглис, 1913). Но преобразования так громоздки, что классические руководства, указав путь решения, не приводят окончательного явного вида поля $s_{ij}(\xi, \eta)$.

Если довести их выкладки до конца, зависимость безразмерного напряжения $s_{yy}(\xi, 0)$ от безразмерного расстояния $\xi = x/L$ до центра эллипса свертывается к виду [30]

$$s_{yy}(\xi, 0) = 1 + \alpha_1/U + \alpha_2/U^2 + \alpha_3/U^3, \quad (1.1.24)$$

где

$$U(\xi) = [(\xi^2 + k^2 - 1) + |\xi|(\xi^2 + k^2 - 1)^{1/2}]/2;$$

$$\alpha_1 = 1/2; \alpha_2 = 3k^2(1+k)/4; \alpha_3 = k^2(1+k)^2(1-k)/8;$$

Имеет место подобие полей: напряжения $s_{yy}(\xi)$ определяются безразмерным расстоянием $\xi = x/L$, т.е. они убывают тем медленнее, чем щель больше. Распределение напряжений $s_{yy}(\xi)$ при $\xi \leq 3$ показано на рис. 1.1.4. На расстоянии от кромки, равном длине щели (при $\xi = 3$) концентрация уже незначительна: все $s_{yy} \leq 1 + 2/27$ при любых k .

На «острой кромке» отверстия (А на рис. 1.1.3) коэффициент концентрации напряжений $K = s_{yy}(1)$ составит (задача 3)

$$K = 1 + 2/k \quad (1.1.25a)$$

или

$$K = 1 + 2\sqrt{(L/R)}. \quad (1.1.25b)$$

При неизменном отношении осей k коэффициент концентрации напряжений (25) не зависит от размера щели $2L$. Чем тоньше щель и острее ее кромка (чем меньше k и R), тем сильнее концентрация напряжений на ней.

При $k = 1$ эллипс превращается в окружность, тогда $\xi = \rho$; $U = \rho^2$, $\alpha_2 = 3/2$, $\alpha_3 = 0$, отчего (24) совпадает с (23) и $K = 3$. При всех $k < 1$ концентрация $K > 3$.

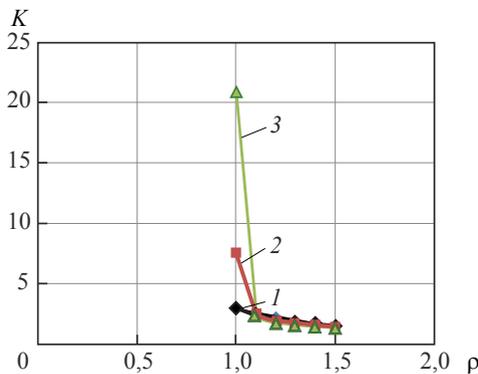


Рис. 1.1.4. Распределение напряжений $\sigma_{yy}(x, 0)$ на продолжении длинной оси эллиптической щели, перпендикулярной оси растяжения y ; $k = H/L$ – отношение осей: 1 – $k = 1$; 2 – $k = 1/3$; 3 – $k = 1/10$

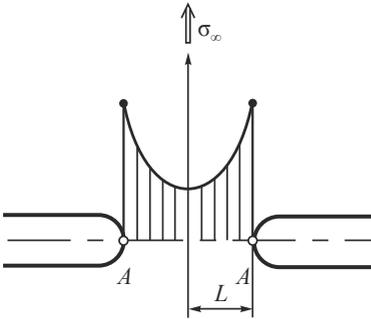


Рис. 1.1.5. Два симметричных глубоких выреза в неограниченно широкой плите;
 $\sigma_{\infty} = Q/2L$ – номинальное напряжение в «живом сечении» AA от растягивающей силы Q , приложенной к плите на бесконечности

Глубокие вырезы. Пусть неограниченно широкая плита имеет два симметричных глубоких выреза (рис. 1.1.5), оставляющих «живое сечение» AA шириной $2L$, а приложенная к плите на бесконечности растягивающая сила Q создает в этом узком сечении AA напряжение, в среднем равное $\sigma_{\infty} = Q/2L$ (как для ленты шириной $2L$, растягиваемой той же силой Q).

В точке A растягивающее напряжение $\sigma_{\max} = K\sigma_{\infty}$ и коэффициент концентрации напряжений $K > 1$. Хотя по сравнению с лентой материала больше, но силовые линии стянуты к надрезу, и напряжение здесь выше.

Точные решения известны для выреза, очерченного любой кривой второго порядка (Нейбер, 1958). Если это гиперболы с наименьшим радиусом кривизны R , то при безразмерном радиусе $\rho = R/L$ коэффициент концентрации напряжений [31]

$$K = [2(1 + \rho)] / \{ \rho + [(1 + \rho)\sqrt{\rho}] \operatorname{arcctg} \sqrt{\rho} \}. \quad (1.1.26)$$

Произвольная прорезь. Приближенное описание поля $\sigma_{yy}(x, 0)$ для щели любого профиля можно найти методом сращиваемых разложений [32]. Вблизи кромки при $(x - L) \ll R$ поле будет сходно с полем (23) около отверстия радиусом R (но при неизвестном местном напряжении σ_{∞}^*). Далеко от кромки ($x \gg L$) поле такое же, как и поле (24) от плоской прорези ($H \rightarrow 0$) под напряжением σ_{∞} . Выписав в виде конечных рядов два известных предельных частных решения, подбирают такие коэффициенты при N их последних членах, чтобы они совпали в некоторой промежуточной области сращивания [32]. Выбор интервала, а также и самого метода *сращивания внешней и внутренней асимптотики* [33] зависит от характера задачи. Иногда достаточно *соединение асимптотик* дробно-полиномиальной *аппроксимацией Паде* [33, 34] или иными приемами *асимптотической интерполяции* [35].

Конфигурации рис. 1.1.3 и 1.1.5 – это две предельные задачи для концентрации напряжений на дне надреза в бесконечной плоскости. При одинаковой безразмерной кривизне надрезов R/L любого профиля коэффициент концентрации напряжений при растяжении $K_h \leq K \leq K_e$ лежит между значениями K_e (25) для эллиптической прорези (см. рис. 1.1.3) или K_h (26) – при симметричных гиперболичес-

ских вырезах (см. рис. 1.1.5), оставляющих «живое сечение» такой же ширины $2L$.

При $\rho = 1$ (круговой вырез) в самой опасной точке $K_c = 3$ и $K_h = 8/(2 + \pi) = 1,56$. В другом пределе $\rho \rightarrow 0$ (острая трещина) оба $K \rightarrow \infty$, но $K_c \rightarrow 2/\sqrt{\rho}$, а $K_h \rightarrow (4/\pi)/\sqrt{\rho} = 1,27/\sqrt{\rho}$ (задача 4). Если безразмерная кривизна прорези ρ одинаковая, то при любой ее конфигурации коэффициент концентрации напряжений различается менее чем вдвое.

Все коэффициенты концентрации напряжений вычислены при упругих деформациях. Когда материал под надрезом начинает течь, концентратор сглаживается. Фактические напряжения под надрезом зависят также и от общей пластической деформации (как показано на рис. 1.1.6 для растяжения образца с кольцевой выточкой [36]).

В листе конечной толщины плоское напряженное состояние. Но в перешейке между боковыми вырезами – плоская деформация, так как стеснено сужение в ширину. Здесь материал течет при напряжении $\sigma = 1,115\sigma_s$, что существенно учитывать [37] при радиусе концентратора $R < 1$ мм.

Сингулярные концентраторы. Всякую прорезь длиной $2L$ в плоскости можно аппроксимировать эллипсом с тем же радиусом кривизны R «острой кромки». Наибольшее напряжение σ_{\max} на дне прорези. Его сравнивает с напряжением σ_∞ (при ее отсутствии) коэффициент концентрации напряжений (25)

$$K = \sigma_{\max}/\sigma_\infty = 1 + 2\sqrt{(L/R)}.$$

В пределе $H \rightarrow 0$ эллипс, сплюснутый до соприкосновения сторон, превращается в плоскую трещину с «бесконечно острой» кромкой. Здесь радиус кривизны $R = H^2/L \rightarrow 0$; из (25) следует $\sigma_{\max} \rightarrow \infty$ и $K \rightarrow \infty$ – для трещины понятие коэффициента концентрации напряжений K теряет смысл. (Так же и для любого отверстия, если его

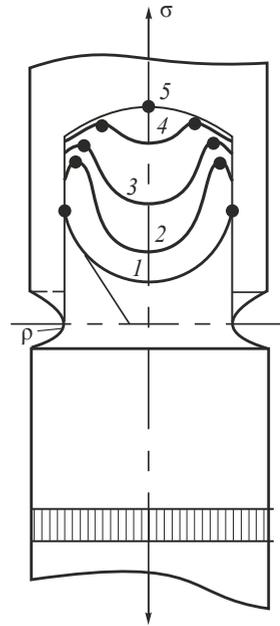


Рис. 1.1.6. Напряжения под кольцевой выточкой [36], измеренные после общего пластического растяжения образца ε

контур не гладкий, а имеет особые «угловые точки», где $R = 0$ и кривизна бесконечна: с приближением к ним напряжения асимптотически уходят на бесконечность.)

Состояние у кромки трещины – сингулярность поля – описывает закон убывания напряжений $\sigma(r)$ с расстоянием r от особой точки контура. Для «бесконечно острой» плоской трещины длиной $2L$ он находится из поля эллиптической прорези (24) предельным переходом к отношению осей эллипса $k \rightarrow 0$, что создает особые точки ($R = 0$) на кромках трещины $\xi = \pm 1$. При этом в (24)

$$U(\xi) = [(\xi^2 - 1) + |\xi|(\xi^2 - 1)^{1/2}]/2,$$

$\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$ и остается

$$s_{yy}(\xi, 0) = 1 + 1/[(\xi^2 - 1) + |\xi|(\xi^2 - 1)^{1/2}],$$

что упрощается до

$$s_{yy}(\xi, 0) = |\xi|/(\xi^2 - 1)^{1/2}. \quad (1.1.27)$$

Обозначив $\varepsilon = r / L$ безразмерное расстояние точки на оси ξ от кромки трещины, подставим в (27) $\xi = 1 + \varepsilon$. Оставим при малых $\varepsilon \ll 1$ только главное слагаемое, медленно убывающее с ростом ε . Тогда получим (задача 5) $s_{yy}(\varepsilon, 0) = 1 + 1/\sqrt{2\varepsilon}$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ напряжение «в точке кромки» $s_{yy}(\varepsilon, 0) \rightarrow \infty$ – бесконечное для любой трещины при любых приложенных напряжениях σ_∞ .

Но состояния у кромки разных трещин различаются темпом спада $\sigma_{yy}(r)$ с расстоянием r :

$$\sigma_{yy}(r) = \sigma_\infty + \sigma_\infty \sqrt{L/2r}. \quad (1.1.28)$$

Решение получается сингулярным при $r \rightarrow 0$ потому, что использует теорию упругости, которая справедлива в области малых деформаций $e_{ij} \ll 1$. Она пренебрегает дискретностью вещества и нелинейностями: физической (пластической деформацией) и геометрической (конечностью деформаций). Отличие конечных деформаций [15]

$$e_{ij} = [(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) + (\partial u_a / \partial x_i)(\partial u_a / \partial x_j)]/2;$$

от малых (2), где опущено второе слагаемое, должно учитываться в области у кромки размером $r \sim L (\sigma_\infty / E)^2$.

Из представления упругого поля эллипсоида в эллиптических интегралах [38] предельным переходом $k \rightarrow 0$ найдено [39] и полное описание поля трещины (в замкнутом виде – как дроби, содержащей в числителе и знаменателе полиномы от координат и квадратные корни из них).

Коэффициент интенсивности напряжений. В сингулярном слагаемом $\sigma_\infty \sqrt{L/2r}$ Ирвин (1958) назвал $\sigma_\infty \sqrt{L}$ коэффициентом интенсивности напряжений. Но позднее сочли удобным (см. §1.4) ввести в числитель и в знаменатель множитель $\sqrt{\pi}$ и переписать (28) в виде

$$\sigma(r) = \sigma_\infty + K_I \sqrt{\pi r}, \quad (1.1.29)$$

а коэффициентом интенсивности напряжений (интенсивностью напряжений) называть

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi L}. \quad (1.1.30)$$

Размерность $[K_I] = \text{МПа}\sqrt{\text{м}} = \text{МН}/\text{м}^{3/2}$. (Равноценные единицы $1 \text{ кН}/\text{мм}^{3/2} = 31,6 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$; или $1 \text{ кГ}/\text{мм}^{3/2} = 0,316 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ неудобны для пересчетов.)

Коэффициент интенсивности напряжений K_I описывает поле напряжений на достаточно малых расстояниях от кромки ($r \ll L$), но зато в любом поле σ_{ij}^∞ , для трещин любого размера и ориентировки, криволинейных любой формы, в том числе в ограниченном, в анизотропном или в кусочно-однородном теле [3]. Во всех случаях близ кромки верно асимптотическое представление вида $\sigma_{ij}(r) \sim K_I \sqrt{\pi(2r)}$ – как для трещины-линии в плоскости (двумерная 2D-задача), так и для трещины-поверхности в объеме (3D).

Для любой трещины на самой кромке при $r \rightarrow 0$ напряжение $\sigma(r) \rightarrow \infty$ – бесконечно большое, а с расстоянием r от кромки убывает как $\sigma \sim 1/\sqrt{r}$. Различие трещин – в «крутизне убывания» $\sigma(r)$, и его описывает коэффициент интенсивности напряжений K_I : чем больше K_I , тем медленнее падает напряжение $\sigma(r)$ с расстоянием r от кромки.

И если, например, для роста трещины в данном материале напряжения $\sigma_{yy}(r)$ должны превысить некоторую критическую величину σ_c в «области события» радиусом r_c , то из (29) следует (§1.6) критическое внешнее напряжение старта σ_∞ для данной трещины длиной $2L$.

«Острота профиля» существенно влияет на концентрацию напряжений только в малых окрестностях кромки трещины. На достаточно больших расстояниях описание (29) поля трещины $\sigma(r)$ через коэффициент интенсивности напряжений K_I сохраняется и в случае «неострых», «скругленных» профилей. Радиус скругления R важен, если все события разрушения локализованы в сравнимой области $r_c \sim R$.

При сложных конфигурациях образца и трещины грубые оценки для K_I получают методом сечений. Нагрузка $P = 2L\sigma_\infty$, снятая с трещины, перераспределилась на все поле по закону $\sigma(r) = K_I/\sqrt{(2\pi r)}$. Из условия равновесия $P = 2\int_L^\infty \sigma(r)dr$ следует $K_I = \sigma_0\sqrt{(\pi L)}$. Это совпадение с точным решением (29), в общем, случайно, так как сам вид $\sigma(r) \sim 1/\sqrt{r}$ – лишь приближение для малых $r \ll L$.

Порядок особенности. Существуют сингулярные концентраторы с другим законом убывания напряжений $\sigma \sim r^{-\mu}$ – для них «порядок особенности» μ отличается от $\mu = 1/2$ для трещин. Например, если в бесконечной среде поперек оси растяжения сделан вырез-линза из двух равных дуг окружности, встречающихся под углом 2ω (рис. 1.1.7), то нормальные напряжения убывают с расстоянием от кромки – точки встречи дуг как $\sigma \sim r^{-\mu}$, где показатель [40]

$$\mu(\omega) = 1 - 1/[2(1 - \omega/\pi)]. \quad (1.1.31)$$

При $\omega = 0$ вырез идентичен трещине: $\mu = 1/2$, как и в (28). С ростом угла ω показатель $\mu(\omega)$ монотонно понижается, и при $\omega = \pi/2$ сингулярность пропадает: $\mu = 0$, так как прорез превратился в круговое отверстие, не имеющее особой точки.

Для сингулярных концентраторов с порядком особенности $\mu \neq 1/2$ понятие «коэффициент интенсивности напряжений» смысла не имеет. События у кромки исследуют, сравнивая простираемое поле необходимого уровня σ_c . Если, например, в однородном поле σ_∞ для продвижения трещины размером L напряжение $\sigma(r)$ должно достичь уровня σ_c на расстоянии r_c от кромки, то для линзы (см. рис. 1.1.7) с таким же диаметром L стартовое напряжение $\sigma_\infty(\omega)$ будет в $(L/r_c)^{1-\mu(\omega)}$ раз больше, чем для трещины (задача б). Чем меньше необходимая стартовая область r_c в сравнении с длиной трещины, тем труднее старт от выреза-линзы. Например, для $\omega = \pi/4$ («почти квадратный» вырез) стартовое напряжение в полтора раза больше, чем для трещины, если $r_c/L = 0,1$ и в три раза – при $r_c/L = 0,001$.

В частности, при анизотропных модулях упругости ребро зерна поликристалла – сингулярный концентратор с $\mu \neq 1/2$ – клин. Его поле (см. §7.4) вызывает, например, самопроизвольное зернограничное растрескивание керамики. Оно зависит от размера зерна и взаимной ориентировки трех зерен в стыке [41].

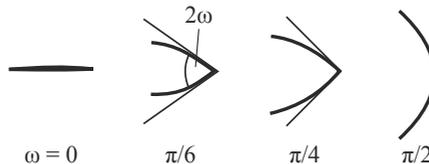


Рис. 1.1.7. Вырез-линза – сингулярный концентратор [40] изменяемого порядка $\mu(\omega)$: напряжения убывают как $\sigma \sim r^{-\mu}$; предел $\omega \rightarrow 0$ – трещина ($\mu = 1/2$), предел $\omega \rightarrow \pi/2$ – круговое отверстие без особой точки ($\mu = 0$)

Конформное отображение полей. Для упругих полей концентраторов эффективны методы теории функций комплексного переменного [42, 43]. На плоскости x, y основное уравнение (1) теории упругости – бигармоническое $\nabla^2(\nabla^2\chi) = 0$. Всякое его решение представимо суммой двух гармонических функций $\psi(x, y)$, таких, что $\nabla^2(x, y) = 0$. Выигрышное свойство гармонических функций [42]: если некоторая физическая величина $\psi(x, y)$ существует в области, ограниченной контуром C на плоскости (x, y) , и удовлетворяет заданным на этом контуре краевым условиям, то конформное отображение этой области на область в плоскости (u, v) с границей C^* указывает в ней поле $\psi(u, v)$, удовлетворяющее тем же краевым условиям во всех соответственных точках контура $C^*(C)$.

Если точку плоскости (x, y) отображает комплексная переменная $z = x + iy$, а точку плоскости (u, v) переменная $w = u + iv$, то функция $w(z)$ переводит контур $C(z)$ в $C^*(w)$. Такое конформное отображение устанавливает однозначное соответствие между точками w и z также и внутри областей, очерченных этими контурами: значения $\psi[w(z)] = \psi(z)$. В частности, «эквипотенциальные» линии уровня $\psi(x, y) = \text{const}$ будут переведены в линии уровня $\psi(u, v) = \text{const}$, а ортогональные к ним линии градиента – в линии градиента.

Удобно «область сравнения» на плоскости (x, y) , выбрать так, чтобы линиями уровня $\psi(z) = \text{const}$ оказались прямые $x = \text{const}$ (а ортогональные к ним линии градиента $y = \text{const}$). В окрестностях точки z эти линии высекают малый прямоугольник со сторонами $\delta x, \delta y$. Отображение $w(z)$ переводит его тоже в прямоугольник около точки w со сторонами $\delta u = |w'| \delta x; \delta v = |w'| \delta y$, где производная $w' = dw/dz$. (Отсюда название «конформное отображение» – «в малом» форма сохраняется.) Стороны поворачиваются на угол $\theta = \arg(w')$. (Всякое комплексное число $t = a + ib$ представимо в виде $t = \rho e^{i\theta}$, где его аргумент $\theta = \arg(t) = \text{arctg}(b/a)$; а модуль $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.) Длина сторон изменяется в $|w'| = |dw/dz|$ раз, отчего меняются градиенты поля ψ . Если на плоскости z поле $\psi(z)$ имеет линии уровня $x = \text{const}$, то $\text{grad } \psi(z) = \delta\psi/\delta x$, а на плоскости w в соответственной точке будет $\text{grad } \psi(w) = \delta\psi/\delta u$, так что

$$\text{grad } \psi(w) = \text{grad } \psi(z)/|w'|. \quad (1.1.32)$$

Конформное отображение $w(z)$ на полуплоскость $y \geq 0$ существует и единственно для всякого односвязного контура C^* (с некоторыми

оговорками). Если контур C^* – произвольный многоугольник, то $w(z)$ представимо в квадратурах [42, 43]. Отображения $w(z)$, известные в замкнутом виде, собраны в таблицах [42, 43]. Но даже когда $w(z)$ найдено только численно, полезно и это: вместо всего поля остается вычислить некоторые коэффициенты отображения.

В частности, известное решение задачи об упругом поле на плоскости для выреза с контуром C (или же трещины) конформным отображением переносимо на любую другую конфигурацию C^* (Колосов, 1909; Мухелишвили). Некоторые и трехмерные задачи теории упругости удается свести к суперпозиции задач на комплексных плоскостях [44].

Уступ поверхности. Помимо трещин сингулярными концентраторами напряжений могут быть особые точки рельефа поверхности тела, например «остроугольные» уступы (рис. 1.1.8), где кривизна в «углах» бесконечна. Когда полупространство растягивается вдоль его поверхности напряжением σ_∞ , однородным на бесконечности, во внутренних «точках поворота» напряжение $\sigma \rightarrow \infty$.

Пусть граница полупространства имеет прямоугольный уступ высотой h , где она поворачивает на $\pm 90^\circ$ (точки N^* и P^* на рис. 1.1.8). Найдем поле напряжений, возмущенное уступом, взяв за базу сравнения однородное поле $\sigma_{\xi\xi}(\xi; \eta) = \sigma_\infty$ на полуплоскости $\eta \geq 0$.

Выбрав h за масштаб, введем безразмерные координаты $x = \xi/h$; $y = \eta/h$. Отобразим плоскость $z = x + iy$ на плоскость $w = u + iv$ преобразованием [45]

$$w = (1/\pi)\{(z^2 - 1)^{1/2} + \ln[z + (z^2 - 1)^{1/2}]\}. \quad (1.1.33)$$

Оно переводит прямую $y = 0$ в плоскости z в границу контура $M^*N^*P^*Q^*$ на плоскости $w = u + iv$.

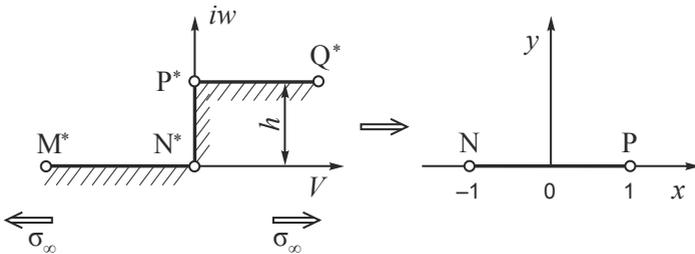


Рис. 1.1.8. Прямоугольный уступ N^*P^* на поверхности полупространства и его конформное отображение (33) на плоскости $z = x + iy$

Действительно, поскольку $\ln(-1) = i\pi$, точке $z_0 = -1$ на оси $y = 0$ (N на рис. 1.1.8) соответствует особая точка $w_0 = i$ на плоскости w (N^* – «внутренний угол» уступа), а точке P, где $z = +1$, точка P^* («наружный угол», $w = 0$). Подстановкой в (33) можно убедиться (*задача 7*), что и все остальные точки прямой $y = 0$ взаимно однозначно соответствуют точкам контура $M^*N^*P^*Q^*$. Для $|x| \leq 1$ они отображаются на отрезок $w = iv$ при $0 \leq v \leq 1$. Если $x \leq -1$, они попадают на луч $w = (u + i)$ при $u \leq 0$, а если $x \geq +1$, то на луч $w = u$ при $u \geq 0$.

Обозначим $\psi(z) = x\varepsilon_{xx}$ поле смещений: при плоской границе они нарастают линейно с расстоянием x от начала координат. В нем деформации $\varepsilon_{xx} = \text{grad } \psi(z)$, а главное напряжение $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \text{ grad } \psi(z) = \sigma_\infty$ всюду одинаково. Из (32) следует, что в соответственной точке $w(z)$ главное напряжение $\sigma_{uu} = E \text{ grad } \psi(w) = E \text{ grad } \psi(z)/|w'|$ или

$$\sigma_{uu}(w) = \sigma_\infty/|w'|. \quad (1.1.34)$$

Дифференцируя (33), находим

$$w' = (1/\pi)[(z + 1)/(z - 1)]^{1/2}. \quad (1.1.35)$$

Угол $\theta = \arg(w')$ указывает направления главных осей u и v в точке w . Теперь параметрически – через $w(z)$, $w'(z)$ и $\theta(w')$ – полностью описано поле напряжений $\sigma_{ij}(w)$ в полупространстве с уступом, растягиваемым вдоль границы. (Второе главное напряжение $\sigma_{vv} = 0$, поскольку оно действует вдоль линии уровня поля).

В особой точке $w_0 = i$ («внутренний угол» уступа N^*) производная $|w'| = 0$ (*задача 7*), так что напряжение $\sigma_{uu}(w_0) \rightarrow \infty$ – концентратор сингулярный. Если он такого же типа, как и трещины, то на малом расстоянии $r = h|w - w_0|$ от особой точки w_0 главное напряжение $\sigma_{uu}(w) = \sigma_\infty/|w'|$ должно убывать подобно (25), как $\sigma(r) = \sigma_\infty + K_I/\sqrt{(2\pi r)}$. Тогда существует предел $K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_{uu}(w)\sqrt{(2\pi r)}]$, и коэффициент интенсивности напряжений K_I найдем из соотношения

$$K_I\sqrt{(2\pi)/\sigma_\infty} = \lim_{w \rightarrow w_0} [(\sqrt{|w - w_0|})/|w'|]. \quad (1.1.36)$$

Перейти к пределу надо вдоль траектории главных напряжений, проходящей через особую точку N^* . На плоскости z ей соответствует прямая $z = -1 + iy$, проходящая через точку N. Подставляя $z = -1 + iy$, заменим (36) пределом по параметру y :

$$K_I\sqrt{(2\pi)/(\sigma_\infty\sqrt{h})} = \lim_{y \rightarrow 0} [(\sqrt{|w - w_0|})/|w'|].$$

Здесь при $y \ll 1$ главные части $(w - w_0) \sim -(iy/\pi)$; $w' \sim (1/\pi)\sqrt{(-iy/2)}$, так что $\lim_{y \rightarrow 0} [(\sqrt{|w - w_0|})/|w'|] = \sqrt{(2\pi)}$ и тогда

$$K_I = \sigma_\infty\sqrt{h}. \quad (1.1.37)$$

Сравнивая с $K_I^0 = \sigma_\infty\sqrt{(\pi L)}$ из (30), видим, что прямоугольный уступ поверхности высотой h – такой же сингулярный концентратор напряжений, как внутренняя трещина длиной $2L = 2h/\pi$. Для поверхностной трещины (§1.5) глубиной h интенсивность напряжений $K_I^0 = 1,215\sigma_\infty\sqrt{(\pi h)}$. По сравнению с ней уступ как концентратор слабее в 2,16 раза. Наглядное истолкование: если по одну сторону поверхностной трещины материал «сточить до корня», останется уступ и интенсивность напряжений уменьшится примерно вдвое.